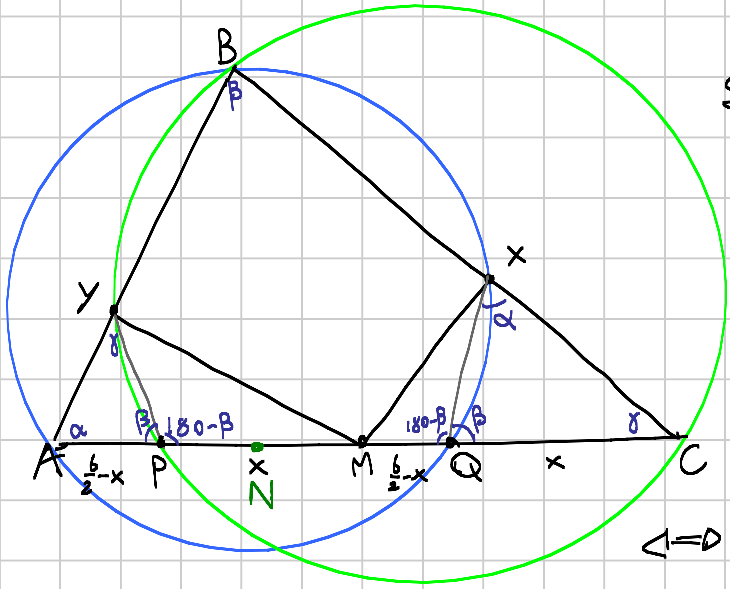
Geometria Mattina PreImo 2015

Titolo nota 26/05/2015



$PQ = \frac{AC}{2}$

Soluzione 1: Angoli

$Y\hat{P}C = 180-\beta$

$X\hat{Q}A = 180-\beta$

$\triangle APY \sim \triangle XQC$ (per angoli)

Th $\Leftrightarrow Y\hat{M}X = 180-\beta \Leftrightarrow X\hat{M}Q + Y\hat{M}P = \beta$

$\Leftrightarrow P\hat{Y}M = X\hat{M}Q \Leftrightarrow \triangle PMY \sim \triangle QXM$

Hanno un angolo in comune, basta dimostrare che $\frac{PY}{PM} = \frac{QM}{QX}$

$$\frac{PY}{PM} = \frac{PY}{QC} = \frac{AP}{QX} = \frac{MQ}{QX} \qquad \begin{cases} AP = MQ \\ PM = QC \end{cases}$$

similitudine di $\triangle APY$ e $\triangle XQC$

Ora $P\hat{M}Y = M\hat{X}Q \Rightarrow P\hat{M}Y + Q\hat{M}X = \beta \Rightarrow Y\hat{M}X = 180-\beta \Rightarrow BXMY$ ciclico.

Soluzione 2: metrica. Prendo $N \in AC$ tale che $AN \cdot AM = AP \cdot AC$ $(= AY \cdot AB)$

Ho (per def.) $BYNM$ ciclico.

Voglio dimostrare che $BXNM$ è ciclico. Voglio dim $CM \cdot CN = CX \cdot CB$

Abbiamo $AN = AP \cdot \frac{AC}{AM} = 2AP$ $\qquad CN = 6 - 2AP = 6 - 2(\frac{6}{2} - x) = 2x$

