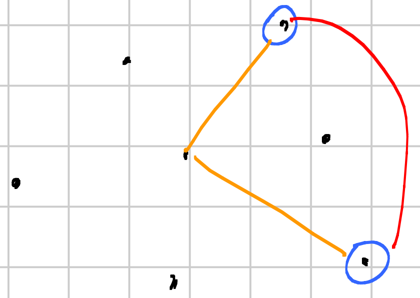
Preliminari 2015 - Combinatoria - pomeriggio

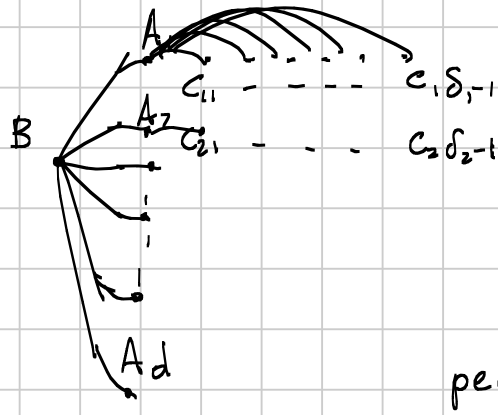
Titolo nota 27/05/2015

5)



Per ogni coppia di città che sono n
c'è un unico cammino con ≤ 2 archi.
Allora $n-1$ è un quadrato.

ma nessuna città ha grado $n-1$



d = grado di B
δ_1 = grado di A_1

1) Tutti i vertici sono B, A_i o C_{ij} per l'ipotesi
2) Questo grafo ancora non va bene.
A chi sarà collegata C_{11}?

perché C_{11} abbia un cammino lungo ≤ 2 che la connette ad A_2 serve che C_{11} sia collegata a
- A_2 no: sennò $BA_1C_{11}A_2$ è quadril.
- B no: sennò BAC_{11} triangolo
- una delle C_{2j} e una sola, sennò $C_{2j}\,C_{11}\,A_2\,C_{2k}$ è quadril.

(A_1 non va bene)

Quindi C_{11} è collegata a una e una sola $C_{2j}, C_{3j}, C_{4j} \dots C_{dj}$
e quindi ha grado $1+(d-1)=d$; e questo deve valere per tutte le C_{ij}. Quindi le C_{2j} sono tante quante le C_{1j}, C_{3j}, ... quindi $\delta_1=\delta_2=\dots=\delta_d$; e tutti questi sono $=d$, perché per ogni famiglia c'è un j t.c. C_{ij} è collegata a quella famiglia.

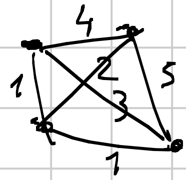
Quindi $n = \underbrace{1}_{B} + \underbrace{d}_{\text{grado di B = famiglie}} \cdot (\overset{A_i}{1} + \overset{C_{ij}}{d-1})$ → card. famiglia

Quante "Λ" ci sono nel grafo?
- V_i grado $d_i \Rightarrow \frac{d_i(d_i-1)}{2}$ "Λ"
- $\frac{n-1-d_i}{2}$ "Λ" di cui V_i è "piede".

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^2 - \cancel{d_i}}{\cancel{2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1-\cancel{d_i}}{\cancel{2}} \qquad \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = n(n-1)$$

Se ora so (l'ho dim. sopra) che tutti i d_i sono uguali, $\cancel{n}\cdot d^2 = \cancel{n}(n-1)$

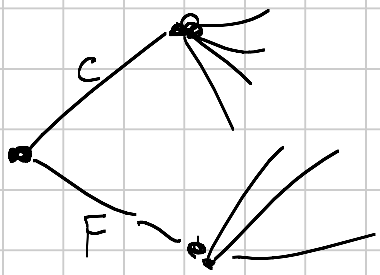
6) n città
ogni arco ha un prezzo



La formica parte da una città e le visita tutte ogni volta scegliendo l'arco con il prezzo minore tra quelli che la portano in una città ancora non visitata

