A5 (già visto)

$$f(x+y)+y \le fff(x)$$

$$\boxed{y = ffx - x}$$

$$\cancel{ff}f(x) \le \cancel{ff}f(x) - ffx + x$$

$$\boxed{x \geq ffx}$$

non $fx \geq f(ffx)$

ma $y \geq ffy$ con $y = fx$

$$f(x+y)+y \le fff\,x \le f\,x$$

$$(*) \quad f(x+y)+y \le f\,x$$

Giocando un po' si congettura che $f(x) = c - x$

$x=0$ in $(*) \Rightarrow$ $f(y) \le f(0) - y$

Ci manca $f(y) \geq f(0) - y$

in $(*)$ $y = -x \to f(0) - x \le f(x)$

A6

$$\sum_{cyc} \frac{a^3 + 5abc}{a^3(b+c)} \geq \boxed{?}$$

$$\sum \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$$

$$\frac{a}{b+c} \cdot a(b+c) = (a)^2$$

$$\Big(\sum_{cyc} a\Big)^2 \leq \Big(\sum_{cyc} \frac{a}{b+c}\Big) \cdot \Big(\sum_{cyc} a(b+c)\Big)$$

$$\underbrace{\sum_{cyc} \frac{1}{b+c}}_{\text{questo non ha minimo per } a=b=c=1\,!} (abc)^{1/3} + \sum_{cyc} \frac{5\,(abc)^{4/3}}{a^3(b+c)} \geq \cdots$$

Difetti $\sum \frac{1}{b+c} \to 0$ se $\boxed{\begin{array}{l} a = \frac{1}{M^2} \\ b = c = M \end{array}}$

$$\sum \frac{a}{b+c}$$

So trovare

$\min \sum \frac{1}{a(b+c)}$? E $\min \boxed{\sum \frac{1}{a^2(b+c)}}$? $\to \min = 3/2$

assunto in $a=b=c=1$

E $\min \sum \frac{1}{a^3(b+c)}$?

$$\frac{1}{a^2(b+c)} \cdot a(b+c) = \Big(\ --- \ \Big)^2$$

$$\frac{1}{a^2(b+c)} \cdot (b+c) = \Big(\frac{1}{a}\Big)^2$$

$$\underbrace{\Big(\sum \frac{1}{a^2(b+c)}\Big)} \cdot \Big(\sum (b+c)\Big) \geq \Big(\sum \frac{1}{a}\Big)^2$$

$$LHS \geq \frac{\left(\sum \frac{1}{a}\right)^2}{\sum (b+c)} = \frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum (b+c)} =$$

$$= \frac{\sum b^2c^2 + 2\sum \cancel{a}b\cdot b\cancel{c}}{2\sum a} \geq \frac{3\sum ab^2c}{2\sum a} = \frac{3}{2}$$

$\sum_c x^2 \geq \sum_c xy \quad x = bc \quad$ e cicliche

Ora provo

$$\min \sum \frac{1}{a^3(b+c)}$$

$$\frac{1}{a^3(b+c)} \cdot a(b+c) = \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$\Big\downarrow$ CS

$$\left(\sum_c \frac{1}{a^3(b+c)}\right)\left(\sum_c a(b+c)\right) \geq \left(\sum \frac{1}{a}\right)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_c \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{\left(\sum_c bc\right)^2}{\sum_c a(b+c)} = \frac{\left(\sum_c bc\right)^2}{2\sum ab} =$$

$$= \frac{\sum_c bc}{2} \geq \frac{1}{2}\cdot 3\,(abc)^{\square}$$

AM-GM

$\sum \frac{1}{a^3(b+c)} \geq$ suo valore in $(1,1,1) = 3/2$

$\sum \frac{1}{a^2(b+c)} \geq \quad$ " $\quad (1,1,1) = 3/2$

$\sum \frac{1}{b+c} \; \cancel{\geq} \quad$ " $\quad (1,1,1)$

$a^3+1+1 \geq 3a \quad$ AM-GM su $a^3, 1, 1$

$$\sum_c \frac{a^3+5}{a^3(b+c)} \geq \sum_c \frac{3a+3}{a^3(b+C)} \geq \text{ li so fare entrambi!}$$

$$a^3 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{25}{4}}\,a \quad \leftarrow \text{ no (Cond. uguaglianze sbagliate)}$$

Anche:

$$a^3+1+1+1+1+1 \geq 6\sqrt[6]{a^3} = 6\sqrt{a}$$

$$\sum_c \frac{\sqrt{a}}{a^3(b+c)}$$ volendo, si fa in modo simile

---

$a \to \frac{1}{x}$ e cicliche

$$LHS \geq \sum \frac{a^3+5abc}{a^3(b+c)} = \sum \frac{a^2+5bc}{a^2(b+c)} =$$

$$= \sum \frac{5x^2+yz}{y+z} \geq 3(x+y+z) \geq 3 \cdot 3 \sqrt[3]{xyz} = 9$$

Bunching + conti

$$(LHS)^3 \geq 3^3 \cdot \frac{\prod_c (a^3+5abc)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \dots \text{ conti } (B+S)$$

A7

$$f(fx+y) = f(fx-y) + 4(fx)\cdot y$$

- $f \equiv 0$ soluzione
- $f(x) = x^2$ soluzione

idea: $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$

$y = f(x) \longrightarrow \quad f(2fx) = f(0) + 4(fx)^2$

se fosse suriettiva, $f(z) = f(0) + z^2$

... ma non lo è ...

