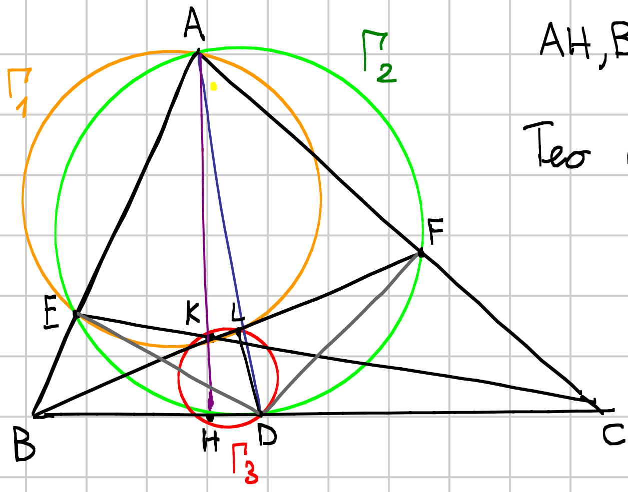
Geometria Pomeriggio PreIMO 2015

Titolo nota 26/05/2015

(5)



AH, BF, CE concorrono.

Teo Ceva

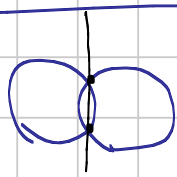
$$\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AE}{EB} =$$

$$= \frac{AB\cdot\cancel{\cos\beta}}{AC\cdot\cancel{\cos\gamma}}\cdot\frac{CD\cdot\cancel{\cos\gamma}}{\cancel{AD\cos\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{\cancel{AD\cos\frac{\alpha}{2}}}{BD\,\cancel{\cos\beta}} =$$

$= \frac{AB}{AC}\cdot\frac{CD}{BD} = 1$ per il teorema della bisettrice $\Rightarrow$ BF, CE, altezza concorrono (in K)

Assi radicali

$PA\cdot PB = pow_{\Gamma}(P)$



Prese Γ_1 e Γ_2 $\quad pow_{\Gamma_1}(P) = pow_{\Gamma_2}(P)$ è una retta.

Fatto Prese tre circonferenze, i tre assi radicali di ogni coppia di esse concorrono

$P \in a(\Gamma_1,\Gamma_2) \quad P \in a(\Gamma_2,\Gamma_3) \Rightarrow P \in a(\Gamma_1,\Gamma_3)$

Γ_3 = circoscritta a KLD

$a(\Gamma_1,\Gamma_2) = AB \qquad a(\Gamma_1,\Gamma_3) = KL \Rightarrow$ si intersecano in B!

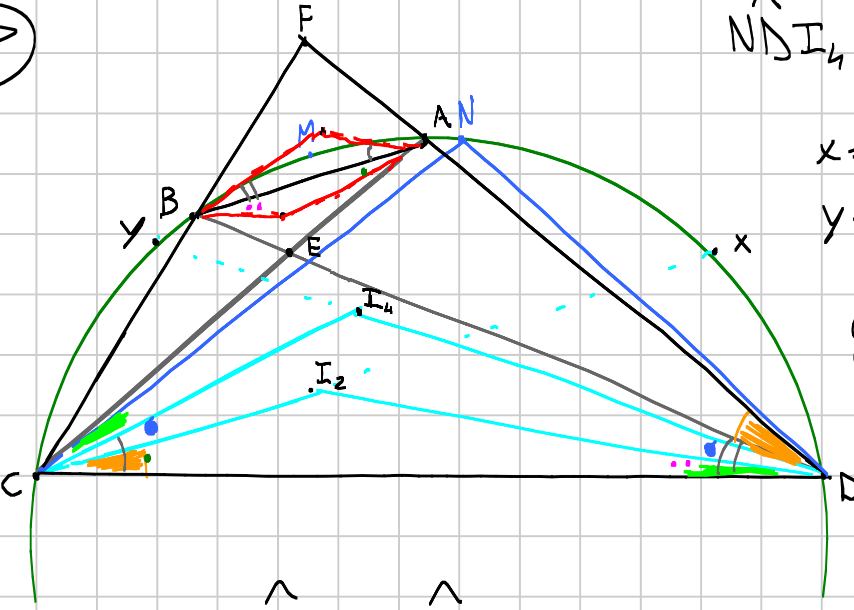
$B \in a(\Gamma_2,\Gamma_3)$ Detto X il p.to di intersezione di $\Gamma_2\,\Gamma_3$ $\quad X \neq D$

