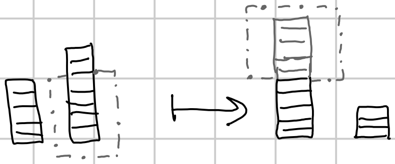
COMBINATORIA P   PreIMO 2014

Titolo nota   29/05/2014

C6

mossa 

Determinare le configurazioni iniziali t.c. dopo un numero finito di mosse Alberto riesce ad ottenere un'unica pila.

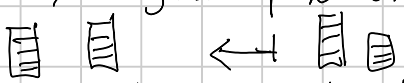
Idea standard   cercare un'invariante

Config. finale: n

pre-finale: $n/2$

pre^2-finale: $n/4$ $n/2$ $\vee$ $n/4$ $3/4 n$

$n = 2^e d \Rightarrow$ ogni pila di monete è multiplo intero di d



$k_1 d \quad k_2 d \qquad\qquad k_1' \quad k_2'$ voglio mostrare che $d | k_1'$ e k_2'

$k_1 d = 2 k_1'$

$\underbrace{k_2 d} = \underbrace{k_2' - k_1'}$

altezze delle pile dopo 1 mossa

" " prima della mossa

dato che $2 \nmid d$, ho che $d | k_1'$, $d | k_2'$

Le configurazioni non perdenti a priori sono quelle per cui $d | n_i$ dove n_i è il numero di monete sull'i-esima pila.

OSS: Se $k | n_i \ \forall i$, allora da quel momento tutte le pile conterranno un numero di monete multiplo di k. Quindi posso incollare le pile a blocchetti di dimensione k ora posso supporre che $n = 2^e$

Ora, per far vedere che queste config. sono vincenti devo solo far aumentare il MCD degli n_i.

Ci saranno un numero pari di blocchetti di altezza dispari

- se non ce n'è nessuno, $2 \mid MCD$, posso supporre $n = 2^{e-1}$
- se ce ne sono almeno 2, li accoppio e applico la mossa su ciascuna coppia

vedo che la config. che ottengo ha tutti gli n_i pari

$k_1 = 2k_1'$

$k_2 = k_2' - k_1'$ se k_1' e k_2' sono dispari, k_1 e k_2 diventano pari.

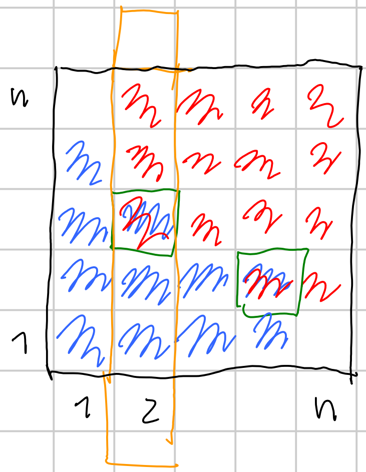
In questo modo l'MCD di tutti aumenta di un fattore 2 ogni volta $\Rightarrow$ arriverò ad avere una situazione in cui non posso più applicare la mossa $\Rightarrow$ 1 sola pila.

C5 $\quad P = \{1, \dots, n\}^k$

TROVARE IL MAX DI $\dfrac{|A \cap B|}{|A| \cdot |B|}$ CON

A DECRESCENTE E B CRESCENTE

$K = 2$



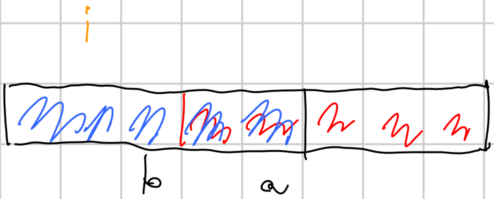
P nel caso $n = 5$

A è decrescente

B è crescente

$$\boxed{\frac{a-b}{a(n-b)}}$$

$k = 1$



OSS 1 $\quad A_i = \{(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \{1, \dots, n\}^{k-1} \mid (x_1, \dots, x_{k-1}, i) \in A\}$

$$B_i = \{ (y_1, \dots, y_{k-1}) \in \{1, \dots n\}^{k-1} \mid (y_1, \dots, y_{k-1}, i) \in B \}$$

A_i è decrescente $\quad$ B_i è crescente

Se $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in A_i \Rightarrow (x_1, \dots, x_{k-1}, i) \in A$

