Combinatoria Mattina – PreIMO - 2015

Titolo nota 27/05/2015

C1 (a,b) naturali vogliamo colorare $\mathbb{Z}^2$
con ab colori
ogni rettangolo $a \times b$ e $b \times a$
deve contenere tutti i colori

Soluzione

Oss. facili: $(1,n)$ si fa (colorando per diagonale)
(n,n) si fa (ripetendo ciclicamente)

2×3 NO; 2×4 sì; 2×5 NO

Claim: si fanno $\Leftrightarrow a \mid b$ (wlog $b \geq a$)

la colorazione la ottengo associando ad un colore
una coppia (d,p)

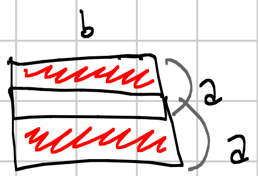
es (giallo) $\Rightarrow d=1$
(arancione) $\Rightarrow d=2$
(rosso) $\Rightarrow d=3$

p mi dice in che posizione sono
dentro al quadrato

la colorazione voglio che dipenda solo da (d,p)

L'altra parte del problema mi chiede di dimostrare
che non riesco a colorare se $a \nmid b$

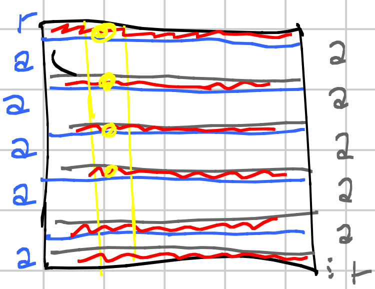
Oss 1:



le aree colorate di (rosso)
contengono gli stessi colori

Oss 2: Prendiamo $b \times b$

$b = qa + r$



l'oss 1 ⇒ ~ contengono gli stessi colori
contengo " "
(l'area bianca)

Oss 2.1 Posso fare la stessa suddivisione con rettangoli verticali ottenendo altre aree bianche

Oss 3: ogni colore compare o q volte
o $q+1$ volte

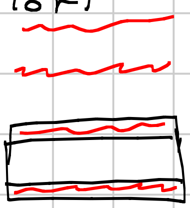
ma i colori sulle strisce bianche compaiono q volte

Ora D-C sulle caselle

dovrei avere $b^2 \geq \cdot(q+1) + (\ \ ) \cdot q$
ma l'oss 2.1 mi dice che ho troppa area bianca

Sol 2 sfrutto l'oss. 1 ⇒

prendo una riga, salto di b e ottengo gli stessi colori



posso saltare anche di a e ottenere gli stessi colori
Quindi, per Bezout, posso saltare di (a,b)

Problema 2

Ogni giocatore sceglie un intero non somma di multipli pos. di numeri scelti

Alberto: "a"
Barbara: "b"

$(a,b)=1$

$$u = ha + kb \qquad h,k \in \mathbb{Z}$$
$$= (h-b)a + (k+a)b$$

L'ultimo numero che posso scegliere è $ab-a-b$ $(h=-1,\ k=a-1)$

Alberto: 2
Barbara: 3

$ab-a-b=1$

2
3
NON SI POSSONO SCEGLIERE

Alberto: "5"
Barbara: "4"

6	7	11
NO	NO	SI

Alberto: A   Barbara: P

Alberto: p   Barbara: u

Alberto: $pu-p-u$

1° caso   Barbara non ha strategie vincenti

2° caso   Barbara dice m. e vince.

Ma Alberto sceglie m. (Per il teorema del postino) $pu-p-u$ viene bruciato

In generale la strategia non si conosce, però Alberto può "rubarla" a Barbara se ne avesse una. □

C3 Grafo con grado massimo $\leq m+n+1$

Th: riesco a bipartire il grafo in A e B t.c. in A il grado max $\leq m$ e in B gr. max $\leq n$

Sol: metodi costruttivi: mostro un algoritmo
" non costruttivi: pidgeonhole / assurdo
"elemento estremale"

Algoritmo: iniziamo con una partizione casuale e cerco di sistemare i vertici con gr troppo alto

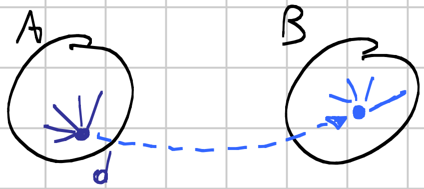
Ad ogni step, sposto un vertice nell'altro sottoinsieme se ha grado troppo alto per stare dov'era

Come in tutti i problemi che si rispettano, utilizziamo un invariante che diminuisce sempre