si ha $\underline{X \in BD}$

$X \in \Gamma_2 \Rightarrow X = BD \cap \Gamma_2 \Rightarrow X = H$

$\widehat{KLD} = 180^\circ - \widehat{KHD} = 90^\circ$

7



$\widehat{NDI_4} = \widehat{DCI_2}$

x = p.to medio $\widehat{AD}$

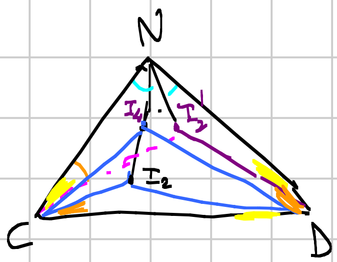
y = p.to medio $\widehat{AC}$

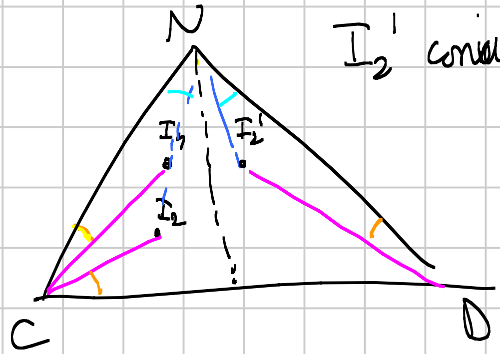
gli angoli sono uguali $\Leftrightarrow \widehat{yN} = \widehat{xD}$

$$\widehat{yN} = \widehat{CN} - \widehat{Cy} = \frac{\widehat{CD}}{2} - \frac{\widehat{CA}}{2}$$

$$\widehat{xD} = \widehat{DN} - \widehat{Nx} = \frac{\widehat{CD}}{2} - \frac{\widehat{CA}}{2}$$

Analogamente $\widehat{NCI_4} = \widehat{CDI_2}$





I_2' coniugato isog di I_2

$\overset{\triangle}{NCD}$ isoscele I_2' è il simmetrico di I_4 risp. all'asse di CD