Dato $(y_1 \leq x_1, \dots, y_{k-1} \leq x_{k-1})$

Allora $(y_1, \dots, y_{k-1}, i) \underset{\text{comp. per comp.}}{\leq} (x_1, \dots, x_{k-1}, i)$

Quindi $(y_1, \dots, y_{k-1}, i) \in A \Rightarrow (y_1, \dots, y_{k-1}) \in A_i$

Analogamente per B_i

2ª OSS. $\quad A_i \supseteq A_{i+1} \qquad B_i \subseteq B_{i+1}$

CONGETTURA $\quad$ Con n e k viene $\frac{1}{n^k}$

ESEMPIO $\quad A = B = P \qquad \frac{|P|}{|P|^2} = \frac{1}{n^k}$

L'esempio ci sarebbe.

$$\frac{|A \cap B|}{|A| \cdot |B|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap B_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |A_i|\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |B_i|\right)} \overset{\text{IP. IND.}}{\leq} \frac{\frac{1}{n^{k-1}} \sum_{i=1}^{n} |A_i| \cdot |B_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |A_i|\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |B_i|\right)}$$

$$\overset{\text{RIARR.}}{\leq} \frac{\frac{1}{n^{k-1}} \frac{1}{n} \cdot \cancel{\left(\sum |A_i|\right)} \cdot \cancel{\sum |B_i|}}{\cancel{(\ )}\cancel{(\ )}} = \frac{1}{n^k}$$

$(|A_1|, \ldots, |A_n|)$ è decrescente

$(|B_1|, \ldots, |B_n|)$ è crescente

PASSO BASE

$\boxed{K=0}$ $P = \{( )\}$ $A = B = P$

$$\frac{1 \cdot \cdot}{1 \cdot 1} = 1 = \frac{1}{n^0}$$

$\boxed{K=1}$

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \notin A \\ 1 & \text{se } i \in A \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \notin B \\ 1 & \text{se } i \in B \end{cases}$$

$$|A \cap B| = \sum a_i b_i \qquad |A| \cdot |B| = \sum a_i \cdot \sum b_i$$

$$a_1 \geq \cdots \geq a_n \qquad b_1 \leq \cdots \leq b_n$$

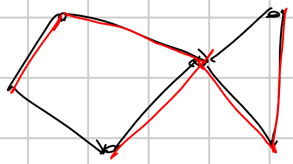
C7 n vertici grafo connesso $1 \leq K \leq n-1$ $n \geq 2$

ogni vertice ha grado $\geq K$

Allora è possibile colorare gli archi del grafo con $n-K$ colori in modo che per ogni coppia v, w di punti esiste un percorso da v a w "policromatico", ossia con archi di colori tutti diversi.

$\boxed{K=1}$ $n-1$ colori grafo è connesso

IDEA! Prendo uno "spanning tree" del grafo



coloro gli archi non più diretti ma di $n-1$ colori diversi e gli altri archi del grafo li coloro a piacere

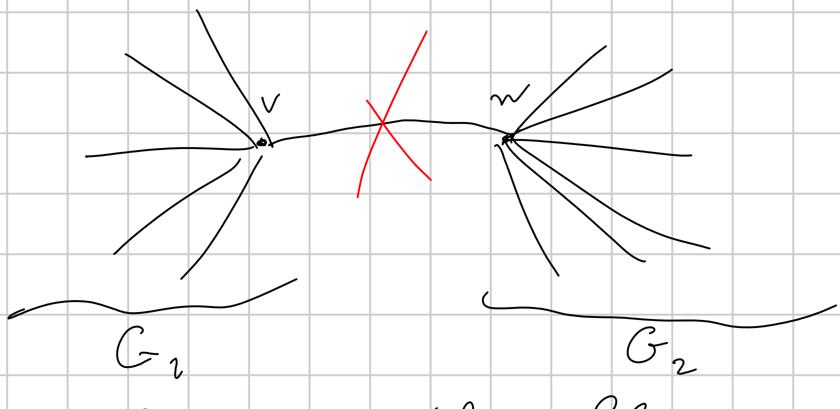
---

INDUZIONE MOLTO ESTESA Cerchiamo di semplificare il più possibile il grafo che ci viene dato (FORMALMENTE induzione su $V+E$)

