# PREIMO 2015 — TDN MATTINO

Titolo nota 25/05/2015

## Esercizio N1 $\quad 2^n + n = m!$

$m = 1$ No

Allora $m!$ deve essere pari $\Rightarrow$ $n$ deve essere pari

$n = 2^k s$ $\quad$ $s$ dispari.

Se $k = 1$ $\quad 2 \,\|\, m!$

$m = 2, 3$ $\quad 2^2 + 2 = 3!$

Sol. $(m, n) = (3, 2)$

$k \geq 2$ Considero una eventuale soluzione

$$m! = 2^n + n \geq 2^{2^k} + 2^k \geq \ldots$$

$$2^k \,\|\, 2^n + n$$

Per esempio, dimostriamo che $2^{2^k} + 2^k > (2k-1)!$

Se dimostriamo questo, $m \geq 2k$

$m!$ è divisibile per $2^{k+1}$.

Verifica di alcuni casi iniziali

Dimostrazione per induzione: $k \Rightarrow k+1$

Basta dimostrare: $\dfrac{2^{2^{k+1}} + 2^{k+1}}{2^{2^k} + 2^k} > (2k+1) \cdot 2k$

cioè $$2^{2^{k+1}} + 2^{k+1} > \left(2^{2^k} + 2^k\right) \cdot (2k+1) \cdot 2k$$

Osserviamo che:

- $2^{2^k} + 2^k < 2 \cdot 2^{2^k}$
- $k \leq 2^k - 1 \Rightarrow 2k < 2^{k+1}$

$\qquad 2k+1 \leq 2^{k+1}$

Il termine a destra è minore di

$$2^{2^k + 1} \cdot 2^{k+1} \cdot 2^{k+1} = 2^{2^k + 2k + 3}$$

e questo è evidentemente $< 2^{2^{k+1}}$
per $k$ grande $(k \geq 4)$.

## Esercizio N2

$cm$ e $cn$ hanno le stesse cifre $\neq 0$

WLOG $m \geq n$.

ENUNCIATO PER $(rm, rn) \Rightarrow$ ENUNCIATO per $(m, n)$

$n = 2^a 5^b \ell$ $\qquad r = 2^b 5^a$ $\qquad rn = 10^{a+b} \ell$

Posso limitarmi al caso $(n, 10) = 1$.
$m$ rimane qualsiasi.

Oss. $(10m - n, 10) = 1$

Quindi esiste $k$ tale che $10^k \equiv 1 \pmod{10m-n}$
cioè $10^k - 1 = c(10m - n)$
ossia

$$\boxed{10cm + 1 = 10^k + cn}$$

Quante cifre hanno $cm$ e $cn$?

$10^k = 10cm - cn + 1 > 10cn - cn = 9cn > cn$
$\Rightarrow$ le cifre di $cn$ sono al più $k$.

Invece $cm$ ha esattamente $k$ cifre

- $10cm + 1 \geq 10^k + 1$ $\qquad cm \geq 10^{k-1}$ $\rightarrow$ almeno $k$ cifre
- $10cm + 1 < 10^k + 10^k = 2 \cdot 10^k \leq 10^{k+1}$
  $cm < 10^k$ $\rightarrow$ al più $k$ cifre.

$cm = \overline{a_1 a_2 \cdots a_k}$ $\leftarrow$ (cifre decimali)
$cn = \overline{b_1 b_2 \cdots b_k}$ con eventuali zeri iniziali.

$$10\,cm + 1 = 10^k + cn$$

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_k 1} = \overline{1 b_1 b_2 \dots b_k}$$

$a_1 = 1$ $\quad b_k = 1$

$a_2 \dots a_k$ sono uguali a $b_1 \dots b_{k-1}$

---

Esercizio N3 $\qquad n > 3$ dispari $\quad m = \phi(n)$

$\exists\, q$ primo $\quad q \mid 2^m - 1 \quad q \nmid n$

Eulero $\quad 2^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ cioè $\quad n \mid 2^m - 1$.

1° caso $\quad n = p^k > 3 \qquad m = p^k - p^{k-1}$ è pari $\geq 4$.

Sia $p \mid n$. Allora $\quad p \mid 2^m - 1 = (2^{m/2} - 1)(2^{m/2} + 1)$

entrambi $> 1$

$p$ divide uno dei fattori a destra

Sia $q$ primo che divide l'altro fattore

$q \mid 2^m - 1 \qquad q \neq p. \qquad q \nmid p^k = n$

2° caso $\quad n$ ha almeno due fattori primi distinti.

$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots$

$m = \phi(n) = (p_1 - 1) p_1^{a_1 - 1} (p_2 - 1) p_2^{a_2 - 1} \dots$

$m$ è divisibile per 4

$p_i - 1 \mid \frac{m}{2}$

Fermat $\qquad 2^{m/2} \equiv 1 \pmod{p} \qquad \forall p \mid n$

$p \mid n \mid 2^m - 1 = (2^{m/2} - 1)(2^{m/2} + 1)$

Tutti questi primi dividono $2^{m/2} - 1$.

$\Rightarrow$ Ogni fattore primo $q$ di $2^{m/2} + 1$ divide $2^m - 1$, ma non divide $m$

---

# Esercizio N4

$a$ tale che $\exists$ sol. intere positive di
$$(m^2+n)(m+n^2) = a(m-n)^3.$$

(a) Ci sono almeno 500 numeri amichevoli nell'intervallo $[1, 2015]$.

Tentativo di trovare dei numeri amichevoli
$$m-n=k \qquad m=n+k$$
Provo a far comparire $k^2$ in uno dei fattori, per esempio a destra:
$$n+k+n^2 \qquad k=n+1$$
$$(n+1)^2$$
Provo con $k=n+1$ $\qquad m=n+k=2n+1$.
L'altro fattore diventa
$$m^2+n = (2n+1)^2+n = 4n^2+5n+1 = (n+1)(4n+1)$$

Il prodotto è : $(n+1)^3(4n+1)$
$a=4n+1$ è OK.

---

(b) 2 è amichevole?

Partiamo dall'uguaglianza
$$(m^2+n)-(m+n^2) = (m-n)(m+n-1).$$
Poniamo $\qquad x = m+n^2$
$$m^2+n = x+(m-n)(m+n-1)$$

$$x\left(x+(m-n)(m+n-1)\right) = 2(m-n)^3$$

Equazione di 2° grado nella $x$
ci vuole $\Delta$ = quadrato.

$$\Delta = (m-n)^2(m+n-1)^2+8(m-n)^3$$
$$= (m-n)^2\left[(m+n-1)^2+8(m-n)\right]$$

$$(m+n-1)^2+8(m-n) < (m+n+3)^2$$

Inoltre $m, n$ devono avere la stessa parità

$m+n$ deve essere pari

$(m+n-1)^2 + 8(m-n)$ deve essere dispari.

C'è un unica possibilità:

$$(m+n-1)^2 + 8(m-n) = (m+n+1)^2$$

$$8(m-n) = (m+n+1)^2 - (m+n-1)^2$$

$$= 2(m+n) \cdot 2$$

$$2(m-n) = m+n$$

$$m = 3n$$

Sostituisco nell' equazione iniziale e trovo

$$n^2 (9n+1)(3+n) = 4n^2$$

ASSURDO.

$$x^{\phi(n)} - 1 = \prod_{d \mid \phi(n)} \Phi_d(x)$$

con $x = 2$

$$2^{\phi(n)} - 1 = \prod_{d \mid \phi(n)} \Phi_d(2)$$