$$\widehat{CNI_2} = \widehat{DNI_2'} = \widehat{CNI_4}$$

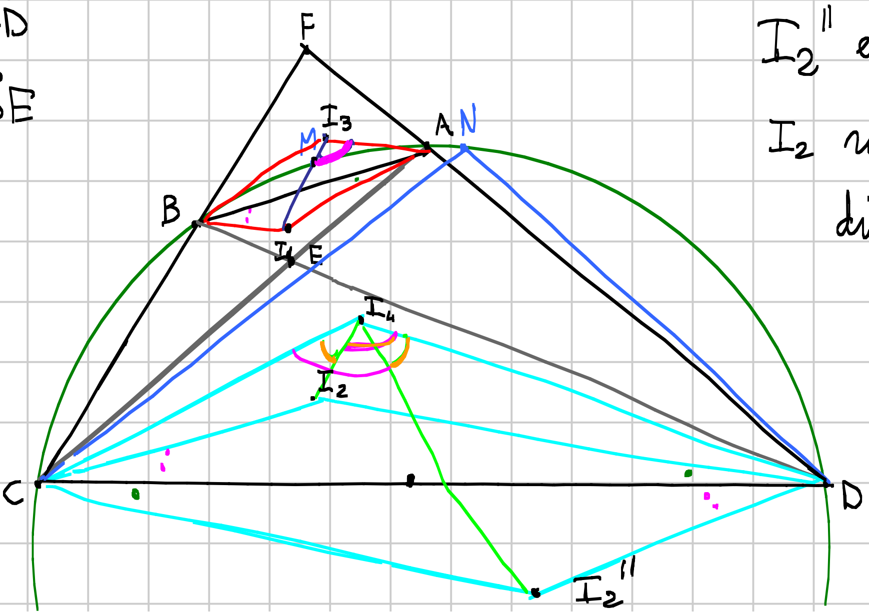
I_2' è coniug. isogonale

I_4 e I_2' sono simmetrici risp. asse di CD

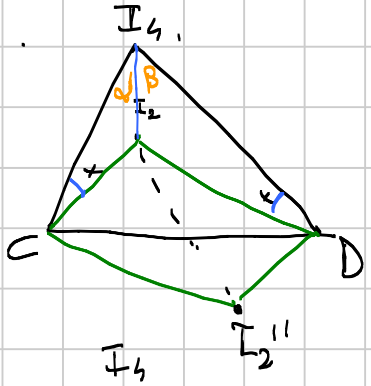
Da questo segue $N I_2 I_4$ allineati

$\widehat{FAB} \sim \widehat{FCD}$

$\overset{\triangle}{ABE} \sim \overset{\triangle}{CDE}$



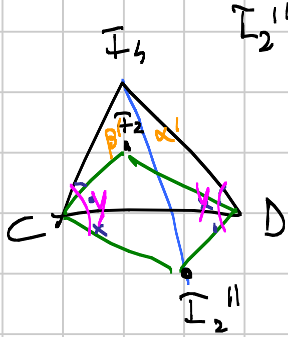
I_2'' è il simmetrico di I_2 risp. al p.to medio di CD



$$\frac{CI_2}{\sin\alpha} = \frac{I_4 I_2}{\sin x} = \frac{I_2 D}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{CI_2}{I_2 D}$$

teo seni $I_4 I_2 C$

teo seni $I_4 I_2 D$



Esattamente come prima

$$\frac{CI_2''}{\sin\beta'} = \frac{DI_2''}{\sin\alpha'} \qquad \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{DI_2''}{I_2''C} = \frac{CI_2}{I_2 D} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$\Rightarrow \alpha = \alpha'$

Vogliamo $DI_4'CI_2'' \sim BI_3AI_1$

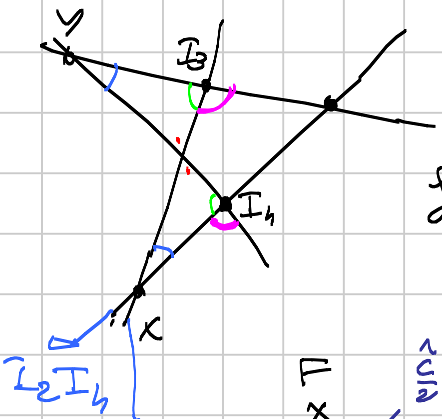
Simmetria risp. bisettrice più omotetia $A \to C$ $\quad B \to D$ $\quad I_3 \to I_4$ $\quad I_1 \to I_2''$

$$A\hat{I_3}I_1 = C\hat{I_4}I_2'' = D\hat{I_4}I_2$$

Qual è l'angolo che insiste su MN?

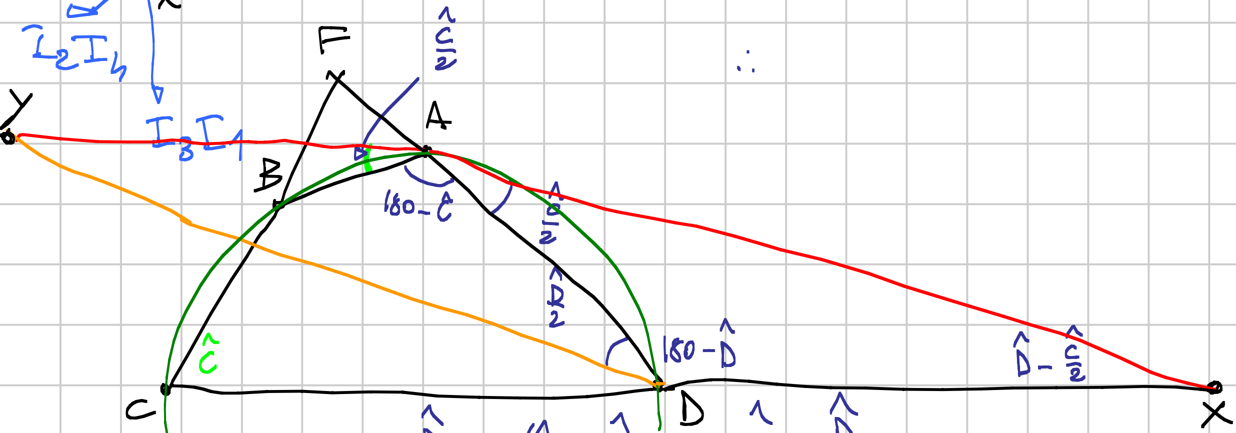
Dico $\hat{D}$ $\quad \hat{C}$ $\qquad$ Conto di angoli: su MN si ha un angolo di $\frac{\hat{C}-\hat{D}}{2}$