COME SI SEMPLIFICA UN GRAFO

- TOGLIERE UNO o PIÙ VERTICI (E GLI ARCHI INCIDENTI)
- TOGLIERE UNO o PIÙ ARCHI
- COLLASSARE UNO o PIÙ VERTICI

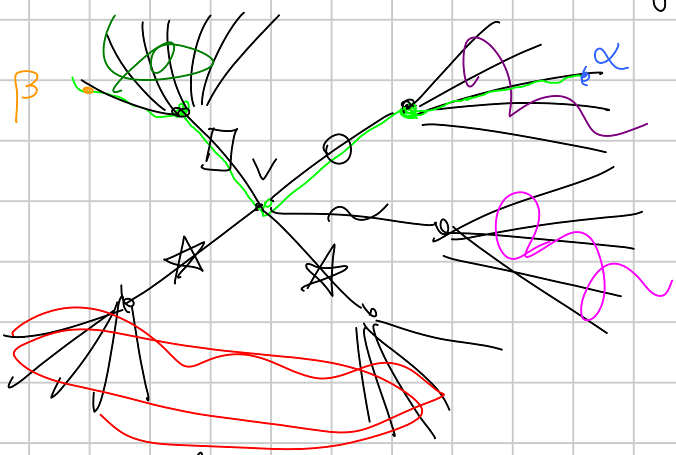
OSS. 1 Se c'è un arco che collega 2 vertici con grado $> k$, lo tolgo (e lo coloro a piacere alla fine). OCCHIO! Potrei sconnettere in 2 parti il grafo.



Su G_1 ho le ipotesi del problema

$\Rightarrow$ coloro G_1 con $|G_1|-k$ colori, G_2 con $|G_2|-k$ colori, vw con un colore nuovo (ne avrei ancora K a disposizione)

OSS. 2 Supponiamo di avere un vertice di grado K collegato solo a vertici di grado $> K$



α, β vertici

- Se $\alpha, \beta \in G_i$, li collego dentro G_i
- Se $\alpha \in G_i$, $\beta \in G_j$ passo per V
- Se $\alpha = V$, $\beta \in G_i$ analogamente

TOGLIAMO V dal grafo. Siano $G_1, \ldots, G_s$ le comp. connesse di $G \setminus \{V\}$.

Sui G_i ho le ipotesi del problema $\Rightarrow$ coloro G_i con $|G_i| - K$ colori

ho usato $\sum_{i=1}^{s} |G_i| - sK$ colori $= (n-1) - sK$

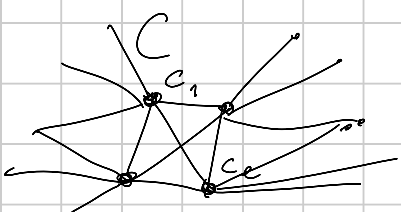
coloro gli archi uscenti da V in base al G_i in cui arrivano. Uso altri s colori

$$n - 1 - sK + s \overset{?}{\leq} n - K \iff (s-1)(K-1) \geq 0$$

DEF Una cricca in un grafo G è un insieme di vertici C tutti collegati tra loro in G

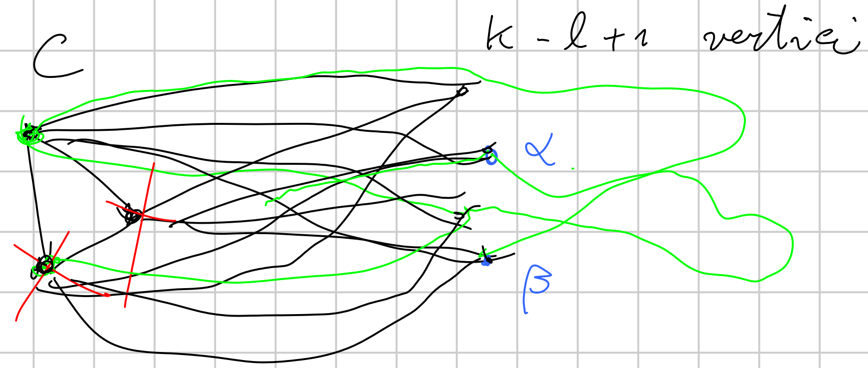
Sia C una cricca massimale di G tra quelle fatte solo da vertici di grado K

$C = \{c_1, \ldots, c_\ell\}$



Ci sono due casi (supponga $\ell \geq 2$, altrimenti termina subito)

