PreIMO 2014

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

pre IMO 2014

ALGEBRA MATTINO F. Morandin

Titolo nota 27/05/2014

$\boxed{1}$ $f(x+y-z)+f(2\sqrt{xz})+f(2\sqrt{yz})=f(x+y+z)$

$\forall x,y,z\in\mathbb{R}^+ \ : \ z\le x+y \qquad f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$

$x=y=z=0 \qquad 3f(0)=f(0) \quad \Rightarrow \boxed{f(0)=0}$

$x=y \quad z=2x \qquad 0+2f(2\sqrt{x\cdot 2x})=f(4x)$

$2f(2\sqrt{2}x)=f(4x) \qquad x=\frac{1}{2\sqrt{2}}y$

$\boxed{2f(y)=f(\sqrt{2}y)}$

$f(2x)=4f(x)$

$f(x)\sim x^2 \qquad g(x):=\sqrt{f(x)}$ non è utile in questo caso

$\boxed{h(x):=f(\sqrt{x})} \qquad h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$

$y=0 \qquad\qquad 0\le z\le x$

$h(\underbrace{x^2+z^2-2xz}_{a})=f(x-z)=f(x+z)-f(2\sqrt{xz})=h(\underbrace{x^2+z^2+2xz}_{a+b})-h(\underbrace{4xz}_{b})$

Cauchy? $\forall a,b\in\mathbb{R}^+ \quad h(a)=h(a+b)-h(b)$

domanda: fissati a,b, è vero che $\exists\, x,z$:

$$a=x^2+z^2-2xz \qquad \begin{cases} a+b=x^2+z^2+2xz \end{cases}$$
$$b=4xz$$

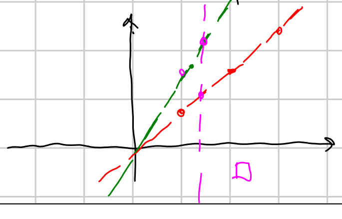
$\sqrt{a}=x-z \qquad \sqrt{a+b}=x+z \qquad x=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{2} \qquad z=\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{2}$

Cauchy ok. Ma la condizione?

Siccome $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ non ci sono punti del grafico nel IV quadr.

$h(x)=\lambda x \qquad \lambda\in\mathbb{R}$

Sostituisco e verifico e trovo $f(x)=\lambda x^2$ con $\lambda\ge 0$



$\boxed{2}$ $p(x)$ di grado n $\to$ $n+1$ coeff.

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$

$y_0, y_1, \dots, y_n$ $\quad p(\alpha_i) = y_i \quad \forall i = 0, 1, \dots, n \longrightarrow n+1$ condizioni

(sse $\alpha_i \neq \alpha_j \quad \forall i \neq j$)

Come trovo p ?

1) Inverto la matrice di Vandermonde

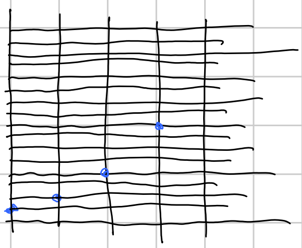
2) Formula di Lagrange

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-\alpha_j)}{(\alpha_i - \alpha_j)} y_i$$

3) Metodi con le mani

$$p(x) = y_0 + (x-\alpha_0)\left(\frac{y_1-y_0}{\alpha_1-\alpha_0} + (x-\alpha_1)\left(\frac{y_2-y_1}{\alpha_2-\alpha_1} - \frac{y_1-y_0}{\alpha_1-\alpha_0} + (x-\alpha_2)\left(\dots \right)\right)\right)$$

$\alpha_{i+1} - \alpha_i \equiv \text{cost}$



$$1 + x + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} +$$

$1 + 3 + 3 + 1$

$1 + 4 + 6 + 4 + 1$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)}{k!}$$ ha grado n

$p_n(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad p_n(m) = 2^m \qquad m \leq n$

$\exists!$ un polinomio $p_n(x)$ tale che $p_n(i) = 2^i \quad i = 0, 1, \dots, n$

$$p_n(n+1) = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \dots + \binom{n+1}{n} = 2^{n+1} - 1$$

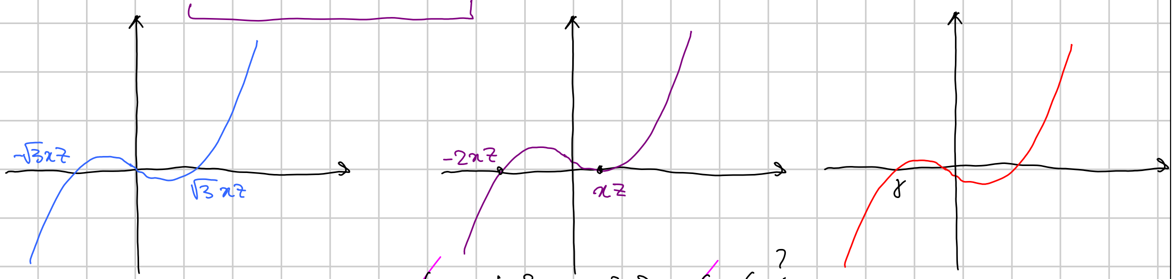
$$p_n(n+2) = 2^{n+2} - 1 - (n+2) = 2^{n+2} - n - 3$$

$\boxed{3}$ $a,b,c \geq 0$ $\qquad \dfrac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \overset{?}{\leq} \dfrac{2}{3} \max\left\{ (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2; (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2; (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2 \right\}$

wlog $a \leq b \leq c$ $\qquad \dfrac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \overset{?}{\leq} \dfrac{2}{3}\left(c + a - 2\sqrt{ac}\right)$

$a = x^6$ e cicliche $\qquad x^6 + \underline{y}^6 + z^6 - 3x^2\underline{y}^2z^2 \overset{?}{\leq} 2z^6 + 2x^6 - 4x^3z^3$

$t = y^2$ $\qquad \underbrace{\underbrace{t^3 - 3x^2z^2t}_{} + 4x^3z^3}_{} - x^6 - z^6 \overset{?}{\leq} 0$



$t = x^2$ $\qquad \cancel{x^6} - 3x^4z^2 + 4x^3z^3 - \cancel{x^6} - z^6 \overset{?}{\leq} 0$ $\qquad$ fattorizzabile

$t = z^2$ $\qquad$ uguale

$\boxed{4}$ $f(x) := \displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{a_i}{x+i} - \frac{1}{x} = \frac{\overbrace{\sum_{j=0}^{5} a_j \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{5} (x+i)}^{p(x)}}{\underbrace{\prod_{i=0}^{5}(x+i)}_{q(x)}}$ $\qquad$ $a_0 = -1$

$f(k^2) = 0 \quad k = 1, 2, \ldots, 5$

$p(x) = f(x)q(x) \qquad p(k^2) = 0 \quad k = 1, 2, \ldots, 5$

$= \underbrace{\sum_{j=0}^{5} a_j}_{d} x^5 + \ldots \qquad = d(x-1)(x-4)(x-9)(x-16)(x-25)$

$p(0) = -d\,(5!)^2 = -d \cdot 120^2$

$p(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{5} a_j \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{5} (x+i) - \prod_{i=1}^{5}(x+i)$

$= \displaystyle\sum_{j=1}^{5} a_j x \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{5} (x+i) - \prod_{i=1}^{5}(x+i) \qquad p(0) = -\prod_{i=1}^{5}(0+i) = -5! = -120$

$d = \dfrac{1}{120}$

$\displaystyle\sum_{1}^{5} \frac{a_i}{36+i} = f(36) + \frac{1}{36} = \frac{p(36)}{q(36)} + \frac{1}{36} = \frac{\frac{1}{120}(36-1)(36-4)\cdot\ldots\cdot(36-25)}{36\cdot 37\cdot 38\cdot\ldots\cdot 41} + \frac{1}{36}$

$p(x)$ di grado n

$p(0)$ $p(1)$ $p(2)$ $p(3)$ ----

$q(0)$ $q(1)$ $q(2)$ --

$r(0)$ $r(1)$ ---

dopo

$q(x) = p(x+1) - p(x)$

$q(x)$ ha grado $n-1$

$r(x) = q(x+1) - q(x)$

ha grado $n-2$

Finite difference array

$p(x)$ grado n

passa per $(0,1)$, -- $(n, 2^n)$

2^0 2^1 2^2 ---- 2^n $p(x)$ grado n

2^0 2^1 2^2 ---- $q(x)$ grado $n-1$

$r(x)$ grado $n-2$

2^0 2^0 2^0 2^0 -- ← polinomio di grado 0

$$p(x) = \binom{x}{l}$$

Cosa succede se faccio questo lavoro invece partendo da

$p(0) \quad p(1) \quad p(2) \quad \cdots$

$q(0) \quad \cdots$

$$q(x) = \binom{x+1}{\ell} - \binom{x}{\ell} = \binom{x}{\ell-1}$$

$$r(x) = \binom{x}{\ell-2}$$

Se faccio la tabella partendo da $p(x) = \binom{x}{\ell}$, la prima diagonale vale $(\underbrace{0, 0, 0, \dots}_{\ell} 1, 0, 0, 0 \dots)$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{x}{\ell},$$ se partita da

la prima "colonna" vale $c_0 \; c_1 \; c_2 \; c_3 \dots c_d \; 0 \; 0 \; 0 \dots$

Data la FDA, il polinomio è

$$p(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \binom{x}{\ell},$$

dove c_i sono i valori della prima "colonna storta"

$$p(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{x}{\ell}$$

Usate $\binom{x}{l}$ per il problema dei binomiali

---

polinomio di grado n ("$n+1$ gradi di libertà")

$n+3$ condizioni

Possono esistere $q(x)$, $r(x)$ diversi che soddisfano $n+2$ delle condizioni ognuno?

In quanti punti coincidono questi polinomi? $n+1$!

ALGEBRA POMERIGGIO p02

Titolo nota 27/05/2014

A5 (già visto)

$$f(x+y)+y \le fff(x)$$

$$\boxed{y = ffx - x}$$

$$\cancel{fff(x)} \le \cancel{fff(x)} - ffx + x$$

$$\boxed{x \ge ffx}$$

$$f(x+y)+y \le fffx \le fx$$

non $fx \ge f(ffx)$ ma $y \ge ffy$ con $y = fx$

$$(*) \quad f(x+y)+y \le fx$$

Giocando un po' si congettura che $f(x) = c - x$

$x = 0$ in $(*) \Rightarrow$ $f(y) \le f(0) - y$

Ci manca $f(y) \ge f(0) - y$

in $(*)$ $y = -x \to f(0) - x \le f(x)$

A6

$$\sum_{cyc} \frac{a^3 + 5abc}{a^3(b+c)} \ge \boxed{?}$$

$$\sum \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$$

$$\frac{a}{b+c} \cdot a(b+c) = (a)^2$$

$$\left(\sum_{cyc} a\right)^2 \leq \left(\sum_{cyc} \frac{a}{b+c}\right) \cdot \left(\sum_{cyc} a(b+c)\right)$$

$$\underbrace{\sum_{cyc} \frac{1\,(abc)^{1/3}}{b+c}}_{\text{questo non ha minimo per } a=b=c=1!} + \sum_{cyc} \frac{5\,(abc)^{4/3}}{a^3(b+c)} \geq \cdots$$

Difatti $\displaystyle\sum \frac{1}{b+c} \to 0$ se $\boxed{\begin{array}{l} a = 1/M^2 \\ b = c = M \end{array}}$

$$\sum \frac{a}{b+c}$$

So trovare

$$\min \sum \frac{1}{a(b+c)} \; ?$$

E $\displaystyle\boxed{\min \sum \frac{1}{a^2(b+c)}}\;?$ $\to \min = 3/2$ assunto in $a=b=c=1$

E $\displaystyle\boxed{\min \sum \frac{1}{a^3(b+c)}}\;?$

$$\frac{1}{a^2(b+c)} \cdot a(b+c) = \left(\ldots \right)^2$$

$$\frac{1}{a^2(b+c)} \cdot (b+c) = \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\underbrace{\left(\sum \frac{1}{a^2(b+c)}\right)} \cdot \left(\sum (b+c)\right) \geq \left(\sum \frac{1}{a}\right)^2$$

$$LHS \geq \frac{\left(\sum \frac{1}{a}\right)^2}{\sum (b+c)} = \frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum (b+c)} \geq$$

$$= \frac{\sum b^2c^2 + 2\sum \cancel{ab}\cdot\cancel{bc}}{2\sum a} \geq \frac{3\sum ab^2c}{2\sum a} = \frac{3}{2}$$

$$\sum_c x^2 \geq \sum_c xy \quad x = bc \text{ e cicliche}$$

Ora provo $\min \sum \frac{1}{a^3(b+c)}$

$$\frac{1}{a^3(b+c)} \cdot a(b+c) = \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\Big\downarrow \text{CS}$$

$$\left(\sum_c \frac{1}{a^3(b+c)}\right)\left(\sum_c a(b+c)\right) \geq \left(\sum \frac{1}{a}\right)^2 \iff$$

$$\sum_c \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{(\sum bc)^2}{\sum_c a(b+c)} = \frac{(\sum_c bc)^{\cancel{2}}}{2\cancel{\sum ab}} =$$

$$= \frac{\sum_c bc}{2} \geq \frac{1}{2}\cdot 3\,(abc)^{\square}$$

AM-GM

$$\sum \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \text{suo valore in } (1,1,1) = \frac{3}{2}$$

$$\sum \frac{1}{a^2(b+c)} \geq \quad \text{"} \quad (1,1,1) = \frac{3}{2}$$

$$\sum \frac{1}{b+c} \;\cancel{\geq}\; \quad \text{"} \quad (1,1,1)$$

$$a^3+1+1 \geq 3a \quad \text{AM-GM su } a^3, 1, 1$$

$$\sum_c \frac{a^3+5}{a^3(b+c)} \geq \sum_c \frac{3a+3}{a^3(b+c)} \geq \text{ li so fare entrambi!}$$

$$a^3 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{25}{4}}\,a \quad \leftarrow \text{no (cond. uguaglianze sbagliate)}$$

Anche:

$$a^3+1+1+1+1+1 \geq 6\sqrt[6]{a^3} = 6\sqrt{a}$$

$$\sum_c \frac{\sqrt{a}}{a^3(b+c)}$$

volendo, si fa in modo simile

$a \to \frac{1}{x}$ e cicliche

$$LHS \geq \sum \frac{a^3+5abc}{a^3(b+c)} = \sum \frac{a^2+5bc}{a^2(b+c)} =$$

$$= \sum \frac{5x^2+yz}{y+z} \geq 3(x+y+z) \geq 3 \cdot 3 \sqrt[3]{xyz} = 9$$

Bunching + conti

$$(LHS)^3 \geq 3^3 \cdot \frac{\prod_c (a^3+5abc)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \dots \text{conti } (B+S)$$

A7

$$f(fx+y) = f(fx-y) + 4(fx) \cdot y$$

- $f \equiv 0$ soluzione
- $f(x) = x^2$ soluzione

idea: $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$

$$y = f(x) \longrightarrow f(2fx) = f(0) + 4(fx)^2$$

se fosse suriettiva, $f(z) = f(0) + z^2$

... ma non lo è ...