$\Rightarrow$ Basta dimostrare che l'angolo fra I_1I_3 e I_2I_4 è $\frac{\hat{C}-\hat{D}}{2}$



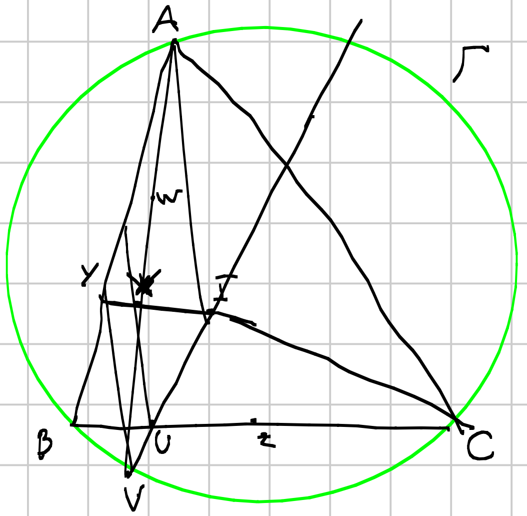
$\Rightarrow \hat{X} = \hat{Y} \Rightarrow$

L'angolo fra I_1I_3 e I_2I_4 è l'angolo fra AI_3 e DI_4



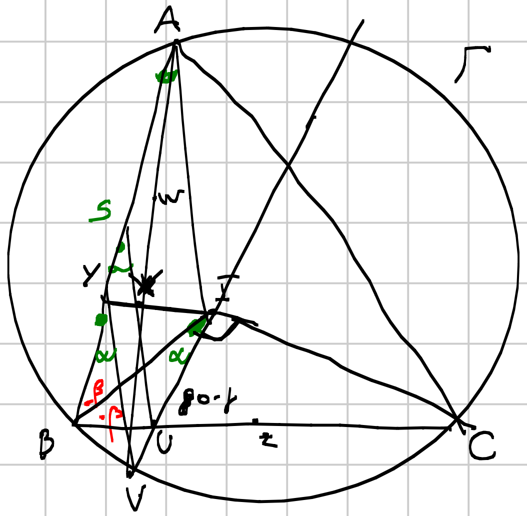
$$D\hat{Y}X = 180 - \left(180 - \frac{\hat{D}}{2}\right) - \left(\hat{D} - \frac{\hat{C}}{2}\right) = \frac{\hat{C}}{2} - \frac{\hat{D}}{2}$$

8



Sol.

Chiamo $\alpha = \frac{\hat{A}}{2}$, $\beta = \frac{\hat{B}}{2}$, $\gamma = \frac{\hat{C}}{2}$.



$C\hat{U}I = 90 - \gamma$

$B\hat{U}I = 90 + \gamma$

$\Downarrow$

$B\hat{I}U = 180 - I\hat{B}U - B\hat{U}I =$

$= 180 - \beta - (90 + \gamma) =$

$= 90 - \beta - \gamma = \alpha$.