La cicala invece sceglie ogni volta l'arco più costoso

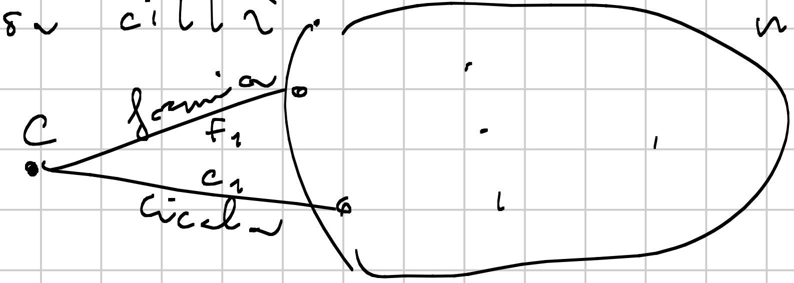
Tesi La cicala spende $\geq$ della formica



OSS. 1 Dopo la prima mossa, la cicala si ritrova ad applicare il suo algoritmo di visite a un mondo con $(n-1)$ città

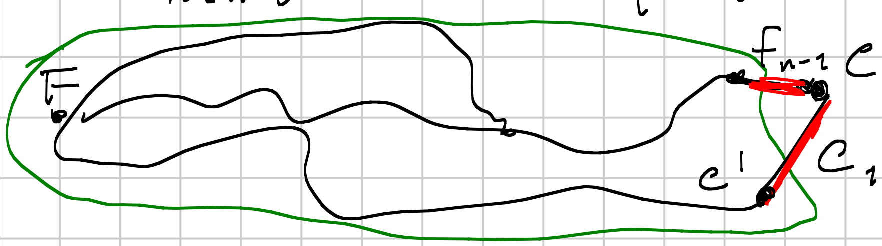
Il problema ci dice di voler essere risolto per induzione su n = n° di città.

1° caso La cicala e la formica partono dalla stessa città



$c_1 \geq F_1$ e poi anche in seguito la formica spenderà di meno, per ipotesi induttiva (ora i due insetti si muovono in un mondo con $n-1$ città)

2° caso La formica termina il suo percorso proprio nella città di partenza della cicala

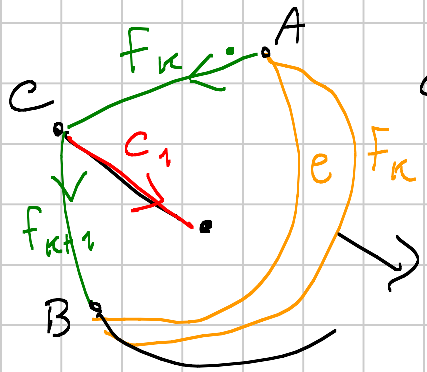


$c_1 \geq f_{n-1}$

c_1 è infatti uno degli archi più

costosi di quelli che escono da C.
La cicala a partire da C' fa il suo percorso.
Se cancello C all'inizio, la formica comunque fa lo stesso percorso: ogni volta andare in C non sarebbe necessario

3 caso La formica arriva e riparte dalla città iniziale della cicala



$c_1 \geq f_{k+1}$ come al solito

$c_1 \geq f_k$

$e \geq f_k$ perché la formica va in C e non in B

Se sostituisco e con f_k ed elimino C, la formica fa lo stesso percorso, andando da A direttamente in B e risparmiando f_{k+1}

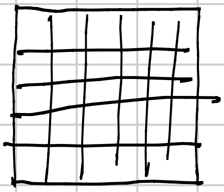
Ma sostituire un peso può causare problemi alla cicala

Aggiungo un secondo arco di peso f_k. Per farlo devo generalizzare tutto il problema.

Riparto da capo Dato un multigrafo completo su n città ogni arco ha un peso, la cicala e la formica fanno come prima, allora la cicala spende di più

Ora l'induzione funziona, e anche i primi due casi (ricontrollare per esercizio)

Problema C7



100×100 numeri da 1 a 10000

Sceglie k numeri, poi può scegliere numeri < sulla colonna e numeri > sulla riga. Min k?