"suriettività 2.0"

$$\underbrace{f(fx+y) - f(fx-y)}_{\text{prende tutti i valori di } \mathbb{R} \text{ possibili}} = \underbrace{4f(x) \cdot y}_{\text{suriettiva}}$$

$\boxed{\text{Fisso } x \text{ con } f(x) \neq 0}$

Se voi mi date $z \in \mathbb{R}$, so trovare $u, v \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(u) - f(v) = z \qquad \text{"} f(\mathbb{R}) - f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \text{"}$$

1° modo di usarla

$$f(fx+y) = f(fx-y) + 4(fx) \cdot y$$

$$\Big\downarrow \; y \to f(y)$$

$$\underbrace{f(fx+fy) - 4fxfy}_{\text{simmetrica}} \overset{\text{Testo}}{=} f(fx-fy)$$

$$\text{"} \quad f(fy+fx) - 4fyfx \overset{\text{Testo}}{=} f(fy-fx)$$

$f(z) = f(-z)$ $\forall z$ che si scrive come $z = fx - fy$
suriettività 2.0

$f(fx+fy) = \text{roba}$ Altra idea classica: cerco di costruire una "somma a tre";

$$f(fx+fy+fz)$$

$y \leftarrow fy + fz$ nel testo dà

$$\underbrace{f(fx+fy+fz)}_{\substack{\text{simmetrica}\\ x,y,z}} = f(fx-fy-fz) + 4fx(fy+fz)$$

$$= f(fy-fx-fz) + 4fy(fx+fz)$$

$(*)$: $f(fx-fy-fz) = f(fy-fx-fz) + 4fz(fy-fx)$

Suriettività 2.0: $w = f(x) - f(y)$, che prende tutti i valori in $\mathbb{R}$

$(**)$ $f(w - fz) = f(-w - f(z)) - 4f(z) \cdot w$

Assomiglia a $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

$f(z)$ ovunque una variabile "liscia" z in (xx) rompe un po' le scatole

Ma $f(z)$ l'ho sostituito all'inizio e non l'ho mai usato... posso ricominciare con $y \to f(y)+z$

... insomma, ottengo $f(w-z)=f(-w-z)-4zw$

da qui, pongo $z=w$ $\quad f(0)=f(-2z)-4z^2$

e finisco

A8 $\max(ax+by+cz)$

al variare di x,y,z t.c. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=3$

$abc=1 \quad a=\frac{x}{y}$ e cicliche

$$a=p-q$$
$$b=q-r$$
$$c=r-p$$

$$(p-q)x+(q-r)y+(r-p)z$$

$$p(x-z)+q(y-x)+r\cdot(z-y) \leq \sqrt{p^2+q^2+r^2} \cdot \sqrt{(x-z)^2+(y-x)^2+(z-y)^2} =$$

$$= \sqrt{2\sum x^2-2\sum xy} = \sqrt{2\cdot 3} = \sqrt{6}$$

Però ...

$(p,q,r) \sim (x-z, y-x, z-y)$, e questo non funziona, solo se $p+q+r=0$ ...

NON è soluzione (o forse sì?)

intuizione: "potete porre $x=0$"

modo un po' più formale:

$$(x,y,z) \longrightarrow (x,\ x+r,\ x+s)$$

obiettivo: $ax+b(x+r)+c(x+s) = \cancel{(a+b+c)x} + br + cs$

vincolo: $3 = x^2+(x+r)^2+(x+s)^2 - x(x+r) - x(x+s) - (x+r)(x+s) =$

$$= r^2+s^2-rs$$

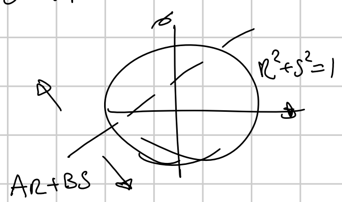
(è la stessa cosa che porre $x=0$)

Ora il problema è:

(*) max $br+cs$ con vincolo $\boxed{r^2+s^2-rs=3}$

Cauchy-Schwarz è bravo a trovare cose tipo

$$(AR+BS) \le \sqrt{A^2+B^2}\sqrt{R^2+S^2} = \sqrt{A^2+B^2} \quad \text{se so che } R^2+S^2=1$$



Cerco di far diventare (*) questo problema

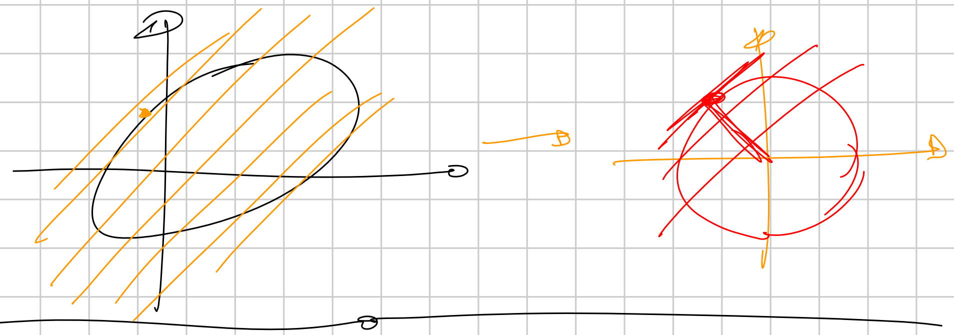
$$3 = r^2-rs+\frac{s^2}{4}+\frac{3}{4}s^2 = \left(r-\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}s\right)^2$$

completo il quadrato

$$br+cs = b\boxed{\left(r-\frac{s}{2}\right)} + \left(\frac12 b+c\right)\frac{2}{\sqrt3}\cdot\boxed{\frac{\sqrt3}{2}s} \overset{CS}{\le}$$

$$\le \sqrt{b^2+\left(\left(\frac12 b+c\right)\cdot\frac{2}{\sqrt3}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(r-\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}s\right)^2} =$$

$$= \sqrt{b^2+\frac43\left(\frac{b^2}{4}+bc+c^2\right)}\,\sqrt3 = \max$$



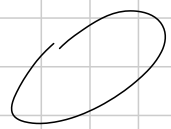
$$3(ax+by+cz) - (a+b+c)(x+y+z) =$$

$$= a(2x-y-z)+b(2y-x-z)+c(2z-x-y) \le$$

$$\le \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{\text{mostro}}$$

vincolo $\iff (x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2=3$

$$\iff \sum_{cyc} \cdot (2x-y-z)^2$$



A9

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$f(n)$	1	1	2	2	3	4	4	4	5	6	7	7	8	8	8	8	9	10	11	12	12	13	14
	1	2			3								4										

n	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$f(n)$	14	15	15	15	16	16	16	16	16	17	18	19	20
					5								

$$f_n = ff(n-1)+f(n-f(n-1))$$

32

Ogni f è somma delle f di due numeri più bassi

$$f(n) = f(a_n)+f(b_n)$$

a ogni passo $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n+1 \\ b_n \end{bmatrix}$ oppure $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n+1 \end{bmatrix}$

uno è $f(n-1)$, uno è $n-f(n-1)$

se $f(n)-f(n-1)=0$

$n-fn-(n-1-f(n-1))=1$

$f(n)-f(n-1)=1$

e se

$n-fn-(n-1-f(n-1))=0$

Questo si trasforma in una dim. per induzione (estesa) che $f(n+1)-f(n)\in\{0,1\}$

Passo base $f(a+1)-f(a)\in\{0,1\}$ per $a<n$

$f(n+1)-f(n)=f(f(n))+f(n+1-fn)-ff(n-1)-f(n-f(n-1))=$

se $f(n)=f(n-1)$, vengono $f(n+1-fn)-f(n-f(n-1))$

se $f(n)-f(n-1)=1$, vengono $ff(n)-ff(n-1)$

Si riesce a dim. per induzione anche che

$f(n)\geq \frac{n}{2}$ per $n>1$

$$f(n)=ff(n-1)+f(n-f(n-1))\geq \frac{f(n-1)}{2}+\frac{n-f(n-1)}{2}=$$

$$=\frac{n}{2}$$

Fissato m

A un certo punto, esisterà x tale che $f(x)=2^m$

$x\geq 2^m$ (perché per Hp. induttiva $f(2^m)=2^{m-1}$)

$f(x)\geq \frac{x}{2} \Rightarrow x\leq 2^{m+1}$

Blocco successivo: 32 | 33 - - - 64 64

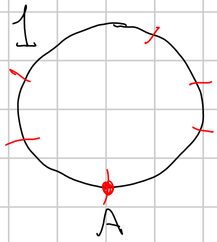
- - 0 . 0 16 | 32 32 32 ⋯ 32

$$f(a) = \underbrace{f(\underbrace{f(a-1)}_{\geq 32})}_{\geq 16} + \underbrace{f(a - \underbrace{f(a-1)}_{\geq 32 \text{ perché } a \leq 64})}_{\geq 16} \dots$$

COMBINATORIA M - PreIMO 2014

Titolo nota 29/05/2014

C1

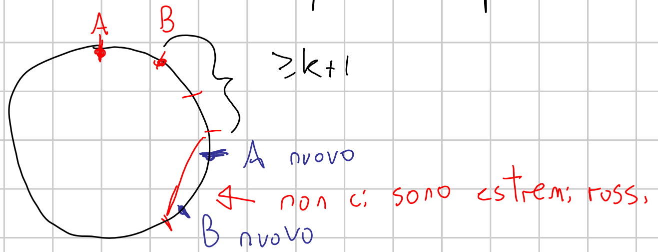


n archi non tutti lunghi uguali
ruotiamo di $\frac{2\pi k}{n}$ per $1 \leq k \leq n-1$

Th: $\exists$ un arco nuovo $\subseteq$ arco vecchio

Per $k=1$, prendiamo il più grande arco
Per k generico
Consideriamo gli estremi degli archi
contare quanti estremi supera A con la rotazione di $\frac{2k\pi}{n}$

$\exists$ A t.c. A supera al più $k-1$ estremi



Se riesco a trovare A che supera almeno $k+1$ estremi di archi e B (che è il successivo di A) che supera al più k estremi dico che l'arco $\widehat{AB}$ soddisfa la tesi.

