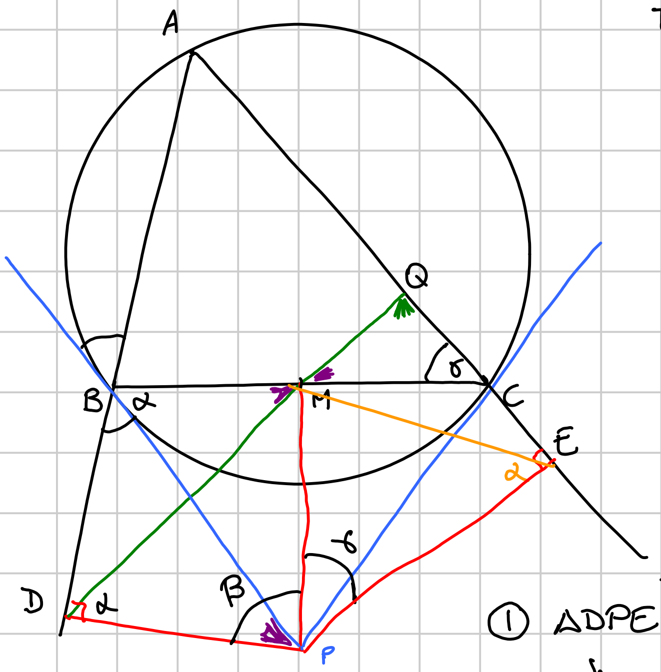
PREIMO 2014 - GM

Titolo nota 26/05/2014



Tesi $\iff$ $DM \perp AE$.

$\Updownarrow$

$Q\hat{M}C = 90 - \gamma$

$Q\hat{M}C = B\hat{M}D = B\hat{P}D = 90 - D\hat{B}P = 90 - \gamma$

BDPM ciclico

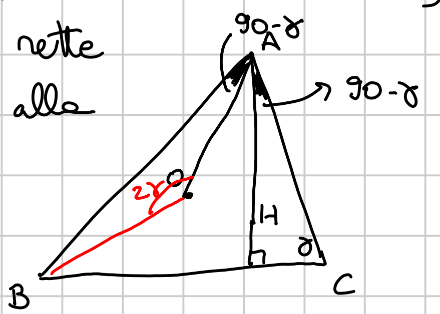
Idea alternativa: DMEP parall

Domanda: perchè $AM \perp DE$?

① ADPE è ciclico e il centro è il pto medio di AP

② AM e AP sono rette simmetriche rispetto alla bis di A (lemma della simmediana)

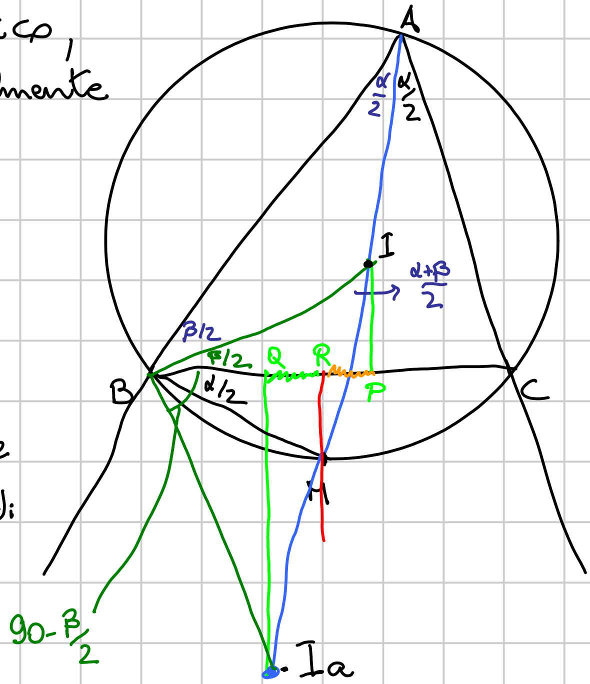
③ OA e HA sono rette simmetriche rispetto alla bisettrice



Esercizio 2 Lemma: $BICI_a$ è ciclico, con centro M; I e I_a sono diametralmente opposti.