Oss. Se scelgo min di una riga, ho tutta la riga.

Min $K = 1$.

$A \succ B$ se segnato A riesco a segnare B

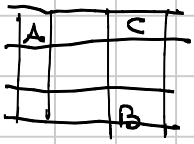
Cerco chi sono i massimali.

Supponiamo che esistano A, B massimali non confrontabili

I caso. A, B sulla stessa colonna. Questo si risolve da solo

II caso. A, B " " riga. " " " " "

III caso A, B a caso

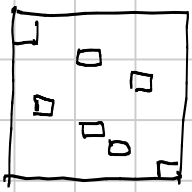


WLOG $A > B$.

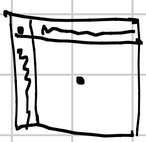
- Se $A > C > B$, allora $C \succ A$ $C \succ B$
- Se $C > A > B$ allora $C \succ B$ $A \succ C$ $\Rightarrow$ $A \succ B$
- Se $A > B > C$ " $C \prec B$ $A \prec C$ $\Rightarrow$ $B \succ A$

Così ho finito.

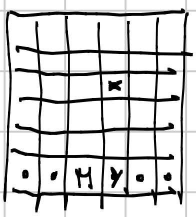
Sol alternativa



Se ci fosse una casella min di riga e max di colonna, avrei vinto. Però é falso, non lo trovo sempre



Prendiamo il max tra i min.



- Ci guadagniamo la riga.
- Se x è un min, allora $x < M < Y$, quindi lo prendo
- Ora ì tutti i min, quindi ho vinto.

Problema C8

Grafo completo su n vertici con gli archi pesati

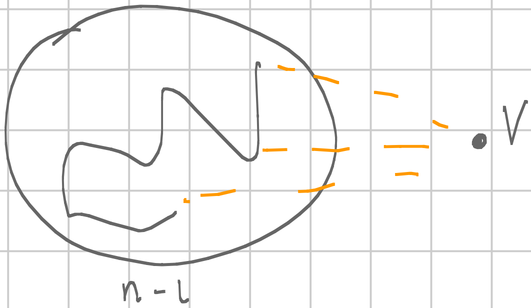
$\Rightarrow$ esiste un cammino lungo $\geq n-1$ archi con pesi decrescenti

(i pesi degli archi sono tutti diversi)

Proviamo

idea n° 1 : induzione su n

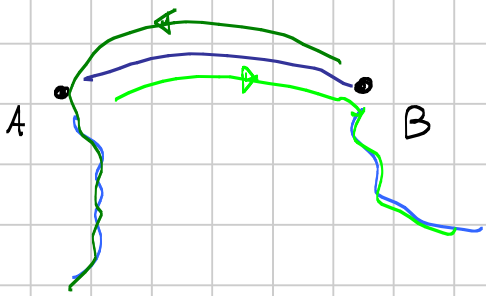
il punto sarebbe aumentare un percorso di 1



idea 1.1 scegliere in modo accurato V (il vertice da togliere)

idea 2.0 induzione sugli archi

Soluzione: togliamo tutti gli archi e li ri-aggiungiamo uno alla volta
scegliamo di rimetterli in ordine dal più leggero



Oss: i percorsi verdi sono + lunghi di quelli azzurri

$\forall$ vertice v e in ciascun istante
$\exists$ un percorso massimo e decrescente che parte da v

$$Q = \sum_{v} \text{lungh}(\text{max perc. d. che parte da } v)$$

quando aggiungo il percorso massimo da B è lungo $\geq$ 1 + il massimo da A prima di aggiungere

simmetricamente il p. m. da A $\geq$ 1 + il max da B prima di aggiungere

$$Q' \geq Q + 2$$

Alla fine $Q \geq 2|E| = n(n-1)$
quindi il percorso medio $\geq \dfrac{Q}{n} = n-1$