Sicuramente $\exists$ A che supera $> k$ estremi
conto quanti estre superano i successivi di A
A ne supera $> k$
B " $> k$
C " $> k$ $\Big\}$ $\longrightarrow$ altrimenti vinco

Se riesco ad arrivare in fondo che tutti gli estremi superano più di k estemi. Assurdo

---

C2

$n \geq 2$ $A_1, \ldots, A_n$ insiemi finiti

$$|A_i \Delta A_j| = |i-j|$$

MINIMIZZARE $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |A_i|$

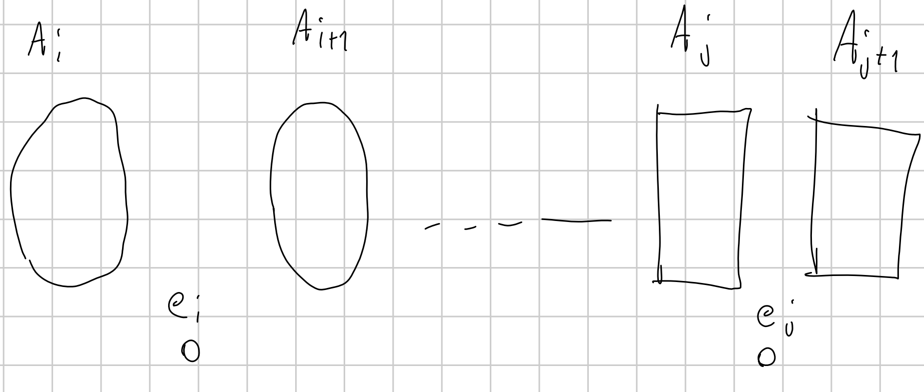
<u>OSS. 1</u> $|A_i \Delta A_{i+1}| = 1$ per $i = 1, \dots, n-1$

dunque $\exists\, e_i$ con $\{e_i\} = A_i \Delta A_{i+1}$

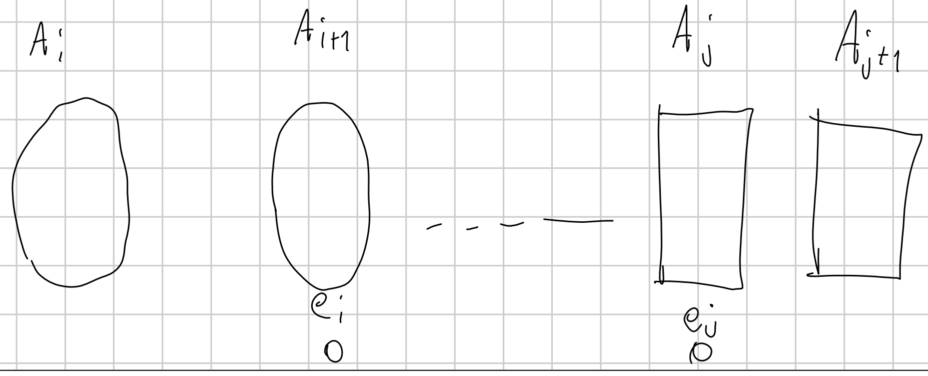
$$A_1 \underset{e_1}{\Big|} A_2 \underset{e_2}{\Big|} A_3 \; \dots \; A_{n-1} \underset{e_{n-1}}{\Big|} A_n$$

<u>OSS. 2</u> $e_i \neq e_j$ per $i \neq j$

$1 \leq i < j \leq n-1$



<u>CASO 1</u> $O \in A_{i+1}$ e $O \in A_j$



$$A_i \Delta A_j = \left(A_i \cup \{o\}\right) \Delta \left(A_j \cup \{o\}\right)$$

card. $|i-j|$ $\quad\quad$ $|i-j+2|$

CASO 2 Analogo

OSS. 3 Possiamo supporre che ogni elemento di uno degli A_i è uno degli e_k

Se $e \in$ a tutti gli A_i, considero gli $A'_i = A_i \setminus \{e\}$ tutte le ipotesi sono verificate, ma $\sum |A'_i| < \sum |A_i|$

OSS. 4 Gli elementi si dividono in 2 tipi: quelli presenti fin dall'inizio A, che scompaiono, e quelli presenti fino alla fine, che compaiono Ω

OSS. 5 $\displaystyle \sum |A_i| = \sum_{e_k}$ n° di volte che e_k compare in A_i =

$$= \sum_{e_k \in A} k + \sum_{e_k \in \Omega} (n-k) \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \min\{k, n-k\}$$

ESERCIZIO: CALCOLARE LA SOMMA $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$

ESEMPIO Se scegliamo di mettere in A gli e_i con $i \leq n-i$ e in Ω gli e_i con $i > n-i$ allora tutte le disuguaglianze sono uguaglianze.

OSS. 6 L'oss. 2 in realtà equivale alle ipotesi

A_i A_j

e_i - - - - e_{j-1}

$$A_i \,\Delta\, A_j = \{e_i, \dots, e_{j-1}\}$$

C3 $|X| = n$ $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$

la famiglia $\mathcal{F}$ ha la proprietà P se $\exists A, B \in \mathcal{F}$ t.c. $|A \,\Delta\, B| = 1$

a - Trovare la minima $|\mathcal{F}|$: se $|\mathcal{F}'| > \min|\mathcal{F}|$ allora $\mathcal{F}'$ ha la proprietà P

b - Descrivere tutte le $\mathcal{F}$ massimali senza la proprietà P

Notazione: $A \subseteq X$ associamo un vettore $(e_1, \dots, e_n)$: $e_i \in \{0, 1\}$ in modo che $e_i = 1 \iff$ l'elemento i-esimo $\in A$

Se $|A|, |B|$ hanno la stessa parità non può essere che $|A \,\Delta\, B| = 1$

$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : |A| \text{ pari}\} \Rightarrow |\mathcal{F}| = 2^{n-1}$

$m = \min|\mathcal{F}|$ al punto a) $m \overset{?}{=} 2^{n-1}$ $m \geq 2^{n-1}$

Se considero una $|\mathcal{F}| > 2^{n-1}$, $|\mathcal{F}| \geq 2^{n-1} + 1$

considero le n-uple $\in \mathcal{F}$ con $e_1 = 1$ e le divido da quelle che hanno $e_1 = 0$

Per Pidgeonhole abbiamo che (wlog la suddivisione di parti che non contiene il primo elemento) questa contiene almeno $2^{n-2} + 1$.

Per induzione su n

$n = 1$ il massimo è 1

$n > 1$ mi riconduco ad una famiglia $\mathcal{F}'$ su un insieme $X \setminus \{1\}$

che ha $n-1$ elementi.
Il minimo $|\mathcal{F}|$ è 2^{n-1} (del punto a).

Oss. Il ragionamento fatto ci dice che comunque fissati k tra gli e_i del vettore $(e_1, \dots, e_n)$ abbiamo esattamente metà dei vettori possibili in $\mathcal{F}$, se ne ha di più $\Rightarrow \mathcal{F}$ ha la proprietà P
se ne ha di meno $\Rightarrow \mathcal{F}$ non è massimale
↳ nel senso che $|\mathcal{F}| < 2^{n-1}$

→ In particolare fisso $n-1$ componenti ho 2 scelte possibili e la $\mathcal{F}$ ne contiene esattamente 1.

Ora ho 2 casi (i) $\underline{\emptyset \in \mathcal{F}}$ $\vee$ (ii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(i) $(0,0,\dots,0) \in \mathcal{F} \Rightarrow (|A| = 1 \Rightarrow A \notin \mathcal{F})$

se $|A| = 1$, $A \notin \mathcal{F} \Rightarrow (|A| = 2 \Rightarrow A \in \mathcal{F})$

- - - -

$|A| = n$
$\Rightarrow \mathcal{F} = \{A \subseteq X : |A| \text{ è pari}\}$

(ii) perfettamente analogo scambio ogni volta $\in$ con $\notin$
$\Rightarrow \mathcal{F} = \{A \subseteq X : |A| \text{ è dispari}\}$.

$\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0,1\}\} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = V$ con somma comp. per comp. in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Per quali n è possibile accoppiare gli elementi di V in modo che le somme siano tutte distinte?

1) $\boxed{n=1 \quad (0) + (1) = (1)}$ $\underline{\text{ok}}$

2) $n = 2$

$(0,0) \to (0,1)$ $\qquad$ $(0,1)$ $\qquad$ $(1,1)$
$(1,0) \qquad (1,1)$ $\qquad$ $(0,1)$ NO $\qquad$ $(1,1)$ NO

3)

(0 0 0)	(1 0 0)	(1 0 0)	
(0 0 1)	(1 0 1)	(1 1 1)	ok
(0 1 0)	(1 1 0)	(1 0 1)	
(0 1 1)	(1 1 1)	(1 1 0)	

$2n+1 \to 2n+3$)

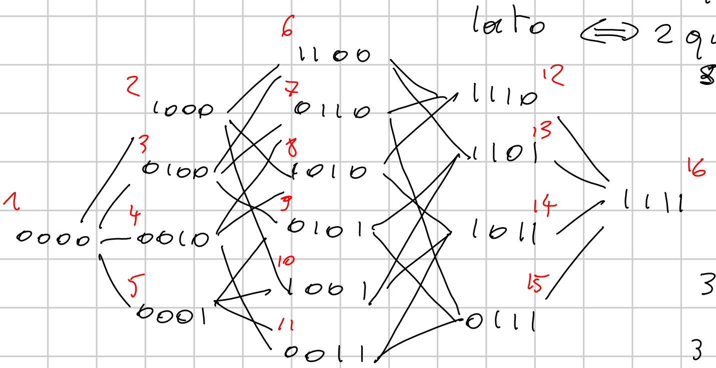
$$(x_1 \ldots x_{2n+1}, a, b)$$
$$(y_1 \ldots y_{2n+1}, a', b')$$

(a,b)	(a',b')
(0 0)	(0 0)
(0 1)	(1 0)
(1 0)	(1 1)
(1 1)	(0 1)

$(y_1 \ldots y_{2n+1})$ è la $2n+1$-upla associata a $(x_1 \ldots x_{2n+1})$ nel caso $2n+1$.

Queste 4 somme coincidono nei primi $2n+1$ elem., ma sono diverse negli ultimi 2.
Se invece poi considero coppie che non cominciano con $(x_1 \ldots x_{2n+1})$, queste saranno associate a vettori $(\tilde{y}_1 \ldots \tilde{y}_{2n+1}, a, b)$ per cui la somma differisce in qualcuna delle prime $2n+1$ componenti da $(x_1+y_1, \ldots, x_{2n+1}+y_{2n+1})$.

2n no $\to$ 2n+2 no) Grafo: vertici $\Longleftrightarrow$ quadruple di 0,1
lato $\Longleftrightarrow$ 2 quadruple diff. solo su 1 comp.



3	2	1
3	2	3
1,12	8,10	3,9
2,16	5,13	4,7
6,15		11,14

FUNZIONANO!

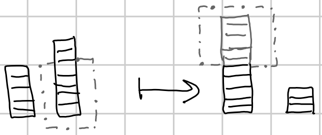
Ma allora posso usare l'induzione di $2n$ analoga a quella precedente $2n \to 2n+2$ $\Longrightarrow$

SI PUÒ $\forall n \neq 2$.

COMBINATORIA P PreIMO 2014

Titolo nota 29/05/2014

C6

mossa 

Determinare le configurazioni iniziali t.c. dopo un numero finito di mosse Alberto riesce ad ottenere un'unica pila.

Idea standard cercare un'invariante

Config. finale: $\}n$

pre-finale: $\}n/2$

pre^2-finale: $\}n/4 \quad \}n/2 \quad \vee \quad \}n/4 \quad \frac{3}{4}n$

$n = 2^e d \Rightarrow$ ogni pila di monete è multiplo intero di d

$k_1 d \quad k_2 d \quad \longleftarrow \quad k_1' \quad k_2'$ voglio mostrare che $d | k_1'$ e k_2'

$$k_1 d = 2k_1'$$
$$\underbrace{k_2 d}_{\text{altezze delle pile dopo 1 mossa}} = \underbrace{k_2' - k_1'}_{\text{'' '' prima della mossa}}$$

dato che $2 \nmid d$, ho che $d | k_1'$, $d | k_2'$

Le configurazioni non perdenti a priori sono quelle per cui $d | n_i$ dove n_i è il numero di monete sull'i-esima pila.

OSS: Se $k | n_i \ \forall i$, allora da quel momento tutte le pile conterranno un numero di monete multiplo di k. Quindi posso incollare le pile a blocchetti di dimensione k. ora posso supporre che $n = 2^e$

Ora, per far vedere che queste config. sono vincenti devo solo far aumentare il MCD degli n_i.

Ci saranno un numero pari di blocchetti di altezza dispari
- se non ce n'è nessuno, $2 \mid MCD$, posso supporre $n = 2^{e-1}$
- se ce ne sono almeno 2, li accoppio e applico la mossa su ciascuna coppia

vedo che la config. che ottengo ha tutti gli n_i pari

$k_1 = 2k_1'$ se k_1' e k_2' sono dispari,

$k_2 = k_2' - k_1'$ k_1 e k_2 diventano pari.

In questo modo l'MCD di tutti aumenta di un fattore 2 ogni volta $\Rightarrow$ arriverò ad avere una situazione in cui non posso più applicare la mossa $\Rightarrow$ 1 sola pila.