$I\hat{B}I_a = 90° = I\hat{C}I_a \Rightarrow$ ciclico

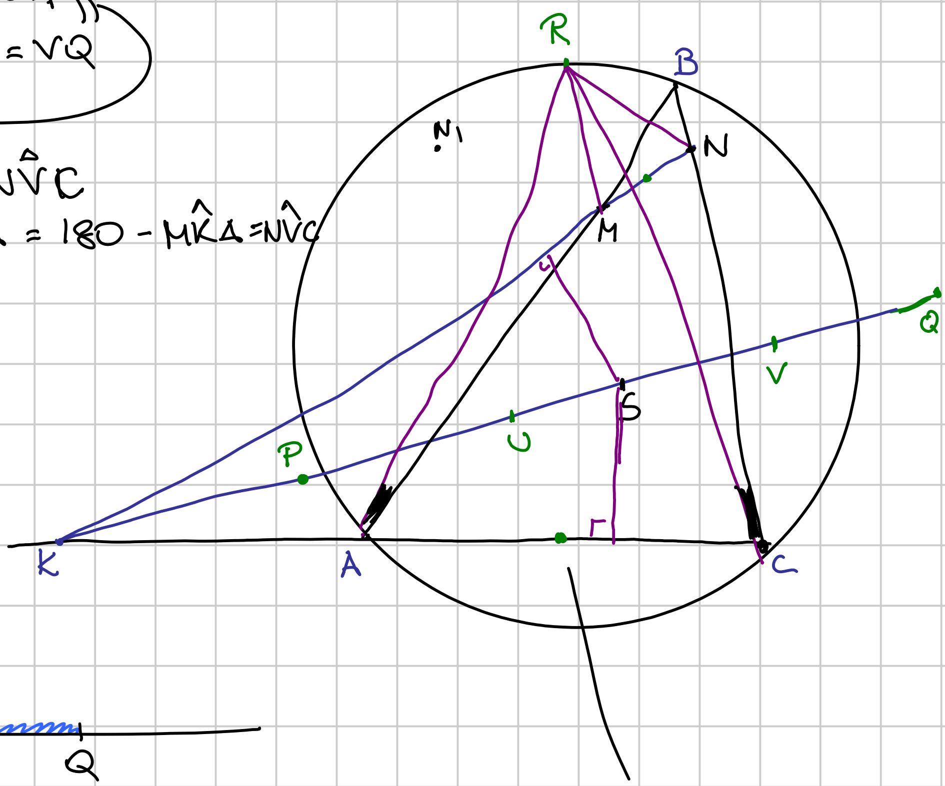
Vediamo che $BM = IM$



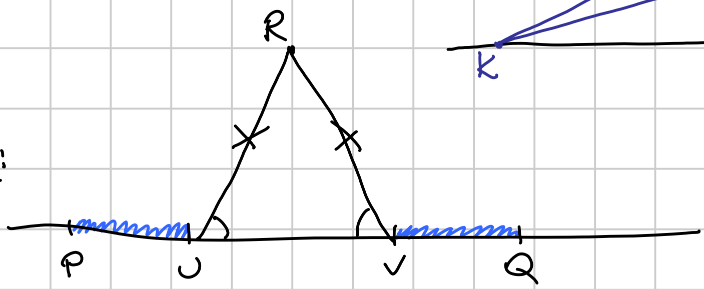
Altro modo: M sta sulla bisettrice di $\hat{A}$, quindi su II_a e sull'asse di BC.

Per il lemma: $UA = UP = UM$
$VC = VN = VQ$

perché? $M\hat{U}A$ e $N\hat{V}C$ sono isosceli, $M\hat{U}A = 180 - M\hat{K}A = N\hat{V}C$ e $MA = NC$.



Oss:



$PR = QR \iff UR = VR$

$\boxed{\Leftarrow}$ i triangoli $R\hat{U}P$ e $R\hat{V}Q$ coincidono

Ci siamo ridotti a far vedere: $UR \stackrel{?}{=} VR$.

