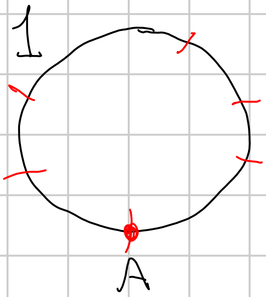
COMBINATORIA M - PreIMO 2014

Titolo nota 29/05/2014

C1

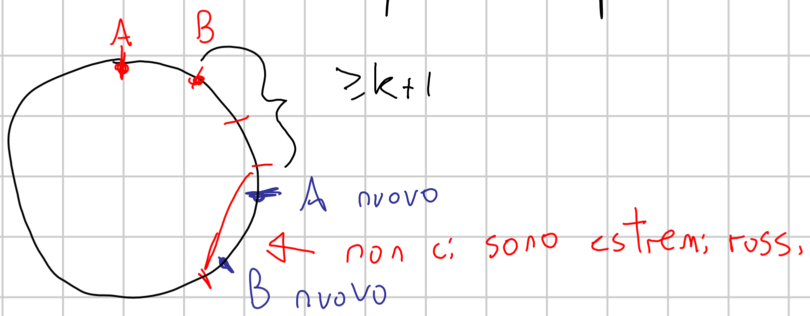


n archi non tutti lunghi uguali
ruotiamo di $\frac{2\pi k}{n}$ per $1 \leq k \leq n-1$

Th: $\exists$ un arco nuovo $\subseteq$ arco vecchio

Per $k=1$, prendiamo il più grande arco
Per k generico
Consideriamo gli estremi degli archi
contare quanti estremi supera A con la rotazione di $\frac{2k\pi}{n}$

$\exists$ A t.c. A supera al più $k-1$ estremi



Se riesco a trovare A che supera almeno $k+1$ estremi di archi e B (che è il successivo di A) che supera al più k estremi dico che l'arco $\widehat{AB}$ soddisfa la tesi.

Sicuramente $\exists$ A che supera $\geq k$ estremi
conto quanti estre superano i successivi di A

A	ne supera	$\geq k$
B	"	$\geq k$
C	"	$\geq k$

$\Big\} \rightarrow$ altrimenti vinco

Se riesco ad arrivare in fondo che tutti gli estremi superano più di k estremi. Assurdo

---

C2 $n \geq 2$ $A_1, \ldots, A_n$ insiemi finiti

$$|A_i \,\Delta\, A_j| = |i-j|$$

MINIMIZZARE $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |A_i|$

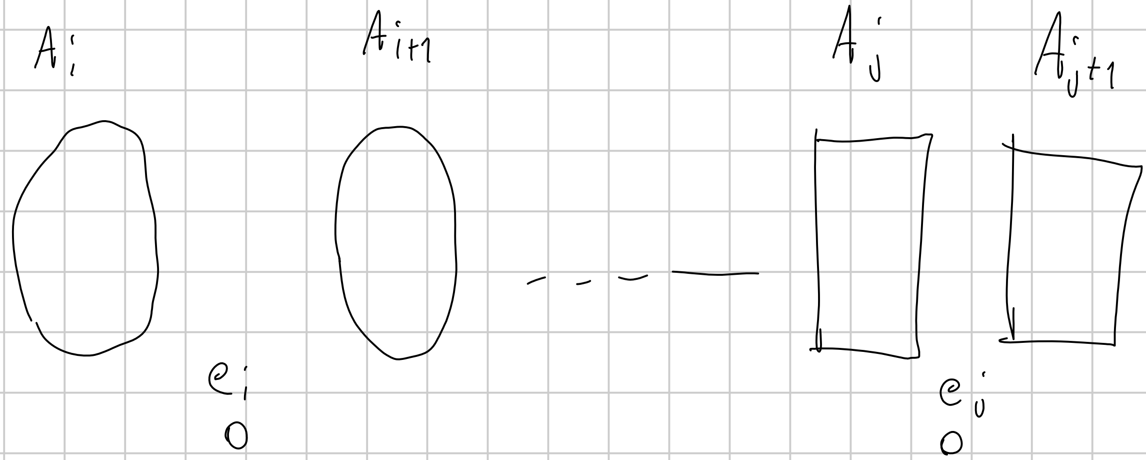
<u>OSS. 1</u> $\quad |A_i \,\Delta\, A_{i+1}| = 1 \quad$ per $\quad i = 1, \dots, n-1$