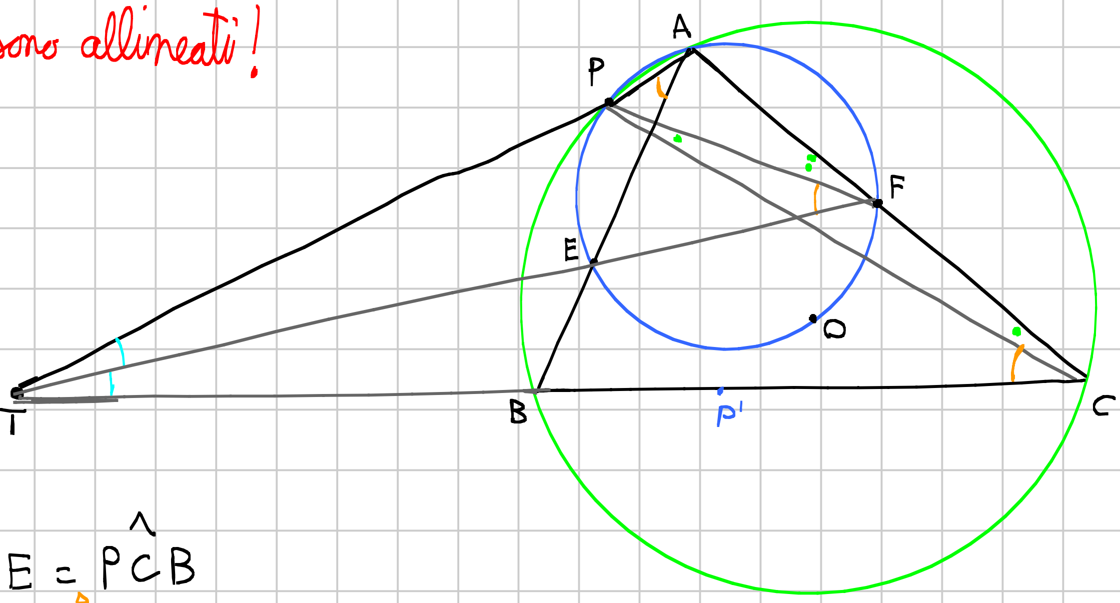
$CM \cdot CN = CQ \cdot CA$ $\qquad (CN = CQ \cdot \frac{CA}{CM} = 2CQ$

$CM \cdot CN = CQ \cdot CA = CX \cdot CB \Rightarrow MNXB$ ciclico

X e Y stanno sulla circoscritta di $MNB \Rightarrow BXMY$ ciclico.

A, P, T non sono allineati!

$T = EF \cap BC$



$$\widehat{PFE} = \widehat{PAE} = \widehat{PCB}$$

insistono su PE — insistono su PB

TPFC ciclico (per i due angoli)

$P' \in BC \iff \widehat{CTF} = \widehat{FTP} \iff PF = FC \iff PFC$ è isoscele $\iff$