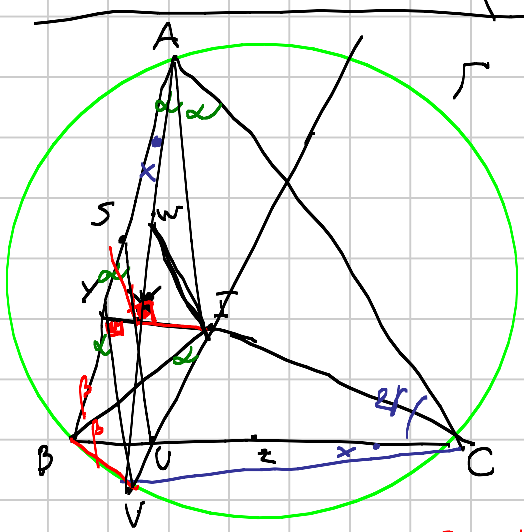
Ma il parallelismo $VX // AI \Rightarrow B\hat{Y}V = B\hat{A}I = \alpha$

Questo ci dice che $\boxed{BYIV \text{ è ciclico}}$ (1). Sia $S = XU \cap AB$

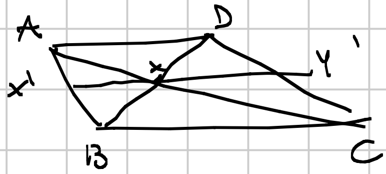
Ma per il parallelismo $AI // SU \Rightarrow B\hat{S}U = B\hat{A}I = \alpha$

Questo ci dice che $\boxed{BSIU \text{ è ciclico}}$ (2). Ma noi abbiamo che $S\hat{B}I = I\hat{B}U$ perché BI è bisettrice. Quindi, siccome $BSIU$ è ciclico $\Rightarrow \boxed{IS = IU}$ (3)

Cosa ci dice l'ultima parte dell'ipotesi?



AYVI è un trapezio



Per Talete $x'x = xy'$!

Hp $\Rightarrow \boxed{XS = XU!}$ (4)

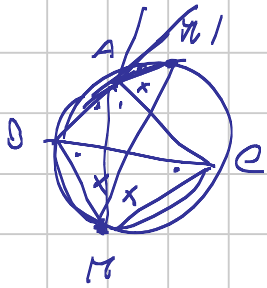
(4) + (3) $\Rightarrow \boxed{XI \perp SU}$ (5)

Questo (5) + $YV // SU \Rightarrow \boxed{IY \perp YV}$ (6)

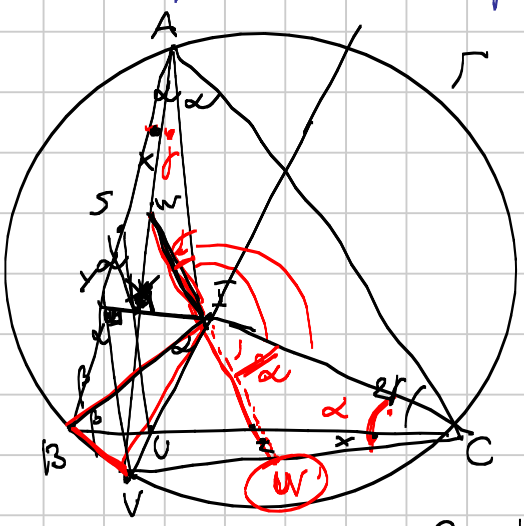
(6) + BYIV ciclico (1) $\Rightarrow$ $\boxed{V\hat{B}I = 90°}$ (7) $\Rightarrow$ BV è bisettrice esterna di $A\hat{B}C$ $\Rightarrow$ $V\hat{A}C = A\hat{C}V$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Chiamo $BAV = x$ $\Rightarrow$ $2\alpha - x = 2\gamma + x$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \alpha - \gamma$



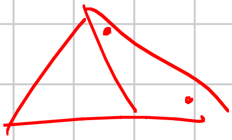
Ma quindi $\boxed{X\hat{A}I = \gamma}$ (8) (per differenza)



$W\hat{I}A = \gamma$ perché $AIY = 90°$ (vedi prima)