<u>1° caso)</u> Le conoscenze esterne alla cricca C di ogni c_i sono sempre le stesse



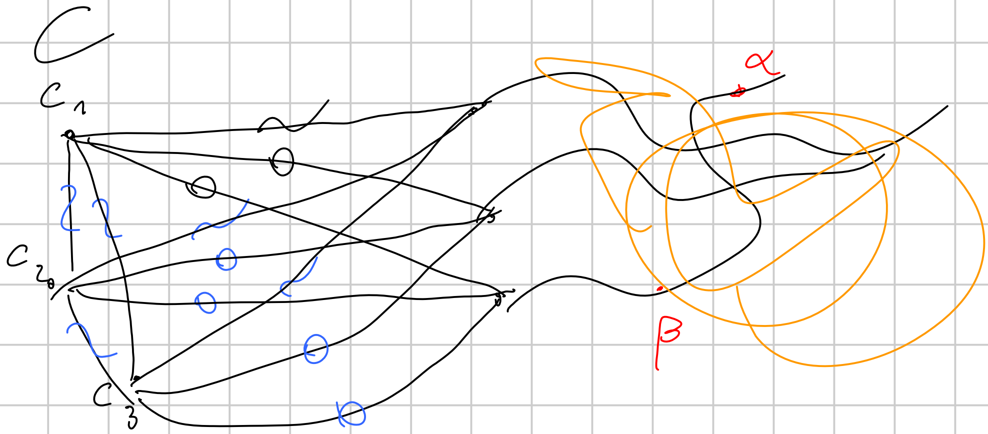
Elimino da C $s-1$ vertici. Il grafo rimane connesso. Il grado di ogni vertice rimane

$$\geq k-(s-1) = \underline{k-s+1}$$

$G \setminus \{c_2 \dots c_\ell\}$ si colora con $n-(s-1)-(k-(s-1))$

$= n-k$

- Se $\alpha, \beta \in C$ sono collegati da un arco
- Se $\alpha \in C$, $\beta \notin C$ posso supporre $\alpha = c_1$

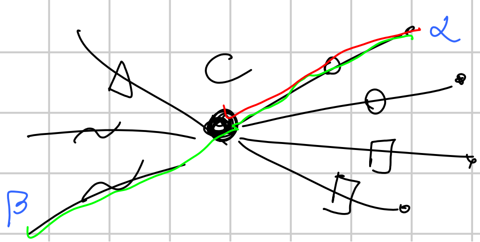


- Se $\alpha, \beta \notin C$, allora esiste un percorso in $G \setminus \{c_2, \dots, c_\ell\}$

<u>2° caso)</u> Complessivamente i vertici di C conoscono all'esterno almeno $k-(\ell-1)+1$ altri vertici

Collassiamo C a un solo vertice

$$\deg(C) \geq k-\ell+2$$



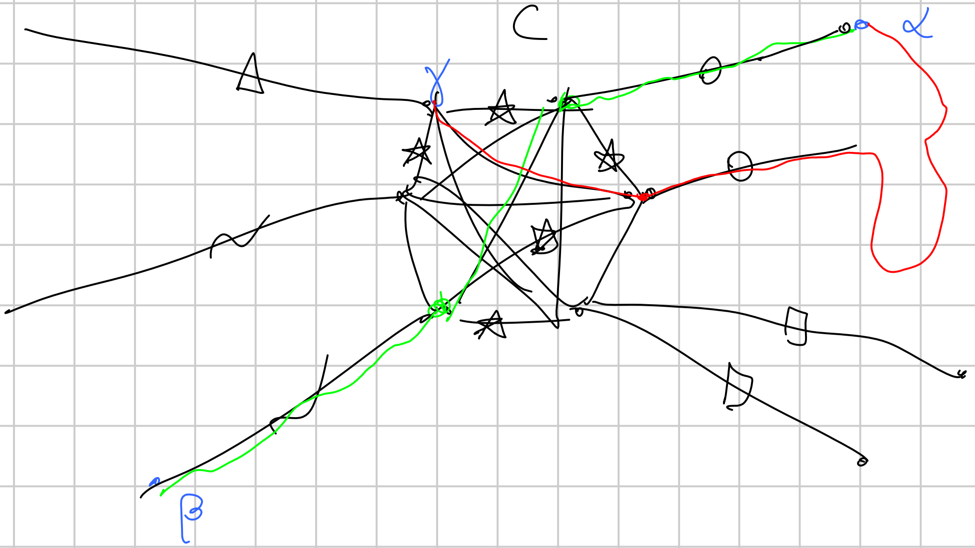
Se $v \notin C$

- v aveva grado $> k \Rightarrow$ ora ha grado $\geq k-\ell+2$
- v aveva grado k

allora v non conosceva tutta la cricca $\Rightarrow$ ora ha grado $\geq k-(l-1)+1$