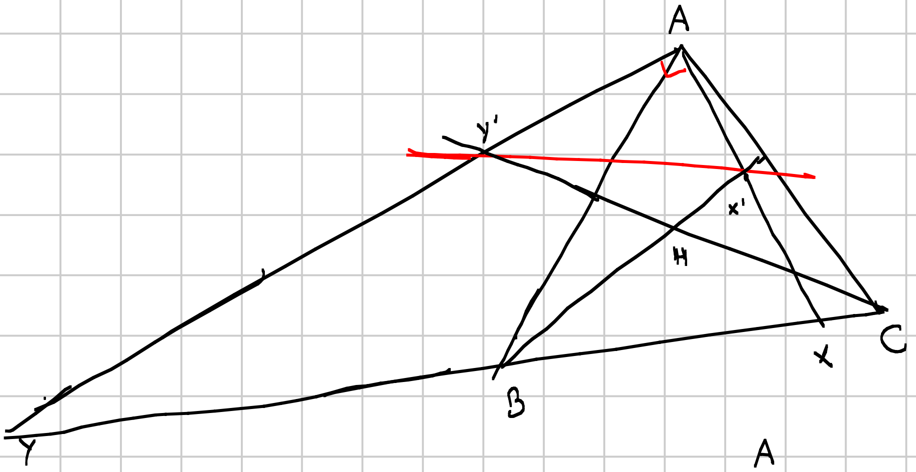
ciclicità TPFC

$\iff \widehat{PFC} = 180 - 2\widehat{FCP} \iff \widehat{PFA} = 2\widehat{PCF}$

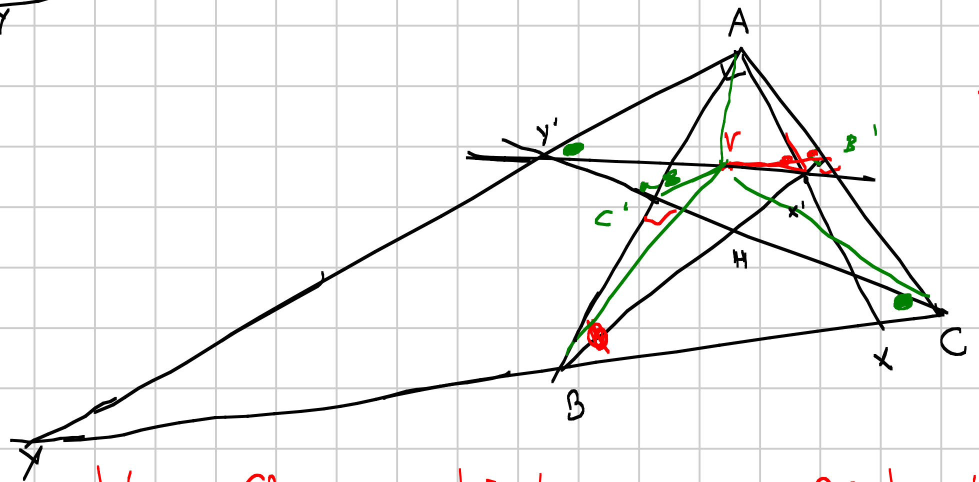
Ma $\widehat{POA} = 2\widehat{PCF} \left(= 2\widehat{PCA}\right)$ (è angolo al centro di Γ_{ABC})

Quindi $\widehat{PFA} = 2\widehat{PCF} = \widehat{POA}$

$P' \in BC \iff \widehat{PFA} = \widehat{POA} \iff PAFO$ ciclico $\iff O \in \Gamma$



$\widehat{XAY} = 90°$



Soluzione

Th $\odot CYY'$, $\odot BXX'$, $X'Y'$ concorrenti

<u>Idea</u>: Che proprietà deve avere il p.to di int., posto che la tesi sia vera

Se riesco a trovare una bella proprietà di V, faccio al contrario! Prendo $V \in X'Y'$ che soddisfa la proprietà e mostro che $CYY'V$ e $BXX'V$ sono ciclici

Prendo V t.c. $AV \perp X'Y'$, $V \in X'Y'$.

(1) $AY'C'V$ ⟹ (2) $AVX'B'$ ciclici

Voglio che <u>$CYY'V$ ciclico</u> $\iff \widehat{AY'V} = \widehat{VCY}$

Ma $\widehat{AY'V} = \widehat{ACV}$ per come ho preso V.

Quindi $CYY'V$ ciclico $\iff \widehat{ACV} = \widehat{VCY} \iff$ <u>$VC'BC$ ciclico</u> (3)

Voglio che <u>$BXX'V$ ciclico</u> $\iff \widehat{AX'V} = \widehat{VBC}$

Ma $\widehat{AX'V} = \widehat{AB'V}$ poiché (4)

Quindi $BXX'V$ ciclico $\iff \widehat{AB'V} = \widehat{VBC} \iff$ <u>$B'VCB$ ciclico</u>

le ciclicità in (3) e (4)

Quindi mi basta mostrare che $BC'VB'C$ ciclico

Cioè mi basta mostrare $VC'CB'$ ciclico, cioè

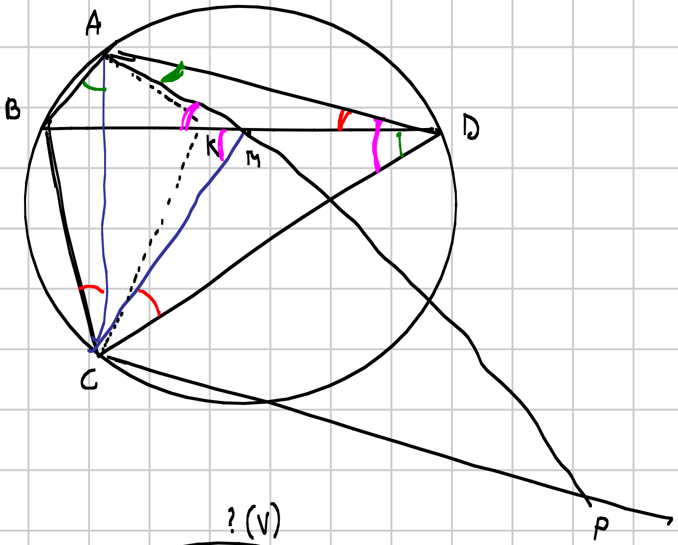
cioè <u>$\widehat{VC'Y'} = \widehat{VB'C}$</u> (che mostro questo ho concluso)