dunque $\exists\, e_i \quad$ con $\quad \{e_i\} = A_i \,\Delta\, A_{i+1}$

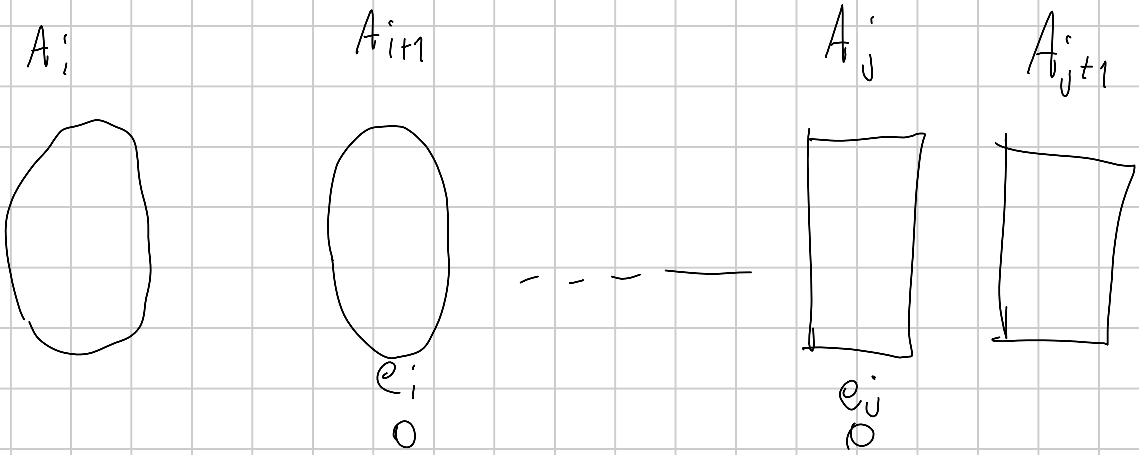
$$A_1 \underset{e_1}{\Big|} A_2 \underset{e_2}{\Big|} A_3 \; - - - \quad - \quad A_{n-1} \underset{e_{n-1}}{\Big|} A_n$$

<u>OSS. 2</u> $\quad e_i \neq e_j \quad$ per $\quad i \neq j$

$1 \leq i < j \leq n-1$



<u>CASO 1</u> $\quad o \in A_{i+1} \quad$ e $\quad o \in A_j$



$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{card. } |i-j|}}{A_i \Delta A_j} = (A_i \cup \{0\}) \Delta \underset{\substack{\uparrow \\ |i-j+2|}}{(A_j \cup \{0\})}$$

<u>CASO 2</u> Analogo

<u>OSS.3</u> Possiamo supporre che ogni elemento di uno degli A_i è uno degli e_k

Se $e \in$ a tutti gli A_i, considero gli $A'_i = A_i \setminus \{e\}$ tutte le ipotesi sono verificate, ma $\sum |A'_i| < \sum |A_i|$

<u>OSS.4</u> Gli elementi si dividono in 2 tipi: quelli presenti fin dall'inizio A, che scompaiono, e quelli presenti fino alla fine, che compaiono Ω

<u>OSS.5</u> $\sum |A_i| = \sum_{e_k}$ n° di volte che e_k compare in un A_i $=$

$$= \sum_{e_k \in A} k + \sum_{e_k \in \Omega} (n-k) \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \min\{k, n-k\}$$

ESERCIZIO: CALCOLARE LA SOMMA $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$

<u>ESEMPIO</u> Se scegliamo di mettere in A gli e_i con $i \leq n-i$ e in Ω gli e_i con $i > n-i$ allora tutte le disuguaglianze sono uguaglianze.

OSS. 6 L'OSS. 2 in realtà equivale alle ipotesi

A_i A_j

e_i - - - - e_{j-1}

$A_i \Delta A_j = \{e_i, \dots, e_{j-1}\}$

C3 $|X| = n$ $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$

la famiglia $\mathcal{F}$ ha la proprietà P se $\exists A, B \in \mathcal{F}$ t.c. $|A \Delta B| = 1$

a - Trovare la minima $|\mathcal{F}|$: se $|\mathcal{F}'| > \min|\mathcal{F}|$ allora $\mathcal{F}'$ ha la proprietà P

b - Descrivere tutte le $\mathcal{F}$ massimali senza la proprietà P

Notazione: $A \subseteq X$ associamo un vettore $(e_1, \dots, e_n)$: $e_i \in \{0, 1\}$ in modo che $e_i = 1 \iff$ l'elemento i-esimo $\in A$

Se $|A|, |B|$ hanno la stessa parità non può essere che $|A \Delta B| = 1$

$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : |A| \text{ pari}\}$ $\Rightarrow |\mathcal{F}| = 2^{n-1}$

$m = \min|\mathcal{F}|$ al punto a) $m \overset{?}{=} 2^{n-1}$ $m \geq 2^{n-1}$

Se considero una $|\mathcal{F}| > 2^{n-1}$, $|\mathcal{F}| \geq 2^{n-1} + 1$

considero le n-uple $\in \mathcal{F}$ con $e_1 = 1$ e le divido da quelle che hanno $e_1 = 0$

Per Pidgeonhole abbiamo che (wlog la suddivisione di parti che non contiene il primo elemento) questa contiene almeno $2^{n-2} + 1$.

Per induzione su n

$n = 1$ il massimo è 1

$n > 1$ mi riconduco ad una famiglia $\mathcal{F}'$ su un insieme $X \setminus \{1\}$

che ha $n-1$ elementi.
Il minimo $|\mathcal{F}|$ è 2^{n-1} (del punto a).