Voglio mostrare che ? $= \alpha$

Ma noto che $ICV = \alpha$



~~Questo~~ Quindi th $\Leftrightarrow$ $IW \cap CV$ è il punto medio di CV

Oss. $IW \parallel BV$: mi basta mostrare che $W\hat{I}V + I\hat{V}B = 180°$

Ma $W\hat{I}V = W\hat{I}Y + Y\hat{I}V = 90 - \gamma + 180 - (Y\hat{B}V) =$

$= 90 - \gamma + 180 - (Y\hat{B}I + I\hat{B}V) =$

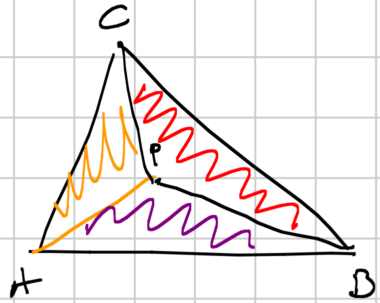
$= \cancel{90} - \gamma + 180 - \beta - \cancel{90} = 90 + \alpha$

$I\hat{V}B = 90 - BIV = 90 - \alpha$

Quindi $W\hat{I}V + I\hat{V}B = 90 + \alpha + 90 - \alpha = 180$

Oss. 2 $IW \cap CV = W'$ chi è W'? $\Rightarrow$ $W' =$ p.to medio di CV

Quindi ho concluso



$[\lambda[BPC] : \lambda[CPA] : \lambda[APB]]$

Ad es.

G $[1:1:1] = [\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}]$ (esatte)

I $[a:b:c]$

⋮

Fatto 1 Ogni retta del piano, allora si scrive come $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$

Dim. Glossario e teoria di base (Evariste G) (olifoam)

Fatto 2 $\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0$
$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0$

$$\left[\det\begin{pmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{pmatrix} : -\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{pmatrix} : \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix}\right]$$

Dove definisco $\det\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix} := xw - yz$

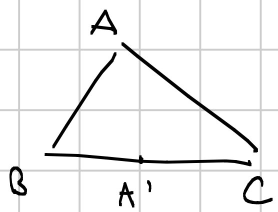
Dim. Usare fatto 1

Fatto 3 Dati $[p_1 : q_1 : r_1]$, $[p_2 : q_2 : r_2]$ $\longrightarrow$ la retta su cui giacciono è

$$\det\begin{pmatrix}q_1 & r_1\\ q_2 & r_2\end{pmatrix} x - \det\begin{pmatrix}p_1 & r_1\\ p_2 & r_2\end{pmatrix} y + \det\begin{pmatrix}p_1 & q_1\\ p_2 & q_2\end{pmatrix} z = 0$$

Dim. Usare fatto 1

A' $[0:1:1]$
B' $[1:0:1]$
C' $[1:1:0]$



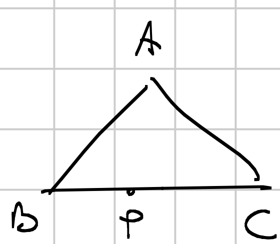
Per def.

$[[BA'C] : [CA'A] : [AA'B]]$

$[0 : 1 : 1]$

N $[(p-a) : (p-b) : (p-c)]$ dove $p = \frac{a+b+c}{2}$

Dim. Quanto valgono le coordinate di P su un lato? Completa...



$A_1 = B'C' \cap EF = [b-c : a-c : b-a]$

$Y = A_1B \cap A'C' = [c-b : a+c-2b : a-b]$

$Z = A_1C \cap A'B' = [c-b : c-a : 2c-a-b]$

(Oss. a, b, c lati del triangolo)

Oss.? $[p_1 : q_1 : r_1]$, $[p_2 : q_2 : r_2]$, $[p_3 : q_3 : r_3]$ allineati $\Leftrightarrow$ $\det\begin{pmatrix}p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\\ p_3 & q_3 & r_3\end{pmatrix} :=$

$= p_1 q_2 r_3 + q_1 r_2 p_3 + r_1 p_2 q_3 - p_3 q_2 r_1 - p_1 q_3 r_2 - r_3 p_2 q_1 = 0$

Dim. Fatti precedenti

La th. è equivalente a $Y\,Z\,I$ allineati + (1)

$Y\,L\,N$ allineati

Ovvero mostrare che

$$\det\begin{pmatrix} c-b & a+c-2b & a-b \\ c-b & c-a & 2c-a-b \\ a & b & c \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} c-b & a+c-2b & a+b \\ a & b & c \\ b+c-a & a+c-b & a+b-c \end{pmatrix} = 0$$

Che sono vere.