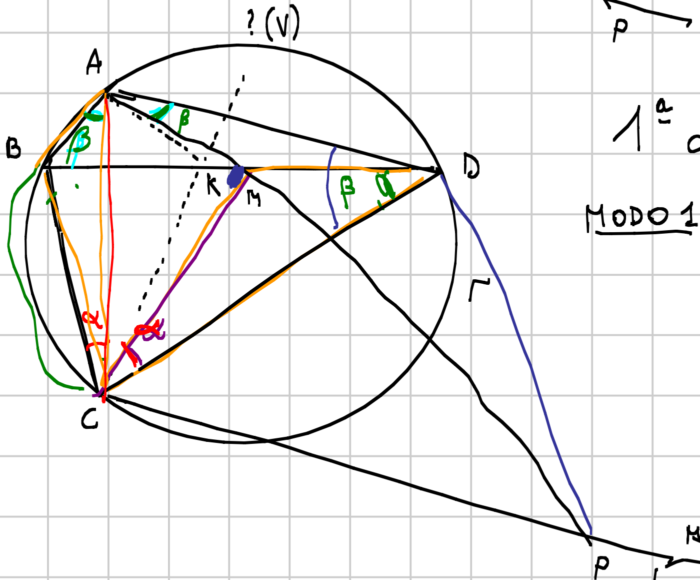
$\widehat{VB'C} = 180 - \widehat{VB'A} = 180 - \widehat{VX'A} = 180 - (90 - \widehat{AY'V}) = 90 + \widehat{AY'V} =$ ($AY'C'V$ ciclo)

$AVX'B'$ ciclico

$= 90 + \widehat{AC'V} = \widehat{VC'Y'}$

<u>che era ciò che volevo</u>

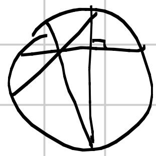




Soluzione

1ª cosa: Cosa vuol dire l'ipotesi?

MODO 1: Potrò sfruttare in qualche modo che AK interseca Γ in V p.to medio dell'arco $\widehat{BD}$? (e simm.)



← ?

MODO 2: Per il th. della bisettrice

$$\boxed{\frac{BK}{KD} \stackrel{?}{=} \frac{BC}{CD} \quad \to \frac{BK}{KD} = \frac{AB}{AD}}$$

Quindi Hp. ⟺ $\boxed{AB \cdot CD = BC \cdot AD}$ (1)

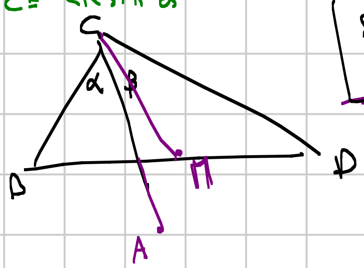
Quad. armonico

1. CHI NON SA

(1) ⟺ $\sin\alpha \cdot \sin\gamma = \sin\beta \cdot \sin\delta$ ⟺ $\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \frac{CB}{CD}}$

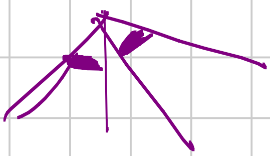
$AB = 2R\sin\alpha$
$AD = 2R\sin\beta$
$CD = 2R\sin\gamma$
$BC = 2R\sin\delta$

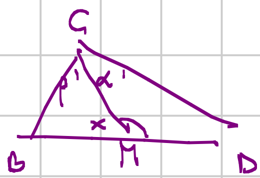
Quindi cosa ho?