Oss. Il ragionamento fatto ci dice che comunque fissati k tra gli e_i del vettore $(e_1, \dots, e_n)$ abbiamo esattamente metà dei vettori possibili in $\mathcal{F}$, se ne ha di più $\Rightarrow \mathcal{F}$ ha la proprietà P
se ne ha di meno $\Rightarrow \mathcal{F}$ non è massimale
↳ nel senso che $|\mathcal{F}| < 2^{n-1}$

→ In particolare fisso $n-1$ componenti ho 2 scelte possibili e la $\mathcal{F}$ ne contiene esattamente 1.

Ora ho 2 casi (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$ $\vee$ (ii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(i) $(0,0,\dots,0) \in \mathcal{F} \Rightarrow (|A| = 1 \Rightarrow A \notin \mathcal{F})$

se $|A| = 1$, $A \notin \mathcal{F} \Rightarrow (|A| = 2 \Rightarrow A \in \mathcal{F})$

- - - -

$|A| = n$
$\Rightarrow \mathcal{F} = \{ A \subseteq X : |A| \text{ è pari} \}$

(ii) perfettamente analogo scambio ogni volta $\in$ con $\notin$
$\Rightarrow \mathcal{F} = \{ A \subseteq X : |A| \text{ è dispari} \}$.

$$\{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0,1\} \} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = V$$ con somma comp. per comp. in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Per quali n è possibile accoppiare gli elementi di V in modo che le somme siano tutte distinte?

1) $\boxed{n=1 \quad (0) + (1) = (1)}$ ok

2) $n=2$ $(0,0) \rightarrow (0,1)$ $(0,1)$ NO $(1,1)$ NO
$(1,0)$ $(1,1)$ $(0,1)$ $(1,1)$

3)

$(0\,0\,0) - (1\,0\,0)$ $\quad (1\,0\,0)$
$(0\,0\,1)\quad(1\,0\,1)$ $\quad (1\,1\,1)$ $\quad$ ok
$(0\,1\,0)\quad(1\,1\,0)$ $\quad (1\,0\,1)$
$(0\,1\,1)\quad(1\,1\,1)$ $\quad (1\,1\,0)$

$2n+1 \to 2n+3)$

$(x_1 \;\cdots\; x_{2n+1}, a, b)$

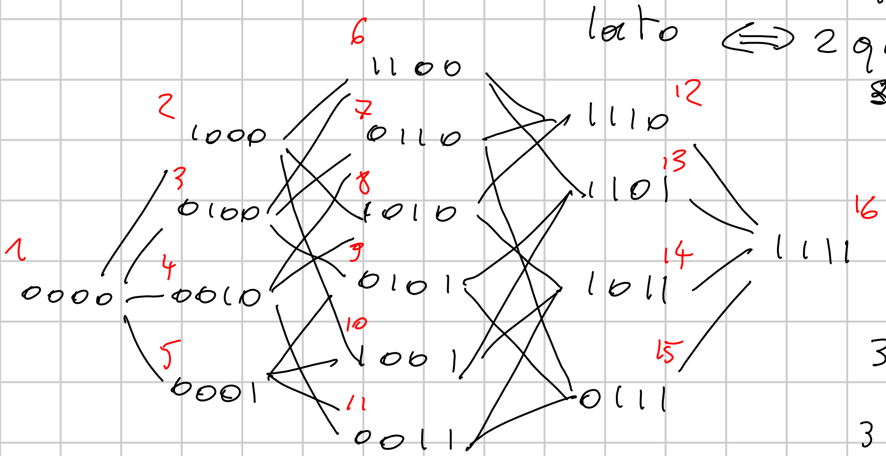
$(y_1 \;\cdots\; y_{2n+1}, a', b')$

(a,b)	(a',b')
$(0,0)$	$(0,0)$
$(0\,1)$	$(1\,0)$
$(1\,0)$	$(1\,1)$
$(1\,1)$	$(0\,1)$

$(y_1 \cdots y_{2n+1})$ è la $2n+1$-upla associata a $(x_1 \cdots x_{2n+1})$ nel caso $2n+1$.

Queste 4 somme coincidono nei primi $2n+1$ elem., ma sono diverse negli ultimi 2.
Se invece poi considero coppie che non cominciano con $(x_1 \cdots x_{2n+1})$, queste saranno associate a vettori $(\tilde{y}_1 \cdots \tilde{y}_{2n+1}, a, b)$ per cui la somma differisce in qualcuna delle prime $2n+1$ componenti da $(x_1+y_1, \;\cdot\;, x_{2n+1}+y_{2n+1})$.

$2n$ no $\to$ $2n+2$ no) $\qquad$ Grafo: vertici $\Longleftrightarrow$ quadruple di 0,1
lato $\Longleftrightarrow$ 2 quadruple diff. solo su 1 comp.



3	2	1
3	2	3
1,12	8,10	3,9
2,16	5,13	4,7
6,15		11,14

FUNZIONANO!

Ma allora posso usare l'induzione di $2n$ analoga a quella precedente $\quad 2n \to 2n+2 \quad \Longrightarrow$

si può $\forall n \neq 2$.