$R\hat{M}A$ e $R\hat{N}C$ coincidono e sono ottenuti con una rotazione di centro R. Questa rotazione manda U in V (ex: vederlo bene).

Soluzione alternativa: S pto medio di PQ, il pto medio di MN e il pto medio di AC e K sono conciclici.

$$\sin\alpha_2 = \frac{A_2C'}{AA_2} \cdot \sin A\hat{C}A_2$$
$$= \frac{2R}{AA_2} \sin^2 A_2\hat{A'}C'$$

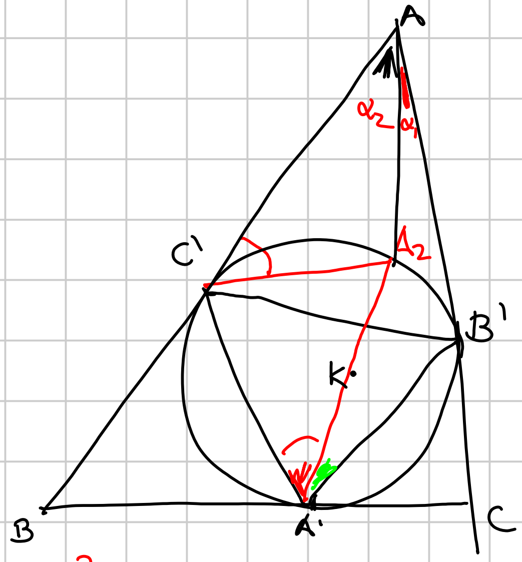
$$\sin\alpha_1 = \frac{2R}{AA_2} \cdot \sin^2 A_2\hat{A'}B'$$

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \left(\frac{\sin A_2\hat{A'}C'}{\sin A_2\hat{A'}B'}\right)^2$$

Scambiando ciclicamente A,B,C

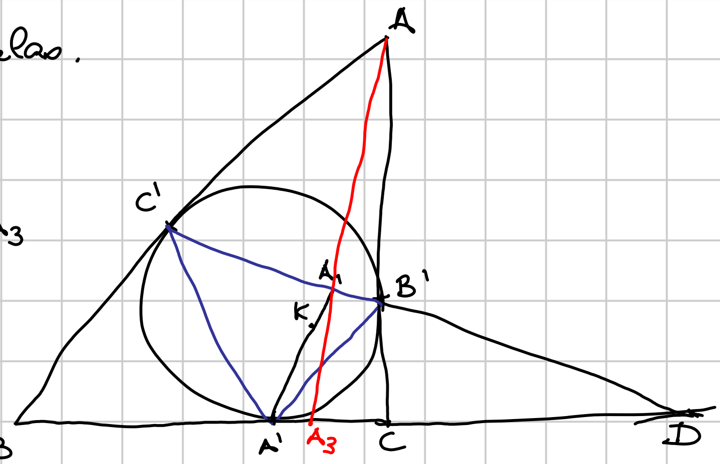
$$\prod_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \left(\qquad \right)^2 = 1$$

Ceva trigo su $A'B'C'$ con pto K.



Altra idea KAMR è ciclico; queste circonferenze (Γ_{KAMR} e Γ_{KCNR}) hanno lo stesso raggio (teo dei seni)

<u>Esercizio 3</u>: idea: usare Ceva e Menelao.



Dobbiamo calcolarci $\frac{BA_3}{A_3C}$

Menelao su $\widehat{BDC'}$ con retta AA_1A_3

$$\frac{BA_3}{A_3D}\cdot\frac{DA_1}{A_1C'}\cdot\frac{C'A}{AB}=1$$

Menelao su $B'CD$ con retta AA_1A_3

$$\frac{CA_3}{A_3D}\cdot\frac{DA_1}{A_1B'}\cdot\frac{B'A}{AC}=1$$

$$\boxed{\frac{BA_3}{CA_3}\cdot\frac{A_1B'}{A_1C'}\cdot\frac{C'A}{B'A}\cdot\frac{AC}{AB}=1} \quad (*)$$