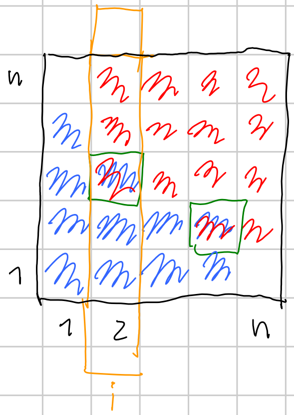
C5

$$P = \{1, \dots, n\}^k$$

TROVARE IL MAX DI $\dfrac{|A \cap B|}{|A| \cdot |B|}$ CON

A DECRESCENTE E B CRESCENTE

$K = 2$



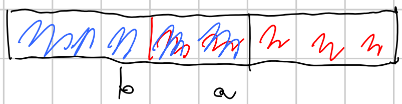
P nel caso $n = 5$

A è decrescente

B è crescente

$$\left|\frac{a-b}{a(n-b)}\right|$$

$k = 1$



<u>OSS 1</u> $A_i = \{ (x_1, \dots, x_{k-1}) \in \{1, \dots, n\}^{k-1} \mid (x_1, \dots, x_{k-1}, i) \in A \}$

$$B_i = \{(y_1, \dots, y_{k-1}) \in \{1, \dots, n\}^{k-1} \mid (y_1, \dots, y_{k-1}, i) \in B\}$$

A_i è decrescente B_i è crescente

Se $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in A_i \Rightarrow (x_1, \dots, x_{k-1}, i) \in A$

Preso $(y_1 \leq x_1, \dots, y_{k-1} \leq x_{k-1})$

Allora $(y_1, \dots, y_{k-1}, i) \underset{\text{comp. per comp.}}{\leq} (x_1, \dots, x_{k-1}, i)$

Quindi $(y_1, \dots, y_{k-1}, i) \in A \Rightarrow (y_1, \dots, y_{k-1}) \in A_i$

Analogamente per B_i

2ª oss. $A_i \supseteq A_{i+1}$ $B_i \subseteq B_{i+1}$

CONGETTURA   Con n e k viene $\frac{1}{n^k}$

ESEMPIO $A = B = P$ $\frac{|P|}{|P|^2} = \frac{1}{n^k}$

L'esempio ci sarebbe.

$$\frac{|A \cap B|}{|A| \cdot |B|} = \frac{\sum_{i=1}^n |A_i \cap B_i|}{\left(\sum_{i=1}^n |A_i|\right)\left(\sum_{i=1}^n |B_i|\right)} \overset{\text{IP. IND.}}{\leq} \frac{\frac{1}{n^{k-1}} \sum_{i=1}^n |A_i| \cdot |B_i|}{\left(\sum_{i=1}^n |A_i|\right)\left(\sum_{i=1}^n |B_i|\right)}$$

RIARR.

$$\leq \frac{\frac{1}{n^{k-1}} \frac{1}{n} \cdot \cancel{\left(\sum |A_i|\right)} \cdot \cancel{\left(\sum |B_i|\right)}}{\cancel{(\;)}\,\cancel{(\;)}} = \frac{1}{n^k}$$

$(|A_1|, \ldots, |A_n|)$ è decrescente

$(|B_1|, \ldots, |B_n|)$ è crescente

PASSO BASE

$\boxed{K=0}$ $P = \{(\ )\}$ $A = B = P$

$$\frac{1 \cdot \cdot}{1 \cdot 1} = 1 = \frac{1}{n^0}$$

$\boxed{K=1}$

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \notin A \\ 1 & \text{se } i \in A \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \notin B \\ 1 & \text{se } i \in B \end{cases}$$

$$|A \cap B| = \sum a_i b_i \qquad |A| \cdot |B| = \sum a_i \cdot \sum b_i$$

$$a_1 \geq \ldots \geq a_n \qquad b_1 \leq \ldots \leq b_n$$

——— o ——— o ———

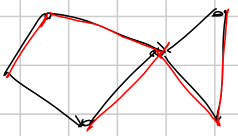
C7 n vertici grafo connesso $1 \leq K \leq n-1$, $n \geq 2$

ogni vertice ha grado $\geq K$

Allora è possibile colorare gli archi del grafo con $n-K$ colori in modo che per ogni coppia v, w di punti esiste un percorso da v a w "policromatico", ossia con archi di colori tutti diversi.

$\boxed{K=1}$ $n-1$ colori grafo è connesso

IDEA! Prendo uno "spanning tree" del grafo



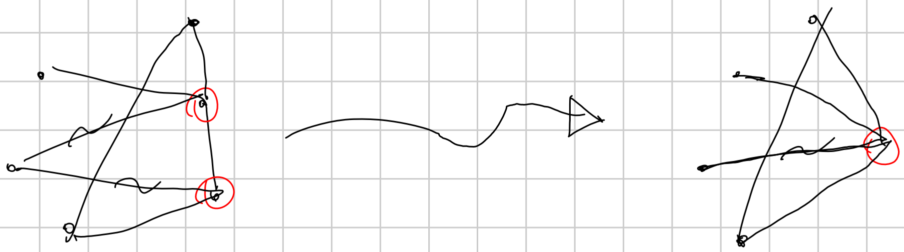
colora gli archi non più diversi ma di $n-1$ colori diversi e gli altri archi del grafo li colora a piacere

---

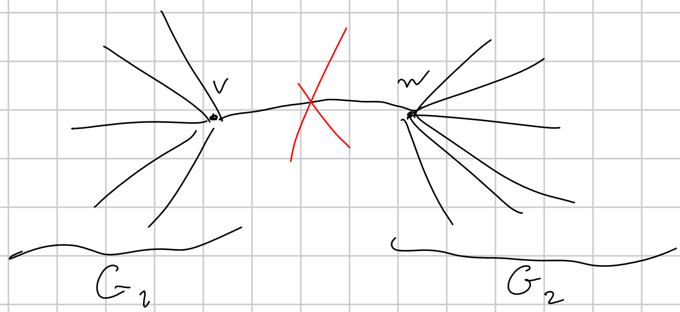
INDUZIONE MOLTO ESTESA Cerchiamo di semplificare il più possibile il grafo che ci viene dato (FORMALMENTE induzione su $V + E$)

COME SI SEMPLIFICA UN GRAFO

- TOGLIERE UNO O PIÙ VERTICI (E GLI ARCHI INCIDENTI)
- TOGLIERE UNO O PIÙ ARCHI
- COLLASSARE UNO O PIÙ VERTICI



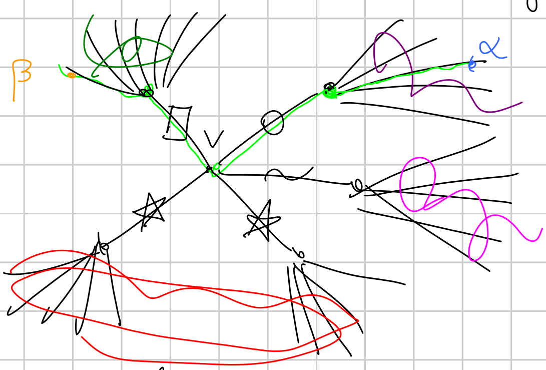
OSS. 1 Se c'è un arco che collega 2 vertici con grado $> k$, lo tolgo (e lo coloro a piacere alla fine). OCCHIO! Potrei sconnettere in 2 parti il grafo.



Su G_1 ho le ipotesi del problema

$\Rightarrow$ coloro G_1 con $|G_1|-k$ colori, G_2 con $|G_2|-k$ colori, vw con un colore nuovo (ne avrei ancora k a disposizione)

<u>OSS. 2</u> Supponiamo di avere un vertice di grado k collegato solo a vertici di grado $> k$



α, β vertici

- Se $\alpha, \beta \in G_i$, li collego dentro G_i
- Se $\alpha \in G_i$, $\beta \in G_j$ passo per V
- Se $\alpha = V$, $\beta \in G_i$ analogamente

TOGLIAMO V dal grafo. Siano $G_1, \dots, G_s$ le comp. connesse di $G \setminus \{V\}$.

Sui G_i ho le ipotesi del problema $\Rightarrow$ coloro G_i con $|G_i| - k$ colori

ho usato $\sum_{i=1}^{s} |G_i| - sk$ colori $= (n-1) - sk$

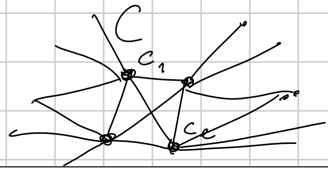
Coloro gli archi uscenti da V in base al G_i in cui arriviamo. Uso altri s colori

$$n - 1 - sk + s \overset{?}{\leq} n - k \iff (s-1)(k-1) \geq 0$$

<u>DeF</u> Una cricca in un grafo G è un insieme di vertici C tutti collegati tra loro in G

Sia C una cricca massimale di G tra quelle fatte solo da vertici di grado k

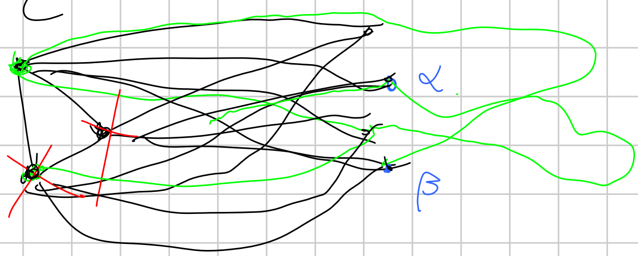
$$C = \{c_1, \dots, c_e\}$$



Ci sono due casi (suppongo $\ell \geq 2$, altrimenti termino subito)

1° caso) Le conoscenze esterne alla cricca C di ogni c_i sono sempre le stesse

$k - \ell + 1$ vertici

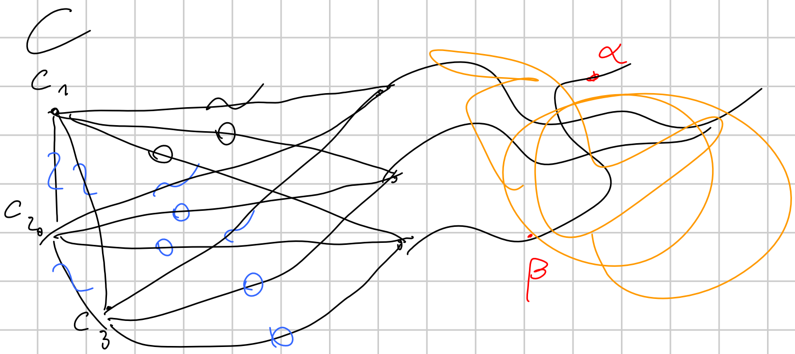


Elimino da C $s-1$ vertici. Il grafo rimane connesso. Il grado di ogni vertice rimane $\geq k-(s-1) = \underline{k-s+1}$

$G \setminus \{c_2 \dots c_\ell\}$ si colora con $n-(s-1)-\left(k-(s-1)\right)$
$= n-k$

· Se $\alpha, \beta \in C$ sono collegati da un vicino

· Se $\alpha \in C$, $\beta \notin C$ posso supporre $\alpha = c_1$

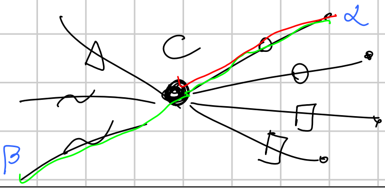


· Se $\alpha, \beta \notin C$, allora esiste un percorso in $G \setminus \{c_2, \dots c_\ell\}$

2° caso) Complessivamente i vertici di C conoscono all'esterno almeno $k-(\ell-1)+1$ altri vertici

Collassiamo C a un solo vertice

$\deg(C) \geq k-\ell+2$



Se $v \notin C$

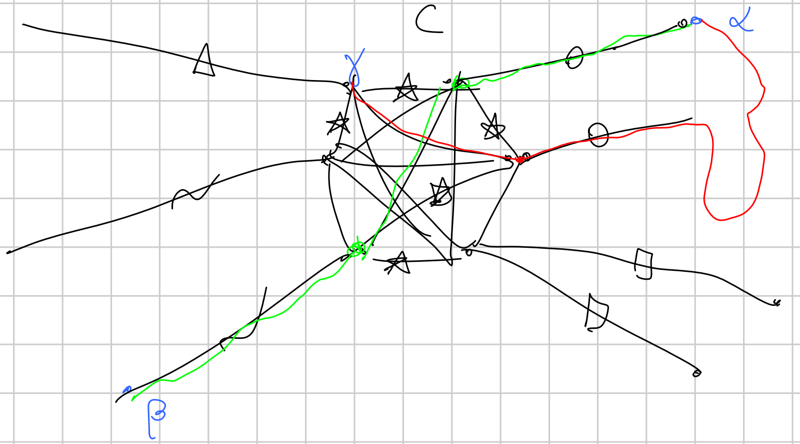
• v aveva grado $>k \Rightarrow$ ora ha grado $\geq k-\ell+2$

- v aveva grado k

allora v non conosceva tutta la cricca $\Rightarrow$ ora ha grado $\geq k - (\ell - 1) + 1$

Il nuovo grafo ha meno vertici, e si colora con

$$n - (\ell - 1) - (k - \ell + 2) = n - k - 1$$



- $\alpha, \beta \notin C$ nel grafo contratto esiste un percorso da α a β che passa al più una volta per C
- Idem se $\alpha \notin C$, $\gamma \in C$

— · — · —

Alberto può chiedere "decine" di carte, Barbara dice il valore di 1 delle 10 (su 2014). Quante carte può identificare Alberto?

x valore $\qquad A_x = \bigcap \{$decine alle quali Barbara ha risposto $x\}$

$|A_x| = 1 \Rightarrow$ quella carta ha scritto x.

$A_x = \emptyset$

$|A_x| \geq 2$

1) $\forall$ decina S, $\exists A_x \subseteq S$.

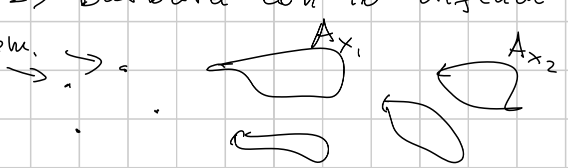
2) Se Barbara dice x, la carta con x $\in$ quella decina.

(1) WLOG, $\bigcup A_x =$ tutte le carte.