"suriettività 2.0"

$$\underbrace{f(fx+y) - f(fx-y)}_{\text{prende tutti i valori di } \mathbb{R} \text{ possibili}} = \underbrace{4f(x)\cdot y}_{\text{suriettiva}}$$

$\boxed{\text{Fisso } x \text{ con } f(x) \neq 0}$

Se voi mi date $z \in \mathbb{R}$, so trovare $u, v \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(u) - f(v) = z \qquad \text{"} f(\mathbb{R}) - f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \text{"}$$

1° modo di usarla

$$f(fx + y) = f(fx - y) + 4(fx) \cdot y$$

$$\Big\downarrow \; y \to f(y)$$

$$\underbrace{f(fx + fy) - 4 fx\, fy}_{\text{simmetrico}} \overset{\text{Testo}}{=} f(fx - fy)$$

$$\| $$

$$f(fy + fx) - 4 fy\, fx \overset{\text{Testo}}{=} f(fy - fx)$$

$$f(z) = f(-z) \quad \forall\, z \text{ che si scrive come } z = fx - fy$$

$\uparrow$ suriettività 2.0

$f(fx + fy) = $ roba   Altra idea classica: cerco di costruire una "somma a tre";

$$f(fx + fy + fz)$$

$y \to fy + fz$ nel testo dà

$$\underbrace{f(fx + fy + fz)}_{\substack{\text{simmetrica} \\ x,y,z}} = f(fx - fy - fz) + 4 fx (fy + fz)$$

$\updownarrow (*)$

$$= f(fy - fx - fz) + 4 fy (fx + fz)$$

$(*)$: $f(fx - fy - fz) = f(fy - fx - fz) + 4fz(fy - fx)$

Suriettività 2.0: $w = f(x) - f(y)$, che prende tutti i valori in $\mathbb{R}$

$(**)$ $f(w - fz) = f(-w - f(z)) - 4 f(z) \cdot w$

Assomiglia a $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

$f(z)$ anziché una variabile "liscia" z in (XX) rompe un po' le scatole

Ma $f(z)$ l'ho sostituito all'inizio e non l'ho mai usato... posso ricominciare con $y \leftarrow f(y)+z$

... insomma, ottengo $f(w-z) = f(-w-z) - 4zw$

da qui, pongo $z=w$ $f(0) = f(-2z) - 4z^2$

e finisco

A8 $\max(ax+by+cz)$

al variare di x, y, z t.c. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=3$

$abc=1$ $a=\frac{x}{y}$ e cicliche

$a = p-q$

$b = q-r$

$c = r-p$

$(p-q)x + (q-r)y + (r-p)z$

$$p(x-z) + q(y-x) + r\cdot(z-y) \leq \sqrt{p^2+q^2+r^2} \cdot \sqrt{(x-z)^2+(y-x)^2+(z-y)^2} =$$

$$= \sqrt{2\sum x^2 - 2\sum xy} = \sqrt{2\cdot 3} = \sqrt{6}$$

Però...

$(p, q, r) \sim (x-z, y-x, z-y)$, e questo non funziona, solo se $p+q+r=0$ ...

NON è soluzione (o forse sì?)

---

intuizione: "potete porre $x=0$"

modo un po' più formale:

$$(x,y,z) \longleftarrow (x,\ x+\underset{\sim}{r},\ x+\underset{\sim}{s})$$

obiettivo: $ax+b(x+r)+c(x+s) = \cancel{(a+b+c)}x + br + cs$

vincolo: $3 = x^2+(x+r)^2+(x+s)^2 - x(x+r) - x(x+s) - (x+r)(x+s) =$

$$= r^2+s^2-rs$$

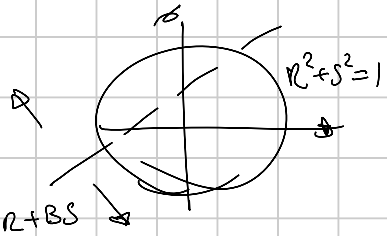
(è la stessa cosa che porre $x=0$)

Ora il problema è:

(*) $\max\ br+cs$ con vincolo $\boxed{r^2+s^2-rs=3}$

Cauchy-Schwartz è bravo a trovare cose tipo

$$(AR+BS) \le \sqrt{A^2+B^2}\,\sqrt{R^2+S^2} = \sqrt{A^2+B^2}$$ se so che $R^2+S^2=1$