Il nuovo grafo ha meno vertici, e si colora con

$$n-(l-1)-(k-l+2) = n-k-1$$



- $\alpha, \beta \notin C$ nel grafo contratto esiste un percorso da α a β che passa al più una volta per C
- Idem se $\alpha \notin C$, $\gamma \in C$

Alberto può chiedere "decine" di carte, Barbara dice il valore di 1 delle 10 (su 2014). Quante carte può identificare Alberto?

x valore $\qquad A_x = \bigcap \{$decine alle quali Barbara ha risposto $x\}$

$|A_x| = 1. \Rightarrow$ quella carta ha scritto x.

$A_x = \emptyset$

$|A_x| \geq 2$

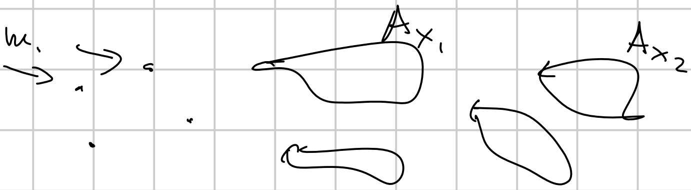
1) $\forall$ decina S, $\exists A_x \subseteq S$.

2) Se Barbara dice x, la carta con $x \in$ quella decina.

(1) WLOG, $\bigcup A_x =$ tutte le carte.

[Dimostro per induzione che se ci sono più di $3k-3$ carte e Alberto chiede k-ple, ne può indovinare almeno 1; e se sono $\leq 3k-3$ Barbara può difenderle tutte] ($\Rightarrow$ Barbara con 10 difende 27 e Alberto indovina 1987)

s elem. $\rightarrow$

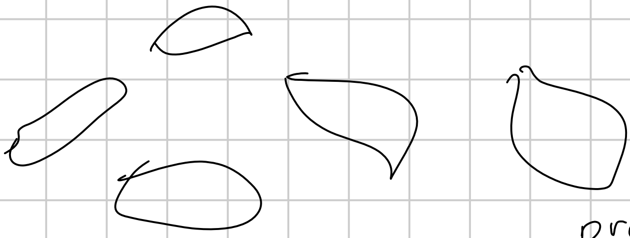


Allora Alberto può scegliere le decine k-ple che $\supseteq$ gli s elem.

E' come se ci fossero $N-s$ carte e Alberto chiede $k-s$-ple.

$N \geq 3k-3$ $\quad N-s \geq 3(k-s) \Rightarrow$ per induz., Alberto può indov.

Se $\forall$ decina $\exists A_x$ dentro gli A_x "coprono" le decine (k-ple)

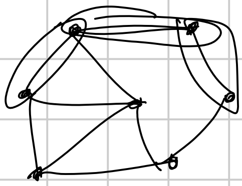


A_x coprono.

Se $|A_{\bar{x}}| > 2$, e prendo al suo posto una coppia $\subset A_{\bar{x}}$, ancora coprono

$\Rightarrow$ posso supp. $|A_x| \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$, anzi, tutti $|A_x| = 2$

Lemma è impossibile coprire l'insieme delle k-ple con $3k-2$ coppie.



Grafo Vertici = carte $3k-2$
Archi = coppie $3k-2$

Teorema: $\exists$ insieme indip. (non colleg. da archi) di almeno $\frac{n}{1+\bar{d}}$ vertici

$n = 3k-2$ $\quad \bar{d}$ = grado medio = 2

$\frac{n}{3}$ vertici! $\left\lceil \frac{3k-2}{3} \right\rceil = k$.

Allora Alberto chiede questi k vertici. E' una k-pla che $\not\supset$ nessun A_x!

Barbara difende $3k-3$: $\quad k-1$ triangoli