[Dimostro per induzione che se ci sono più di $3k-3$ carte e Alberto chiede k-ple, ne può indovinare almeno 1; e se sono $\leq 3k-3$ Barbara può difenderle tutte]

($\Rightarrow$ Barbara con 10 difende 27 e Alberto indovina 1987)

s elem.

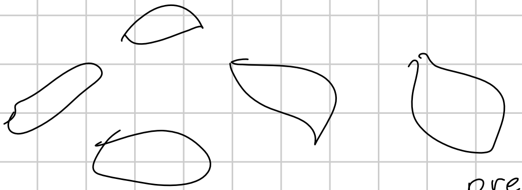


Allora Alberto può scegliere le decine k-ple che $\supset$ gli s elem.

È come se ci fossero $N-s$ carte e Alberto chiede $k-s$-ple.

$N \geqslant 3k-3$ $\quad N-s > 3(k-s) \Longrightarrow$ per induz., Alberto può indov.

Se $\forall$ decina $\exists A_x$ dentro gli A_x "coprono" le decine (k-ple)

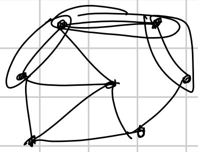


A_x coprono.

Se $|A_x| > 2$, e prendo al suo posto una coppia $\subset A_x$, ancora coprono

$\Longrightarrow$ posso supp. $|A_x| \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$, anzi, tutti $|A_x| = 2$

Lemma è impossibile coprire l'insieme delle k-ple con $3k-2$ coppie.



Grafo Vertici = carte $\quad 3k-2$
Archi = coppie $\quad 3k-2$

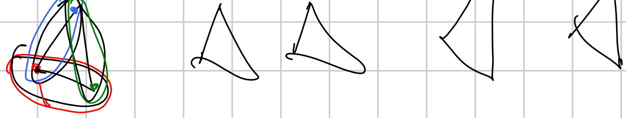
Teorema: $\exists$ insieme indip. (non colleg. da archi) di almeno $\frac{n}{1+\bar{d}}$ vertici

$n = 3k-2 \quad \bar{d} =$ grado medio $= 2$

$\frac{n}{3}$ vertici! $\left\lceil \frac{3k-2}{3} \right\rceil = k$.

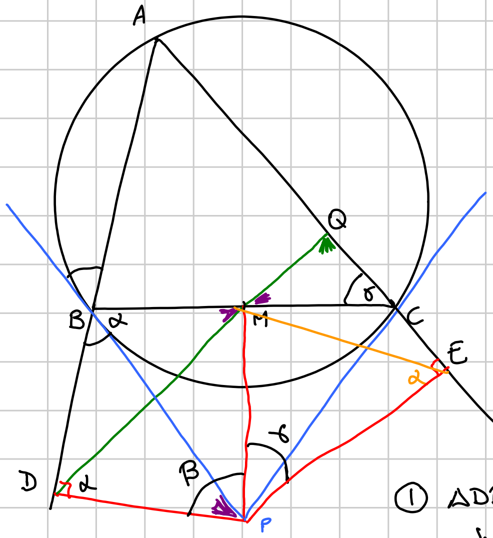
Allora Alberto chiede questi k vertici. È una k-pla che $\not\supset$ nessun A_x!

Barbara difende $3k-3$: $\quad k-1$ triangoli



PREIMO 2014 - GM

Titolo nota 26/05/2014



Tesi $\iff$ $DM \perp AE$.

$\Uparrow$

$Q\hat{M}C = 90 - \gamma$

$Q\hat{M}C = B\hat{M}D = B\hat{P}D = 90 - D\hat{B}P$

$\uparrow$ BDPM ciclico $= 90 - \gamma$

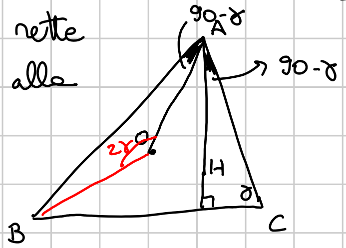
Idea alternativa: DMEP parall

Domanda: perché $AM \perp DE$?

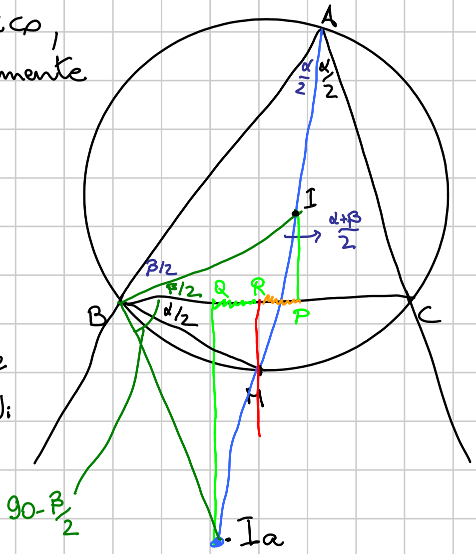
① ADPE è ciclico e il centro è il pto medio di AP

② AM e AP sono rette simmetriche rispetto alla bis di A (lemma della simmediana)

③ OA e HA sono rette simmetriche rispetto alla bisettrice



Esercizio 2 Lemma: $BICI_a$ è ciclico, con centro M; I e I_a sono diametralmente opposti.



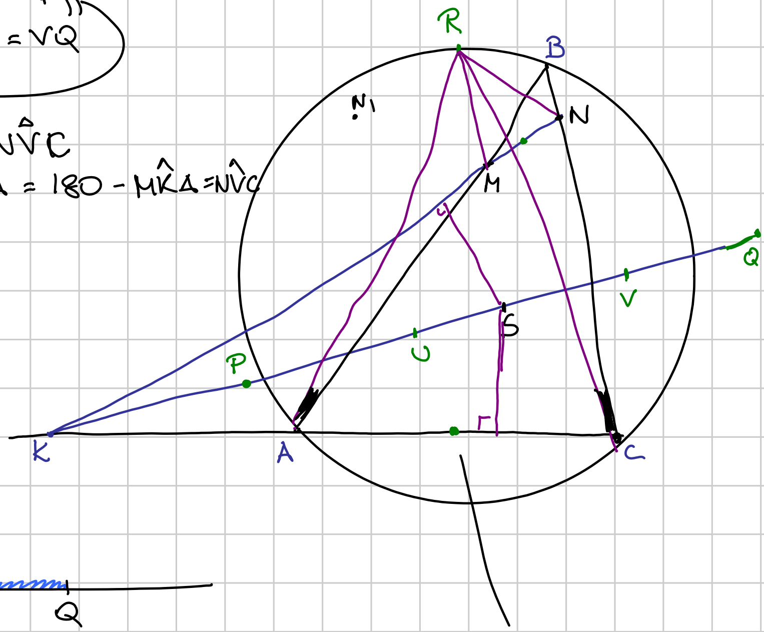
$I\hat{B}I_a = 90° = I\hat{C}I_a \Rightarrow$ ciclico

Vediamo che $BM = IM$

Altro modo: M sta sulla bisettrice di $\hat{A}$, quindi su II_a e sull'asse di BC.

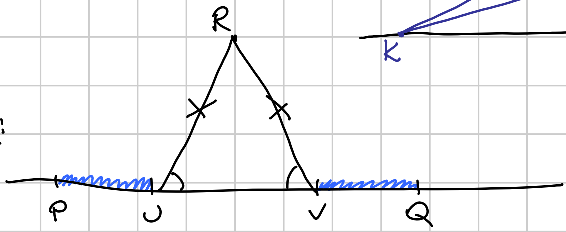
Per il lemma: $UA = UP = UM$

$VC = VN = VQ$



perché? $M\hat{U}A$ e $N\hat{V}C$ sono isosceli, $M\hat{U}A = 180 - M\hat{K}A = N\hat{V}C$ e $MA = NC$.

Oss:



$PR = QR \iff UR = VR$

$\boxed{\Leftarrow}$ i triangoli $R\hat{U}P$ e $R\hat{V}Q$ coincidono

Ci siamo ridotti a far vedere: $UR \overset{?}{=} VR$.

$R\hat{M}A$ e $R\hat{N}C$ coincidono e sono ottenuti con una rotazione di centro R. Questa rotazione manda U in V (ex: vederlo bene).

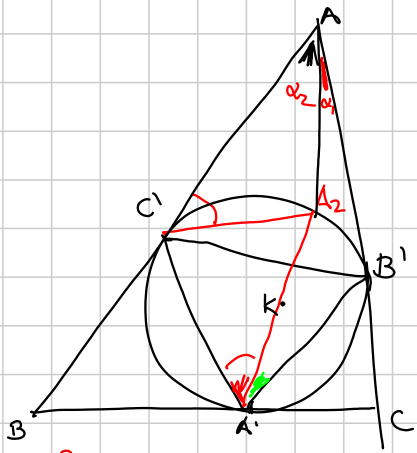
Soluzione alternativa: S pto medio di PQ, il pto medio di MN e il pto medio di AC e K sono conciclici.

$$\sin\alpha_2 = \frac{A_2C'}{AA_2} \cdot \sin A\hat{C}A_2$$

$$= \frac{2R}{AA_2} \sin^2 A_2\hat{A'}C'$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{2R}{AA_2} \cdot \sin^2 A_2\hat{A'}B'$$

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \left(\frac{\sin A_2\hat{A'}C'}{\sin A_2\hat{A'}B'}\right)^2$$

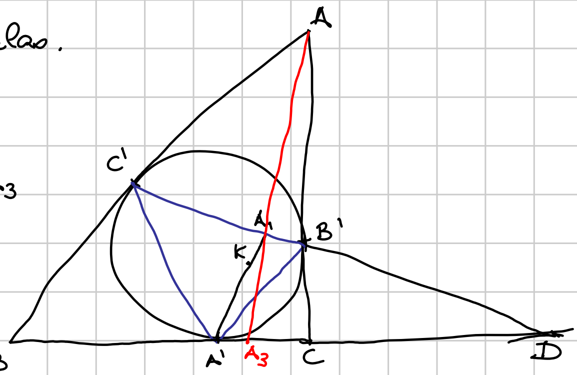


Scambiando ciclicamente A, B, C

$$\prod_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \left(\qquad\qquad \right)^2 = 1$$

Ceva trigo su A'B'C' con pto K.

Altra idea KAMR è ciclico; queste circonferenze (Γ_{KAMR} e Γ_{KCNR}) hanno lo stesso raggio (teo dei seni)



Esercizio 3: idea: usare Ceva e Menelao.

Dobbiamo calcolarci $\frac{BA_3}{A_3C}$

Menelao su $\hat{BDC'}$ con retta AA_1A_3

$$\frac{BA_3}{A_3D} \cdot \frac{DA_1}{A_1C'} \cdot \frac{C'A}{AB} = 1$$

Menelao su $B'CD$ con retta AA_1A_3

$$\frac{CA_3}{A_3D} \cdot \frac{DA_1}{A_1B'} \cdot \frac{B'A}{AC} = 1$$

$$\boxed{\frac{BA_3}{CA_3} \cdot \frac{A_1B'}{A_1C'} \cdot \frac{C'A}{B'A} \cdot \frac{AC}{AB} = 1} \quad (*)$$

Cicliche $\overset{\frown}{ABC}$

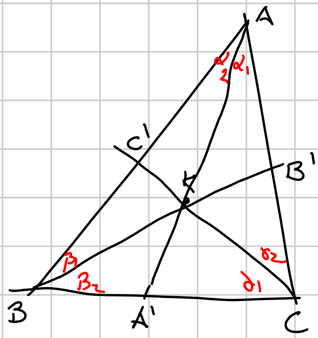
$$\frac{CB_3}{AB_3} \cdot \frac{B_1C'}{B_1A'} \cdot \frac{A'B}{C'B} \cdot \frac{BA}{BC} = 1$$

$$\frac{AC_3}{BC_3} \cdot \frac{C_1A'}{C_1B'} \cdot \frac{B'C}{A'C} \cdot \frac{CB}{CA} = 1$$

Faccio il prodotto $=1$ $=1$ $=1$

Ceva su $A'B'C'$, pto K

proprietà di A', B', C', per esempio $BA' = BC'$

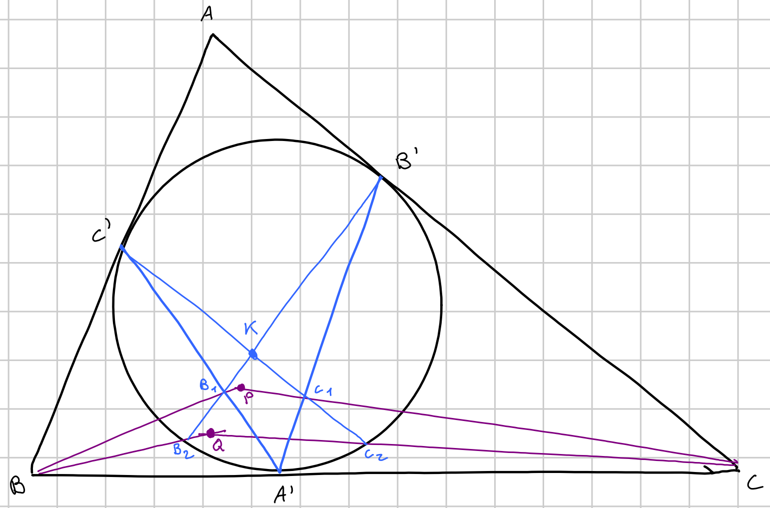


AA', BB', CC' concorrono $\Leftrightarrow$

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1$$

Altra idea: teorema dei seni su ABA_3 e AA_1C' per ottenere $(*)$



CONCORRENZA / ALLINEAMENTO:

- "informazioni metriche" $\rightarrow$ Ceva / Menelao ✓
- "punti definiti come intersezioni di qualcosa" $\rightarrow$ Desargues / Pascal

DESARGUES con triangoli $\overset{\triangle}{BB_1B_2}$ e $\overset{\triangle}{CC_1C_2}$

Th $\Leftrightarrow$ BC, B_1C_1 e B_2C_2 concorrono

e ora? $\rightarrow$ Pascal

$$\left[\begin{array}{l} x_1y_1,\ x_2y_2,\ x_3y_3 \text{ concorrono sse} \\ x_3,\ y_3 \text{ e } P = x_1y_1 \cap x_2y_2 \text{ sono allineati} \end{array}\right]$$

$W = BC \cap B_2C_2$

Th $\Leftrightarrow$ B_1, C_1 e W allineati

Pascal su $A'A'B'B_2C_2C'$

$A'A' \cap B_2C_2 = BC \cap B_2C_2 = W$

$A'B' \cap C_2C' = C_1$

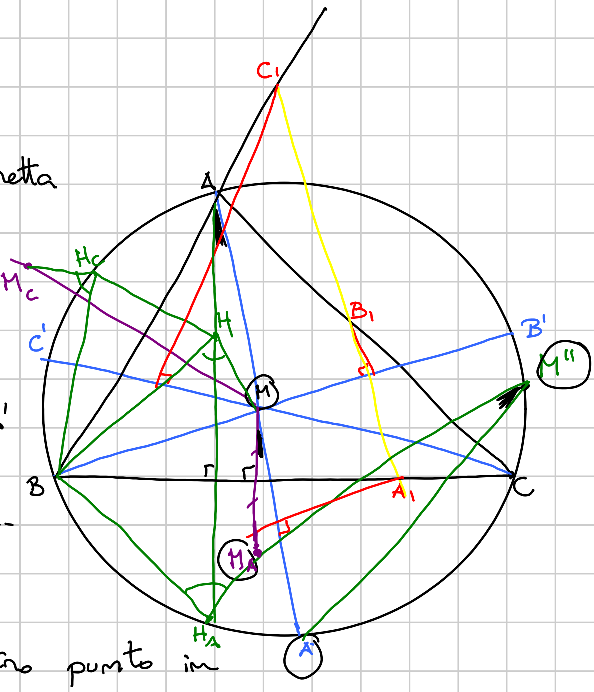
$B'B_2 \cap C'A' = C_2$

CVD

PREIMO 2014 - GP

Titolo nota 26/05/2014

Problema 7



Tesi: A_1, B_1, C_1 sono allineati.
Il simmetrico di M rispetto alla retta $A_1B_1C_1$ sta su Γ_{ABC}.

M_A simmetrico di M rispetto a BC.
Oss: A_1 è circocentro di MM_AA'

Tesi $\Leftrightarrow$ le circonf $\Gamma_{MM_AA'}, \Gamma_{MM_BB'}, \ldots$ sono coassiali $\Leftrightarrow$ M sta su tutte
le tre circonf hanno un altro punto in comune (oltre a M).

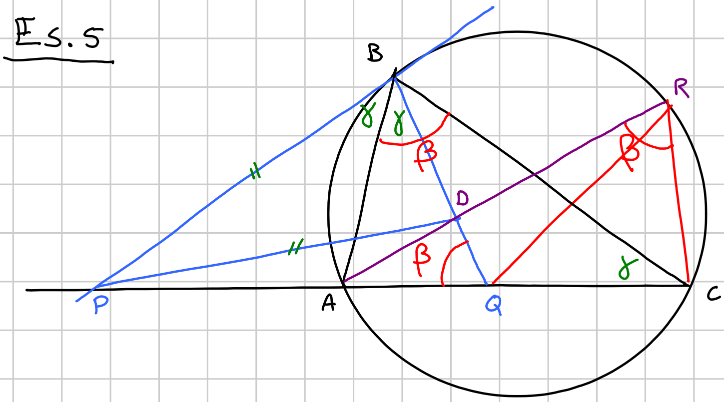
Oss: il simmetrico di H rispetto a BC sta sulla circonf circoscr.
Dalla figura pare che H_A, M_A, M' siano allineati.

Definiamo $M'' = H_AM_A \cap \Gamma$
$M''\hat{H_A}B = B\hat{H}M = B\hat{H_C}M_C$
Segue che $M''H_CM_C$ sono allineati

Per concludere, basta far vedere che $M'' \in \Gamma_{MM_AA'}$

Titolo nota 26/05/2014

Es. 5



Th : $BQ = QR$

Sol 1 → dim che $BQ = QR$

$A\overset{\Delta}{Q}B \sim A\overset{\Delta}{B}C \rightarrow \frac{BQ}{AB} = \frac{BC}{AC} \rightarrow BQ = \frac{a \cdot c}{b}$

calcoliamo QR

Oss → DQCR ciclico ($A\hat{R}C = A\hat{B}C = A\hat{Q}B$)

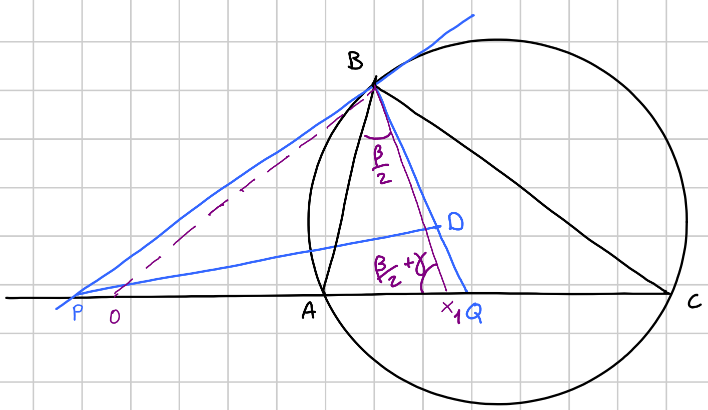
$A\overset{\Delta}{D}C \sim A\overset{\Delta}{Q}R \longrightarrow \frac{QR}{AQ} = \frac{CD}{AD} \rightarrow QR = AQ \cdot \frac{CD}{AD}$

$\frac{AQ}{AB} = \frac{AB}{AC} \rightarrow AQ = \frac{c^2}{b}$

Th $\Leftrightarrow \frac{a \cdot c}{b} = \frac{c^2}{b} \cdot \frac{CD}{AD} \Leftrightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{a}{c}$

Th $\Leftrightarrow$ D sta sulla cfr di Apollonio che passa per B, x_1, x_2

(x_1, x_2 : piedi delle bisettrici da B)



O centro della circonferenza

OBx_1 isoscele

$x_1\hat{B}O = \frac{\beta}{2} + \gamma$

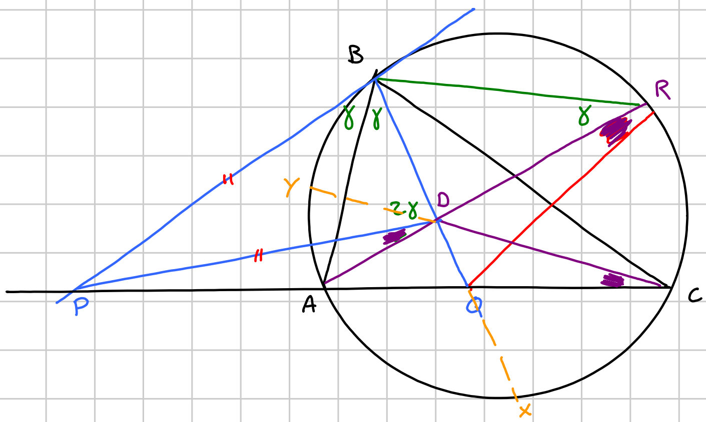
$A\hat{B}O = \gamma$

$A\hat{B}P = \gamma$ (ipotesi)

$O \equiv P$

$PB = PD$ per ipotesi

c.v.d.



Sol 2 $\rightarrow$ $Q\hat{B}R = Q\hat{R}B$

Oss 1 $\rightarrow$ DQCR ciclico

Oss 2 $\rightarrow$ $P\overset{\triangle}{A}D \sim P\hat{D}C$

[- PB tangente
- $PB^2 = PA \cdot PC$
- $PD^2 = PA \cdot PC$]

$Q\hat{B}R = A\hat{D}B - D\hat{R}B = 2\gamma + P\hat{D}A - \gamma = \gamma + P\hat{D}A$

$Q\hat{R}B = \gamma + Q\hat{R}D$

Th $\Leftrightarrow$ $P\hat{D}A = Q\hat{R}D$

$(P\hat{D}A \underset{\text{oss 2}}{=} Q\hat{C}D \underset{\text{oss 1}}{=} Q\hat{R}D)$

CVD

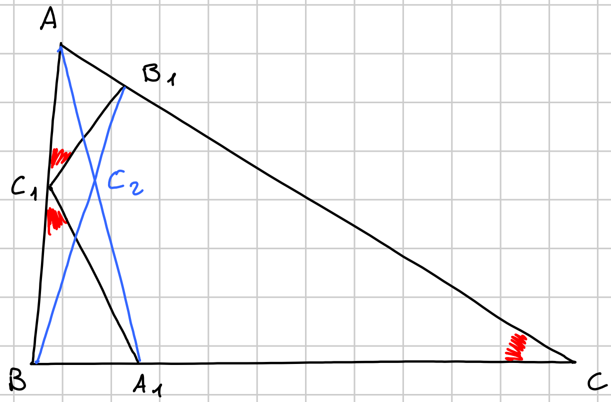
[altra sol

$x = BD \cap \Gamma$

$y = CD \cap \Gamma$

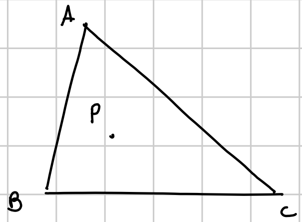
xyR isoscele e simile a BQR]

Es 6



SOL 1 (CONTI)

COORDINATE BARICENTRICHE



$$P = \big[\lambda[BPC], \lambda[APC], \lambda[APB]\big] \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$$

$$r:\quad \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0$$

$$P = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] \qquad Q = [\mu_1, \mu_2, \mu_3]$$

$$r_{PQ}:\quad (\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)x + (\lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3)y + (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)z = 0$$

$$r_1:\quad \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0 \qquad r_2:\ \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z = 0$$

$$W = r_1 \cap r_2 = [\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2, \ldots, \ldots]$$

$$A = [1, 0, 0] \quad B = [0, 1, 0] \quad C = [0, 0, 1]$$

$$BC_1 = u \qquad AC_1 = v \qquad (u + v = c)$$

$$C_1 = [u, v, 0]$$

$$\overset{\Delta}{BC_1A_1} \sim \overset{\Delta}{B_1C_1A} \sim \overset{\Delta}{BCA}$$

$$BA_1 = BC_1 \cdot \frac{c}{a} = \frac{uc}{a} \qquad CA_1 = a - BA_1 = a - \frac{uc}{a} = \frac{a^2 - uc}{a}$$

$$A_1 = [0, a^2 - uc, uc]$$

analogamente $\rightarrow B_1 = [b^2 - vc, 0, vc]$

calcolo r_{AA_1}

$$\begin{array}{ccc} 0 & a^2-\mu c & \mu c \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$r_{AA_1}: \quad 0 \cdot x + (\mu c)\, y + (-(a^2-\mu c))\, z = 0$$

$$-\mu c\, y + (a^2-\mu c)\, z = 0$$

$$r_{BB_1}: \quad -\nu c\, x + (b^2-\nu c)\, z = 0$$

calcolo C_2

$$\begin{array}{ccc} 0 & -\mu c & a^2-\mu c \\ -\nu c & 0 & b^2-\nu c \end{array}$$

$$C_2 = \left[-\mu c\,(b^2-\nu c),\ -\nu c\,(a^2-\mu c),\ -\mu\nu c^2\right] =$$

$$= \left[\mu\,(b^2-\nu c),\ \nu\,(a^2-\mu c),\ \mu\nu c\right]$$

calcolo $r_{C_1C_2}$

$$\begin{array}{ccc} \mu & \nu & 0 \\ \mu(b^2-\nu c) & \nu(a^2-\mu c) & \mu\nu c \end{array}$$

$$r_{C_1C_2}: \quad (\mu\nu^2 c)\, x + (-\mu^2\nu c)\, y + \left[\mu\nu\,(a^2-\mu c) - \mu\nu\,(b^2-\nu c)\right] z = 0$$

$$r_{C_1C_2}: \quad (\nu c)\, x + (-\mu c)\, y + (a^2-b^2-\mu c+\nu c)\, z = 0$$

"PASSAGGIO LOSCO"

$$\begin{array}{lccc} r_{\mu=0}: & c^2 & 0 & a^2-b^2+c^2 \\ r_{\nu=0}: & 0 & -c^2 & a^2-b^2-c^2 \end{array}$$