Cerco di far diventare (*) questo problema

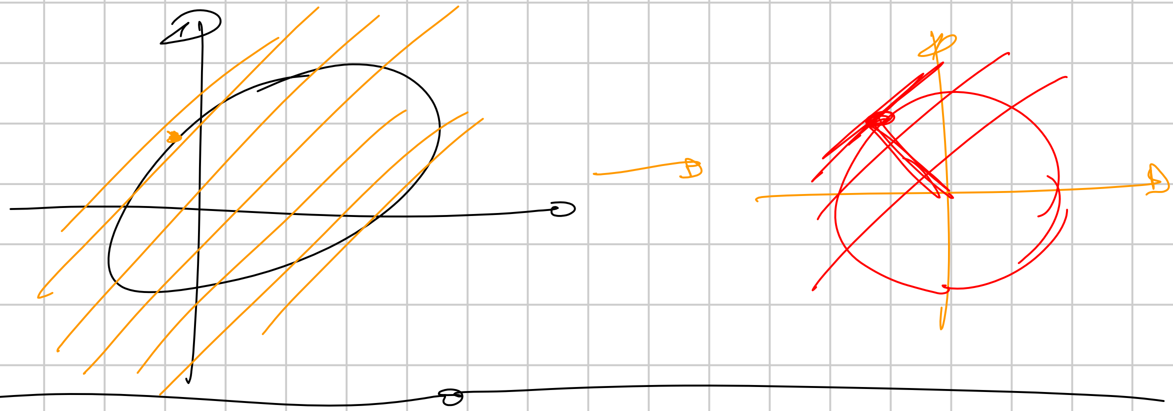
$$3 = r^2-rs+\frac{s^2}{4}+\frac{3}{4}s^2 = \left(r-\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)^2$$

completo il quadrato

$$br+cs = b\boxed{\left(r-\frac{s}{2}\right)} + \left(\frac{1}{2}b+c\right)\frac{2}{\sqrt{3}}\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}s} \overset{C.S}{\le}$$

$$\le \sqrt{b^2+\left(\left(\frac{1}{2}b+c\right)\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(r-\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)^2} =$$

$$= \sqrt{b^2+\frac{4}{3}\left(\frac{b^2}{4}+bc+c^2\right)}\ \sqrt{3} = \max$$



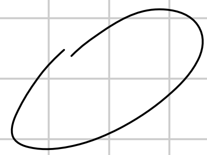
$$3(ax+by+cz) - (a+b+c)(x+y+z) =$$

$$= a(2x-y-z) + b(2y-x-z) + c(2z-x-y) \le$$

$$\le \sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{\text{mostro}}$$

vincolo $\iff (x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2=3$

$$\iff \sum_{cyc} (2x-y-z)^2$$



A9

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$f(n)$	1	1	2	2	3	4	4	4	5	6	7	7	8	8	8	8	9	10	11	12	12	13	14

1 2 3 4

n	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$f(n)$	14	15	15	15	16	16	16	16	16	17	18	19	20

$f_n = ff(n-1) + f(n - f(n-1))$

37

5

Ogni f è somma delle f di due numeri più bassi

$$f(n) = f(a_n) + f(b_n)$$

a ogni passo $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n + 1 \\ b_n \end{bmatrix}$ oppure $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n + 1 \end{bmatrix}$

uno è $f(n-1)$, uno è $n-f(n-1)$

se $f(n)-f(n-1)=0$

$$n-f_n-(n-1-f(n-1))=1$$

$$f(n)-f(n-1)=1$$

e se

$$n-f_n-(n-1-f(n-1))=0$$

Questo si trasforma in una dim. per induzione (estesa) che $f(n+1)-f(n)\in\{0,1\}$

Passo base $f(a+1)-f(a)\in\{0,1\}$ per $a<n$

$$f(n+1)-f(n)=f(f(n))+f(n+1-f_n)-ff(n-1)-f(n-f(n-1))=$$

se $f(n)=f(n-1)$, vengono $f(n+1-f_n)-f(n-f(n-1))$

se $f(n)-f(n-1)=1$, vengono $ff(n)-ff(n-1)$

Si riesce a dim. per induzione anche che

$f(n)\geq\frac{n}{2}$ per $n>1$

$$f(n)=ff(n-1)+f(n-f(n-1))\geq\frac{f(n-1)}{2}+\frac{n-f(n-1)}{2}=$$

$$=\frac{n}{2}$$

Fissata m

A un certo punto, esisterà x tale che $f(x)=2^m$

$x\geq 2^m$ (perché per Hp. induttiva $f(2^m)=2^{m-1}$)

$$f(x)\geq\frac{x}{2}\Rightarrow x\leq 2^{m+1}$$

Blocco successivo: 32 | 33 — - - $\boxed{@}$ 64

- - 0 . 0 16 | 32 32 32 .. 32

$$f(a) = \underbrace{f(\underbrace{f(a-1)}_{\leq 32})}_{\leq 16} + \underbrace{f(a - \underbrace{f(a-1)}_{\leq 32 \text{ perché } a \leq 64})}_{\leq 16} \ldots$$