Oss che è utile avere molti archi tra A e B
cerchiamo un'invariante che tenga conto degli archi

Proviamo con $Q = \alpha E_A + \beta E_B$ dove α, β sono parametri reali e E_A, E_B sono gli archi dentro A, B

Ad ogni step



se spostiamo da A a B stiamo togliendo d_A archi in A e ne stiamo aggiungendo d_B in B
so che $d_A \geq m+1$; $d_A + d_B \leq m+n+1$

$$Q \longrightarrow Q - d_A \alpha + d_B \beta$$

devo imporre $d_B \beta < d_A \alpha$

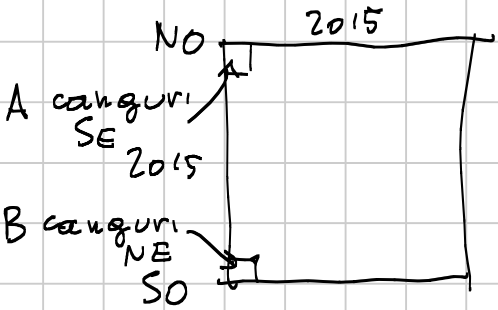
---- basta che $n\alpha < (m+1)\beta$

Se invece spostiamo da B ad A $m\beta < (n+1)\alpha$

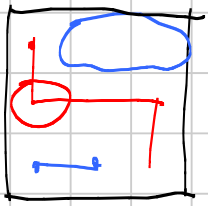
$\Rightarrow$ esistono α, β che fanno funzionare le cose
$(\alpha = m+1,\ \beta = n+1)$

da cui Q diminuisce ad ogni mossa, ma sono possibili solo un numero finito di valori per Q.

C4

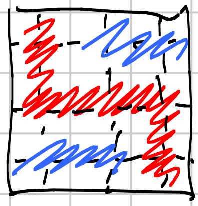


Dopo alcuni salti dei canguri, tutte le caselle sono state visitate da almeno un canguro. Quanti sono al minimo i canguri?

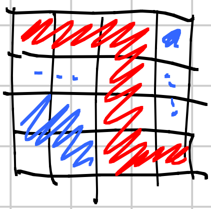


1. E' chiaro che con n si fa (0 punti)

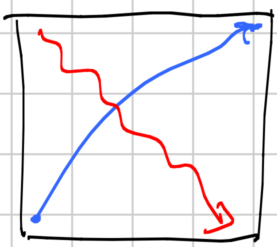
2. Sì con 2 canguri.



3. 6x6 con 4 canguri.



4. A mano vedo che 2 canguri non bastano 4x4, ma 3 sì.



5. Per dimostrare che $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$ è suffic., $n = 3k + r^{=0,1,2}$, faccio un bordino di r con canguri appositi e poi uso k canguri sopra e k sotto. (2-3 punti)

6. Perché non si può fare con meno canguri?

Oss. Se ci sono A canguri SE e B canguri NE, (che partono da un angolo e finiscono in quello opposto), ciascun canguro SE passa per almeno una casella per cui passa anche un canguro NE.

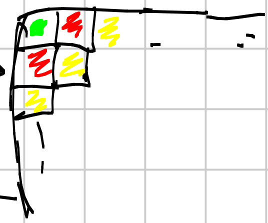
Quindi il totale delle caselle visitate è

$$2015^2 = n^2 \le (2\underset{2015}{n}-1)\cdot A + (2n-1)\cdot B - A\cdot B - \frac{A(A-1)}{2} - \frac{B(B-1)}{2} - \frac{B(B-1)}{2} - \frac{A(A-1)}{2}$$

Spreco $A-1$ per la casella NO

$A-2$

$A-3$



$A-1$

$A+B=K$

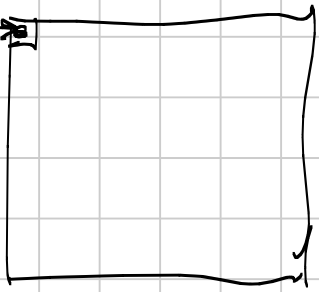
$4030(A+B) - A^2 - B^2 - AB$ $\qquad$ A^2+B^2+AB

$B, A \geq 671, 672 \Rightarrow$ Somma ≥ 1343

$\lceil \frac{2n}{3} \rceil$

Lunch problem:

Torre →



$n \times n$

la torre brucia le caselle in cui passa e non può passare né fermarsi su caselle bruciate.
Si muove a turno. Perde chi non può più muovere.
Chi vince?