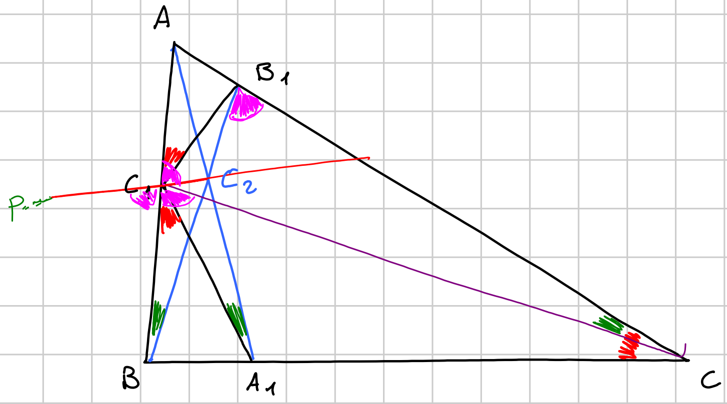
$$P = \left[c^2(a^2-b^2+c^2),\ -c^2(a^2-b^2-c^2),\ -c^4\right] =$$

$$= \left[a^2-b^2+c^2,\ b^2-a^2+c^2,\ -c^2\right]$$

$$\nu c\,(a^2-b^2+c^2) - \mu c\,(b^2-a^2+c^2) - c^2\,(a^2-b^2+\nu c-\mu c) \overset{?}{=} 0$$

$$\nu c a^2 - \nu c b^2 + \nu c^3 - \mu c b^2 + \mu c a^2 - \mu c^3 - a^2c^2 + b^2c^2 - \nu c^3 + \mu c^3 \overset{?}{=} 0$$

SOL 2 (sintetica, Sala)



BC_1B_1C ciclico

ACA_1C_1 ciclico

$C_1\hat{B}B_1 = C_1\hat{C}B_1 = C_1\hat{A}_1C_2$

$BA_1C_2C_1$ ciclico

$AB_1C_2C_1$ ciclico

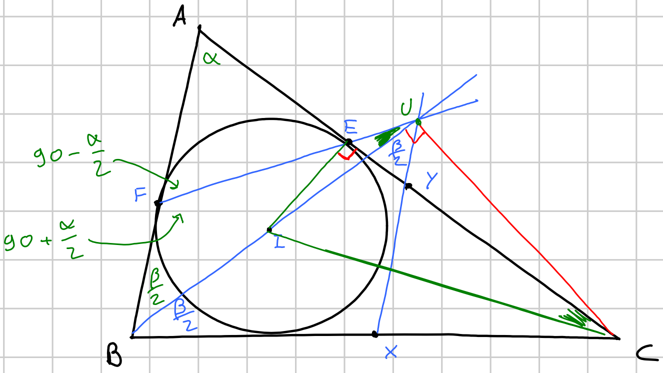
definisco P simmetrico di C rispetto AB

voglio dimostrare che P, C_1, C_2 allineati

DIM

$A\hat{C}_1C_2 = B\hat{B}_1C = B\hat{C}_1C = B\hat{C}_1P$

$\Rightarrow C_1, C_2, P$ allineati



PUNTO 1 → baricentriche
↘ sintetica

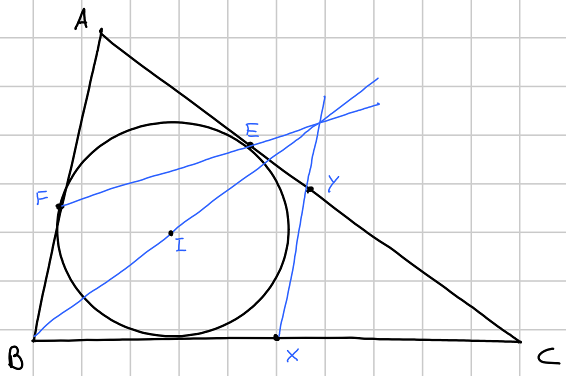
$U \overset{def}{=} EF \cap BI$ Th ⟺ X, Y, U allineati

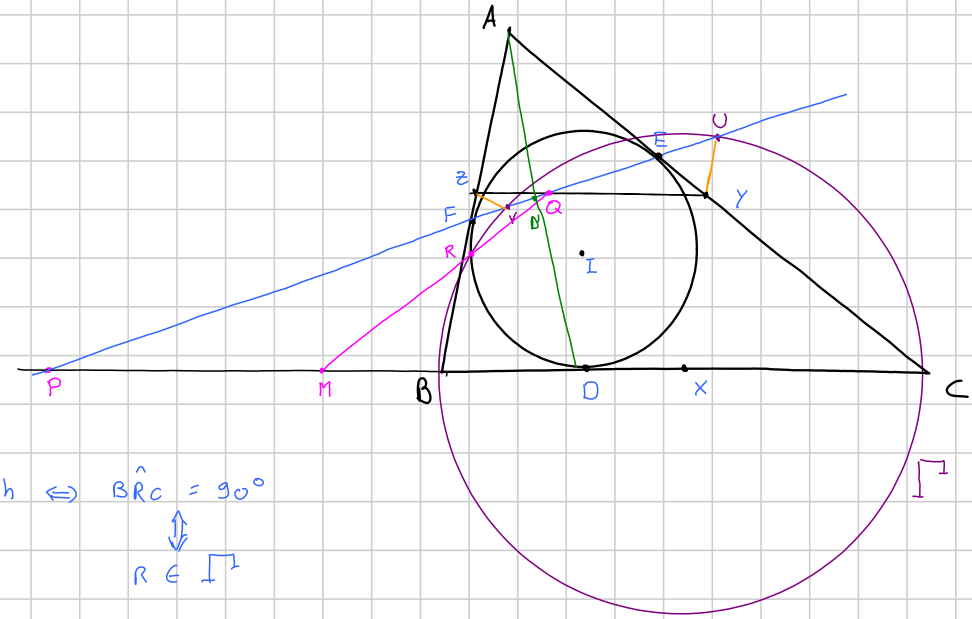
$E\hat{U}I = 180 - (90 + \frac{\alpha}{2}) - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2} = I\hat{C}E$

ICUE ciclico → $I\hat{U}C = B\hat{U}C = 90° \to U \in \Gamma$

(Γ cfr diametro BC)

$B\hat{X}U = 180 - \beta = B\hat{X}Y$ CVD





Th $\iff B\hat{R}C = 90°$

$\Updownarrow$

$R \in \Gamma$

GUESS : QM asse radicale di ω e Γ

(se è vero implica la tesi)

$M \in$ asse radicale

$\Updownarrow$

$MD^2 = MB \cdot MC \iff$ B e C inversi rispetto alla cfr di diametro PD

$\Updownarrow$

$[D' = AD \cap EF]$

$(P, D', F, E) = -1 \iff (P, D, B, C) = -1$

lemma della polare $\longrightarrow \Updownarrow$

$D' \in pol_\omega(P)$

$\begin{cases} D \in pol_\omega(P) \ \checkmark \\ A \in pol_\omega(P) \iff P \in pol_\omega(A) \ \checkmark \end{cases}$

$AD = pol_\omega(P)$

$Q \in$ asse radicale

$\Updownarrow$

$QF \cdot QE = QU \cdot QV \iff \dfrac{QF}{QU} = \dfrac{QV}{QE}$

$$\left[\begin{array}{ll} \dfrac{QV}{QE} = \dfrac{QZ}{QY} & (\triangle QZV \sim \triangle QYE) \\ \dfrac{QZ}{QY} = \dfrac{QF}{QU} & (\triangle QFZ \sim \triangle QYU) \end{array} \right]$$

PREIMO 2014 — N (Mattia)

Titolo nota 28/05/2014

$$\frac{xy^3}{x+y} = p^3 \qquad xy^3 = p^3(x+y)$$

$(x,y)=d$, $x=da$, $y=db$ $(a,b)=1$.

$$d^4ab^3 = dp^3(a+b) \qquad d^3ab^3 = p^3(a+b)$$

$(ab^3, a+b)=1$ Quindi $ab^3 \mid p^3$.

Quindi $b=1$ o $b=p$

Caso 1 $b=1$ $a \mid p^3$ $d^3a = p^3(a+1)$

1a) $p \mid d$ $\left(\frac{d}{p}\right)^3 = \frac{a+1}{a} \Rightarrow a=1$ $\left(\frac{d}{p}\right)^3 = 2$ $d^3 = 2p^3$

IMPOSSIBILE.

1b) $p \nmid d \Rightarrow p^3 \mid a \Rightarrow a = p^3$

$d^3 \cdot p^3 = p^3(p^3+1)$ $d^3 = p^3+1$ IMPOSSIBILE

Caso 2 $b=p$, $a=1$.

$d^3 = p^3 = p^3(1+p)$ $d^3 = 1+p$

$d^3-1=p$ $d^3-1 = (d-1)(d^2+d+1) = p$.

$\overset{\shortparallel}{1}\overset{\shortparallel}{p}$

$d=2$ $p=7$

$x = a\cdot d = 2$ $y = bd = 14$.

Es. 2 $1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_n \le 50$

Condizione: Dati $b_1,\dots,b_n$ $\exists\, m, c_1,\dots,c_n$ con $c_i^{a_i} = mb_i$.

Oss. $(a_i,a_j)=1$ $\forall i\neq j$ Se no, supponiamo

$a_1 = du$, $a_2 = dv$ $d>1$.

Posso scegliere, per esempio, $b_1=1$ $b_2=2$.

$(c_1^u)^d = m$ $(c_2^v)^d = 2m$ IMPOSSIBILE

Cerco m della forma $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$,
dove $p_1, \dots, p_k$ sono tutti i fattori primi di $a_1, \dots, a_n$.

$c_i^{a_i} = m\, b_i$ $\qquad b_i = p_1^{\beta_{i,1}} \cdots p_k^{\beta_{i,k}}$ $\qquad \beta_{i,k} \geq 0$

$\longrightarrow \beta_{i,1} + \alpha_1 \equiv 0 \pmod{a_1} \quad \dots \quad \beta_{n,1} + \alpha_1 \equiv 0 \pmod{a_n}$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

$\longrightarrow \beta_{i,k} + \alpha_k \equiv 0 \pmod{a_1} \quad \dots \quad \beta_{n,k} + \alpha_k \equiv 0 \pmod{a_n}$

CRT $\to \exists$ sol

\# primi $\leq 50 = 15$.
Con 16 $\quad a_i = p, 1 \quad$ eccetto

$$\left.\begin{array}{lll} p=2 & 2,4,8,16,32 & 5 \text{ pos.} \\ p=3 & 3,9,27 & 3 \text{ pos.} \\ p=5 & 5,25 & 2 \text{ pos.} \\ p=7 & 7,49 & 2 \text{ pos.} \end{array}\right\} \quad 60 \text{ pos.}$$

Es. 3 (Da usare: LTE) $\quad p > 2$

$\alpha \geq 1 \quad p^{\alpha} \parallel A^B + 1 \implies p^{\alpha + v_p(m)} \parallel A^{Bm} + 1$

Tesi: $\left((n-1)^n + 1\right)^2 \mid n(n-1)^{(n-1)^n + 1} + n \qquad$ (n dispari)

Consideriamo $p \mid (n-1)^n + 1$.

Oss. $n \mid (n-1)^n + 1$

1° caso $p \mid n$, $\quad p^{\alpha} \parallel n \qquad (n-1)^1 + 1 = n$

$v_p(\text{LHS}) = 2(v_p(n) + v_p(n)) = 4\alpha$.

$v_p(\text{RHS}) = v_p(n) + v_p\left[(n-1)^{(n-1)^n + 1} + 1\right]$

$= v_p(n) + v_p(n) + 2v_p(n) = 4\alpha$.

2° caso $p \nmid n \quad p^{\alpha} \parallel (n-1)^n + 1 \qquad v_p(\text{LHS}) = 2\alpha$

A destra conta solo $\quad (n-1)^{(n-1)^n+1}+1$

$n \mid (n-1)^n+1$

$$v_p\left[(n-1)^{(n-1)^n+1}+1\right] = v_p\left((n-1)^n+1\right) + v_p\left((n-1)^n+1\right) - v_p(n)$$
$$= \alpha + \alpha - 0 = 2\alpha$$

Esercizio 4 Dato $k \geq 2$ Trovare $a_1, a_2, \ldots$ t.c. $\forall m \geq 1$ $a_m \geq 3$ dispari
$t(a_1 \ldots a_m) = k$

Esempio $\dfrac{2^k-1}{2-1} = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1$ ha k cifre 1

$$\frac{2^{ak}-1}{2^a-1} = 2^{a(k-1)} + 2^{a(k-2)} + 2^a + 1 \quad ''$$

$$a_m = \frac{a_1 \ldots a_m}{a_1 \ldots a_{m-1}} = \frac{b_m}{b_{m-1}} = (\text{tentativo}) = \frac{2^{ak}-1}{2^a-1} \cdot \frac{2^b-1}{2^{bk}-1}.$$

Oss $\left(2^c-1, 2^d-1\right) = 2^{(c,d)}-1.$
$\left(x^c-1, x^d-1\right) = x^{(c,d)}-1.$

$$b_m = \frac{2^{(k+1)^m k}-1}{2^{(k+1)^m}-1} \qquad a = (k+1)^m$$

$$a_m = \frac{b_m}{b_{m-1}} = \frac{2^{(k+1)^m k}-1}{2^{(k+1)^m}-1} \cdot \frac{2^{(k+1)^{m-1}}-1}{2^{(k+1)^{m-1}k}-1}$$

$$\left(2^{(k+1)^m}-1,\ 2^{(k+1)^{m-1}\cdot k}-1\right) = 2^{(k+1)^{m-1}}-1$$

DIVISIBILITA' OK.