$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{CB}{CD}}$$

Questo vuol dire che la ceviana CA è la simmetrica rispetto alla bisettrice di CM.





$$\left.\begin{aligned}\frac{BM}{\sin\beta'} &= \frac{BC}{\sin x}\\ \frac{MD}{\sin\alpha'} &= \frac{CD}{\sin x}\end{aligned}\right] \Rightarrow \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{BC}{CD}$$

$\Downarrow$

$\alpha' = \alpha$

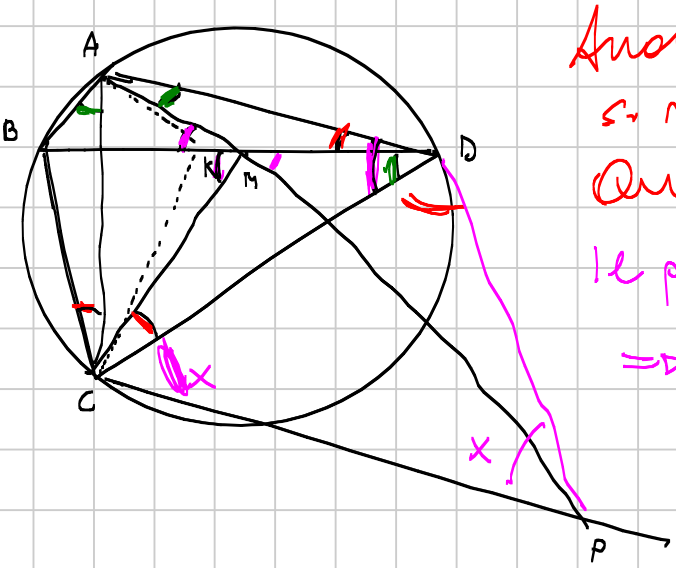
Abbiamo concluso che CA è la simmetrica di CM rispetto alla bisettrice di $B\hat{C}D$ ⟹ Quindi $B\hat{C}A = D\hat{C}M$.

Analogamente $B\hat{A}C = D\hat{A}M$.

Se ne deduce la similitudine di $\triangle ABC$ e $\triangle CMD$ ⟹

⟹ $C\hat{M}D = A\hat{B}C$ ⟹ $\underbrace{180 - C\hat{M}D}_{= B\hat{M}C} = 180 - A\hat{B}C = A\hat{D}C$

Quindi $B\hat{M}C = A\hat{D}C$



Analogamente a prima si mostra che $A\hat{M}B = A\hat{D}C$

Quindi MB è la bisettrice di $A\hat{M}C$

Il parallelismo di AD e CP $\Rightarrow$

$\Rightarrow A\hat{D}C \overset{(1)}{=} D\hat{C}P \overset{(2)}{=} D\hat{M}P$

perché $A\hat{D}C = A\hat{M}B = D\hat{M}P$

(1) vale per il parallelismo

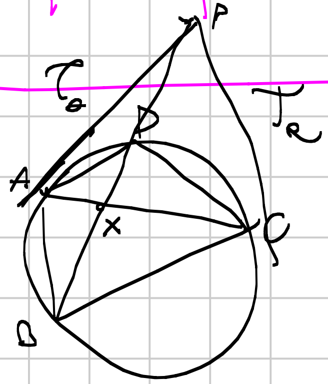
(2) per quello che abbiamo detto prima

Ma allora DMCP è ciclico perché $\underline{D\hat{C}P = D\hat{M}P}$

Ma allora $C\hat{D}P = C\hat{M}P = 180 - 2x$

A questo punto $D\hat{P}C = 180 - C\hat{D}P - D\hat{C}P = 180 - (180 - 2x) - x$

$= x \Rightarrow D\overset{\triangle}{P}C$ è isoscele



Se ABCD è armonico $\Rightarrow T_a$, BD, T_c concorrono

~~B, X, D, P~~ B, D, X, P è una quaterna armonica

$$\frac{BX}{XD} \cdot \frac{DP}{PB} = -1$$