Cicliche ABC

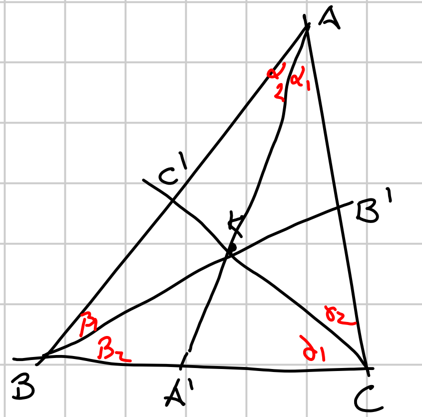
$$\frac{CB_3}{AB_3}\cdot\frac{B_1C'}{B_1A'}\cdot\frac{A'B}{C'B}\cdot\frac{BA}{BC}=1$$

$$\frac{AC_3}{BC_3}\cdot\frac{C_1A'}{C_1B'}\cdot\frac{B'C}{A'C}\cdot\frac{CB}{CA}=1$$

Faccio il prodotto $\quad =1 \quad =1 \quad =1$

Ceva su $A'B'C'$, pto K

proprietà di A',B',C', per esempio $BA'=BC'$

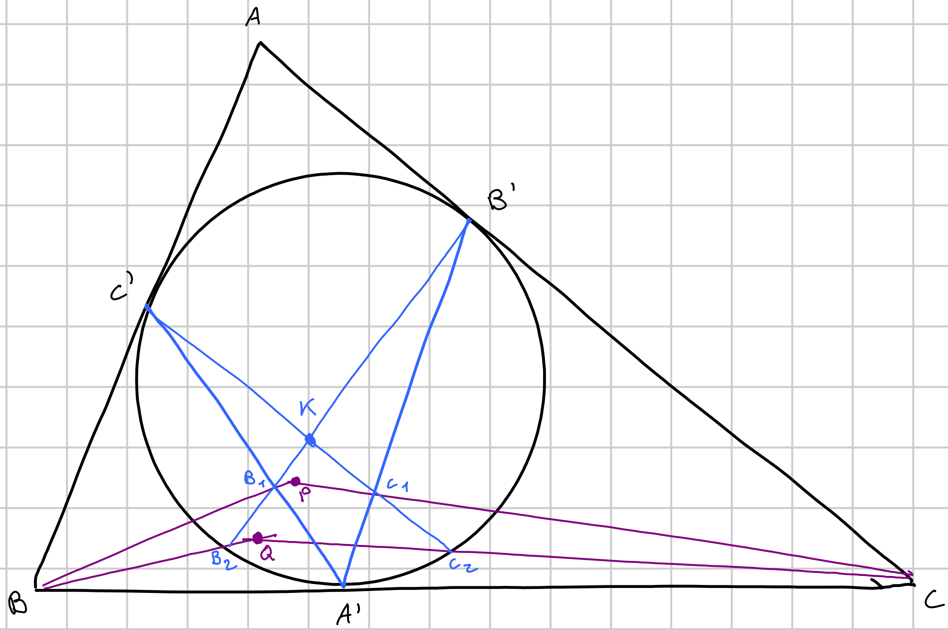


AA', BB', CC' concorrono $\Leftrightarrow$

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1$$

Altra idea: teorema dei seni su ABA_3 e AA_1C' per ottenere $(*)$



CONCORRENZA / ALLINEAMENTO :

- "informazioni metriche" → Ceva / Menelao
- "punti definiti come intersezioni di qualcosa" → Desargues / Pascal

DESARGUES con triangoli $\overset{\Delta}{BB_1B_2}$ e $\overset{\Delta}{CC_1C_2}$

Th ⇔ BC, B_1C_1 e B_2C_2 concorrono

e ora? → Pascal

[x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 concorrono sse

x_3, y_3 e $P = x_1y_1 \cap x_2y_2$ sono allineati]

$W = BC \cap B_2C_2$

Th ⇔ B_1, C_1 e W allineati

Pascal su $A'A'B'B_2C_2C'$

$A'A' \cap B_2C_2 = BC \cap B_2C_2 = W$

$A'B' \cap C_2C' = C_1$

$B'B_2 \cap C'A' = C_2$

CVD