2^a parte $\exists N$ t.c. $\forall m > N$ $\quad t(3 \cdot 5 \ldots (2m+1)) > k$

Basta vedere che $t\left(n(2^r-1)\right) \geq r$.

Induzione su n:

$n=1$ ovvio.

$n>1$

1° caso: n pari $\quad t\left(n(2^r-1)\right) = t\left(\frac{n}{2}(2^r-1)\right) \geq r.$

2° caso: n dispari $\quad n = 2j+1.$

$t\left((2j+1)(2^r-1)\right)$ $\qquad 2j+1 = 2j+2-1$

$= t\left((2j+2)(2^r-1) - 2^r + 1\right) = t\left(\underbrace{(2j+2)(2^r-1)-2^r}\right) + 1$

PARI PARI

$t(a-2^r) \geq t(a)-1$ con $a > 2^r$

$\geq t\left((2j+2)(2^r-1)\right) - 1 + 1$

$= t\left((j+1)(2^r-1)\right) \geq r.$

PREIMO 2014 — N — Pomeriggio

Titolo nota 28/05/2014

$\boxed{N5}$ Molteplicità m di 1 in $f(x)$: vuol dire

$f(1)=0 \quad f'(1)=0, \dots, f^{(m-1)}(1)=0 \quad f^{(m)}(1)\neq 0$.

$f(1) =$ ovvio $\qquad f(1) = \sum a_i = 0$

$f(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_{p-1} x^{p-2}$

$f'(x) = a_2 + 2a_3 x + \dots + (p-2)\, a_{p-1} x^{p-3}$

$f'(1) = a_2 + 2a_3 + (p-2) a_{p-1} = \sum_{i=1}^{p-1} (i-1) a_i$

$= \sum_{i=1}^{p-1} i a_i - \sum_{i=1}^{p-1} a_i = f(1) = 0$.

$Q =$ residui quadratici, $\quad N =$ non residui quadratici

$\sum_{i=1}^{p-1} i a_i = \sum_{i\in Q} i - \sum_{i \in N} i$.

$\frac{p(p-1)}{2} = \sum_{i \in Q} i + \sum_{i\in N} i \qquad$ SOMMA PARI $\Rightarrow \frac{p-1}{2}$ pari cioè $p \equiv 1$ (mod 4)

$p \equiv 3\ (4) \Rightarrow f'(1) \neq 0$

$p \equiv 1\ (4) \qquad -1 = \square$

Nella somma ci sono coppie $\{i, p-i\}$ entrambi in Q / ... in N

che sommate insieme danno p

n° coppie $= \frac{p-1}{4}$ (quadrati) $+ \frac{p-1}{4}$ non quadrati.

SI ANNULLANO

$p \equiv 5 \pmod 8 \Rightarrow p \equiv 1 \pmod 4 \quad f'(1) = 0 \quad (x-1)^2 \mid f(x)$

Oss. $p \equiv 5 \pmod 8 \quad \left(\frac{2}{p}\right) = -1$

Divido Q in Q^+ e Q^-, N in N^+ e N^-

$Q^+ = \{i \in Q \mid i > \frac{p}{2}\} \quad Q^- \{i \in Q \mid i < \frac{p}{2}\}$

N^+, N^- analoghi.

$r \to p-r \qquad Q^+ \to Q^- \qquad N^+ \to N^-$

$$\sum_{r\in Q^+} r^2 = \sum_{r\in Q^-} (p-r)^2 = \frac{p^2(p-1)}{4} - 2p\sum_{r\in Q^-} r + \sum_{r\in Q^-} r^2$$

$$\sum_{r\in Q} r^2 = \frac{p^2(p-1)}{4} - 2p\sum_{r\in Q^-} r + 2\sum_{r\in Q^-} r^2 .$$

e analoga per N.

$r \to 2r \qquad Q_- \to N_{pari}$

$r \to p-2r \qquad Q_- \to N_{dispari}$

$$\sum_{r\in N} r^2 = \sum_{r\in Q^-} (2r)^2 + \sum_{r\in Q^-} (p-2r)^2$$

$$= \frac{p^2(p-1)}{4} - 4p\sum_{r\in Q^-} r + 8\sum_{r\in Q^-} r^2 .$$

Combinando, si ottiene (verificare)

$$\sum_{r\in Q} r^2 - \sum_{r\in N} r^2 = 2p\sum_{r\in Q^-} r - 6\sum_{r\in Q^-} r^2 \quad \leftarrow \circledast$$

e anche $$= -2p\sum_{r\in N^-} r + 6\sum_{r\in N^-} r^2 . \quad \circledast\circledast$$

Supponiamo $f''(1)=0$ (assurdo: mult ≥ 3)

$$f''(1) = \sum_{i=1}^{p-1} (i-1)(i-2)a_i = \boxed{\sum_{i=1}^{p-1} i^2 a_i} - \underbrace{3\sum_{i=1}^{p-1} i a_i}_{=0} + \underbrace{2\sum_{i=1}^{p-1} a_i}_{=0}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p-1} i^2 a_i} = \sum_{i\in Q} i^2 - \sum_{i\in N} i^2$$

$f''(1)=0 \iff \sum_{i\in Q} i^2 = \sum_{i\in N} i^2$

Uguagliando a zero $\circledast$ e $\circledast\circledast$ e mettendolo nelle formule precedenti, troviamo

$$\sum_{r\in Q} r^2 = \frac{p^2(p-1)}{4} - \frac{4}{3}p\sum_{r\in Q^-} r$$

$$= \frac{p^2(p-1)}{4} - \frac{4}{3}p\sum_{r\in N^-} r$$

da cui $$\sum_{r\in Q^-} r = \sum_{r\in N^-} r$$

$$\sum_{r\in Q^-\cup N^-} r = \sum_{r<\frac{p}{2}} r = \frac{p^2-1}{8} \to \text{dispari}$$

$p = 8k+5 \qquad p^2-1 = 64k^2+80k+24 \qquad$ ASSURDO

$\boxed{N6}$ (I divisori primi di $\left(\prod_{p\in A} p\right)-1$ appartengono a M

$A \subsetneq M$ $M \subseteq$ primi)

Oss $2 \in M$ $A=\{p\}$ $p\neq 2$ $2 \mid p-1$

Supponiamo M finito, $M=\{2,p_2,\dots,p_k\}$ $P=\prod_{p\in M} p$

$A=\{2,p_3,\dots,p_k\}$ $2p_3\cdots p_k-1 = \frac{P}{p_2}-1 = p_2^{\alpha}$ (1)

$A'=\{p_3,\dots,p_k\}$ $p_3\cdots p_k-1 = \frac{P}{2p_2}-1 = 2^{\beta}p_2^{\gamma}$. (2)

$P = 2p_2(2^{\beta}p_2^{\gamma}+1) = p_2^{\alpha+1}+p_2$

$2^{\beta+1}p_2^{\gamma}+2 = p_2^{\alpha}+1$

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ $2\equiv 1 \pmod{p_2}$ ASSURDO.

(verificare i casi rimanenti)

$2, p_1, p_2$ $p \equiv \pm 1 \mod (3)$

$A\{p\}$ $A\{2,p\}$

$p-1$ $2p-1$

$M\{2,3,\dots p_k\}$ $\frac{P}{2}-1=2^k$ $\frac{P}{3}-1=3^m$

$2^{k+1}+2=3^{m+1}+3$

$2^{k+1}-3^{m+1}=1$

$2,3\in M$ $2\cdot 3-1=5 \longrightarrow 5\in M$

$3\cdot 5-1=14 \longrightarrow 7\in M$

$3\cdot 5\cdot 7\cdot(\text{tutti gli altri})-1=2^k$

Rimane il caso M infinito. $M = \{2, p_2, p_3, \dots\}$

Assurdo: $\exists\, q \notin M$

$2, \quad 2p_2, \quad 2p_2p_3, \dots \quad \bmod q.$

$\Rightarrow$ ce ne sono due uguali

$$2p_2p_3\cdots p_i \equiv 2p_2p_3\cdots p_i p_{i+1}\cdots p_j \pmod q$$

$$\underbrace{2p_2p_3\cdots p_i}_{q \text{ non divide}} \underbrace{(p_{i+1}\cdots p_j - 1)}_{q \text{ divide}} \equiv 0 \pmod q$$

$\boxed{q \in M}$ ASSURDO.

$\boxed{N7}$ Partenza: trovare $N, 2N$ che siano entrambi somme di quadrati distinti.

(+ un'altra condizione, da vedere dopo).

$N = 29 = 5^2 + 2^2 \qquad 2N = 58 = 7^2 + 3^2$

$$M = \sum_{k=0}^{4N-2} (2kN+1)^2$$

Tesi: $P > M \Rightarrow P$ è somma di quadrati distinti

$(N = a_1^2 + \dots + a_m^2, \quad 2N = b_1^2 + \dots + b_n^2) \quad \Leftarrow$

Divido P per $4N$, $\quad P = 4Nq + r \qquad 0 \le r \le 4N-1$

$$\sum_{k=0}^{r-1} (2kN+1)^2 \equiv r \pmod{4N}$$

Se $r \geq 1 \qquad P = \underbrace{\sum_{k=0}^{r-1} (2kN+1)^2}_{\text{quadrati distinti}} + 4Nt$

(se $r = 0$ pongo $P = 4Nt$)

Scrivo t in base 2 (divido esponenti pari e dispari)

$$t = \sum_i 2^{2\lambda_i} + \sum_j 2^{2\mu_j+1}$$

$$P = \sum_{k=0}^{r-1} (2kN+1)^2 + 4\left(\sum a_k^2\right)\left(\sum (2^{\lambda_i})^2\right) + \left(\sum b_s^2\right) \cdot 4 \sum (2^{\mu_j})^2$$

(Uso $4N = 2N \cdot 2$:

Distinti? Basta che fra i rapporti

$a_r / a_{r'}$ $\quad b_s / b_{s'}$ $\quad a_r / b_s$ $\quad b_s / a_r$ non ci

siano potenze di 2

$\boxed{N8}$ Si cercano (a, b, c) tali che $a^n + 2^n \mid b^n + c \quad \forall n > 0$

Qualche condizione necessaria:

voglio che $\quad b^n + c \equiv 0 \quad (a^n + 2^n) \Rightarrow b^n \equiv -c \quad b^{3n} \equiv -c^3$

$b^{3n} + c \equiv 0 \quad (a^{3n} + 2^{3n}) \Rightarrow b^{3n} + c \equiv 0 \quad (a^n + 2^n)$

$$c^3 \equiv c \quad (\text{mod } a^n + 2^n)$$

$$c^3 - c = c(c+1)(c-1) \equiv 0 \quad (\text{mod } a^n + 2^n)$$

n grande $\Rightarrow c(c+1)(c-1) = 0 \qquad c = 0, 1$

$\boxed{c=0}$ $\quad a = 2 \qquad a^n + 2^n = 2^{n+1} \qquad$ vorrei che $2^{n+1} \mid b^n$

Basta che $b = 4k \quad \rightarrow$ soluzioni

$a = 2, \ b = 4k, \ c = 0 \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Supponiamo $a \neq 2$. Osservo che l'insieme dei primi che dividono $a^n + 2^n$ è infinito. (questo conclude che è impossibile)

- a pari, $a = 2a_1$ $\qquad a^n + 2^n = 2^n (a_1^n + 1)$

$$\left(a_1^{2^k} + 1, \ a_1^{2^\ell} + 1 \right) \mid 2$$

- a dispari $\qquad \left(a^{2^r} + 2^{2^r}, \ a^{2^s} + 2^{2^s} \right) = 1$

Ne segue che questo caso non dà soluzioni.

$\boxed{c=1}$ $\quad a$ non può essere pari

(se no $\quad a^2 + 2^2 \mid b^2 + 1$, impossibile mod 4)

Quindi a dispari e $2a \neq \square$

$$2a = \ell^2 p_1 \cdots p_t \qquad (t \geq 1)$$

$$b = m^2, \quad b = p_k p_{k+1} \cdots p_{t+s} m^2$$

$p_1 \ p_2 \ p_k \cdots p_t$

$p_k \cdots p_t \cdots p_{t+1}$ $\quad \|$

Scopo: trovare un primo p^* tale che $*$ dispari

$$\left(\frac{2a}{p}\right) = -1 \qquad \left(\frac{b}{p}\right) = 1$$

$$(2a)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p} \qquad 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

$$2^{\frac{p-1}{2}} + a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p}$$

$$p \mid 2^n + a^n \quad \text{per } n = \frac{p-1}{2}$$

$$b^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p} \qquad b^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

$\Rightarrow$ IMPOSSIBILE

$$\left(\frac{p\,?}{p}\right) = -1 \qquad \left(\frac{p\,5}{p}\right) = 1$$

Conclusione: Le uniche soluzioni sono

$$(a, b, c) = (2, 4k, 0) \qquad k \in \mathbb{Z}.$$