PreIMO 2015

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

PRE-IMO 2015

ALGEBRA - mattino

D. Ascari - F. Morandin

Note Title 28/05/2015

A1. Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $a+b+c=1$ e sia n un intero positivo. Dimostrare che

$$\frac{(3a)^n}{(b+1)(c+1)} + \frac{(3b)^n}{(c+1)(a+1)} + \frac{(3c)^n}{(a+1)(b+1)} \geq \frac{27}{16}.$$

$$\sum \frac{(3a)^n}{(b+1)(c+1)} \overset{?\,\text{Hope}}{\geq} \sum \frac{(3a)}{(b+1)(c+1)}$$

WLOG $a \geq b \geq c$

$$\frac{3a}{(b+1)(c+1)} \geq \frac{3b}{\sim} \geq \frac{3c}{\sim}$$

$$(3a)^{n-1} \geq (3b)^{n-1} \geq (3c)^{n-1}$$

$$\sum \frac{(3a)^n}{(b+1)(c+1)} = \sum (3a)^{n-1} \frac{3a}{(b+1)(c+1)} \geq \frac{1}{3} \underbrace{\left(\sum (3a)^{n-1}\right)}_{\text{si stima con AM-(n-1)M}} \left(\sum \frac{3a}{(b+1)(c+1)}\right)$$

$$\frac{\sum a^{n-1}}{3} \geq \left(\frac{\sum a}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}$$

Quindi $\displaystyle LHS \geq \frac{1}{3} 3^{n-1} \sum a^{n-1} \sum \frac{3a}{(b+1)(c+1)} \geq \sum \frac{3a}{(b+1)(c+1)}$

Voglio mostrare $\displaystyle \sum \frac{3a}{(b+1)(c+1)} \geq \frac{27}{16}$

moltiplico per $\prod (a+1)$ e faccio i conti:

viene da dimostrare $7 \geq 27abc + 18 \sum ab$

$$\sum ab \leq \frac{(\sum a)^2}{3} = \frac{1}{3} \quad e \quad abc \leq \left(\frac{\sum a}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

— o — o —

Sol. b: Hölder

Hölder

$$\left(\sum (b+1)(c+1)\right)\left(\sum \frac{(3a)^n}{(b+1)(c+1)}\right)\left(\sum 1\right)^{n-2} \geq \left(\sum 3a\right)^n$$

$$\underbrace{\left(\sqrt[n]{(b+1)(c+1)}^{\,n}, \text{ cyc}\right)} \quad \underbrace{\left(\frac{3a}{\sqrt[n]{(b+1)(c+1)}}, \text{ cyc}\right)} \quad \overbrace{(1,1,1)}^{n-2}$$

— o — o —

$$\sum \frac{(3a)^n}{(b+1)(c+1)} \geq \text{roba}$$

$a+b+c=1$

$b+c=1-a$

$$(b+1)(c+1) \leq 1+b+c+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = 1+1-a+\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(3-a)^2$$

$$\text{LHS} \geq \sum \frac{2(3a)^n}{(3-a)^2} \qquad f(x) = \frac{x^n}{(3-x)^2}$$

Il problema è diventato: cerco min di $f(a)+f(b)+f(c)$ con $a+b+c$ fissato

— o — o —

$$\sum \frac{(3a)^n}{(b+1)(c+1)} \geq \frac{27}{16}$$

: moltiplico per i denominatori e resta

$$\sum 3^n a^{n+1} + \sum 3^n a^n \geq \frac{27}{16} \prod (a+1)$$

$\sum a^{n+1}$ lo stesso con $(n+1)\,GM-AM$

$\sum a^{n}$ idem

viene LHS $\geq 6 \geq$ RHS,

A2. È definita la successione di reali positivi seguente

$$a_1 = 1,$$
$$a_n = \frac{n^2+1}{(n-1)^2}a_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

Dimostrare che

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \leq 1+\sqrt{1-\frac{1}{a_n}}.$$

$$a_n = \frac{n^2+1}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)^2+1}{(n-2)^2}\cdots\frac{2^2+1}{1^2} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k^2+1)}{\prod_{k=1}^{n-1}k^2} \qquad n \geq 2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} = 1+\sum_{i=2}^{n}\frac{\prod_1^{i-1}k^2}{\prod_2^{i}(k^2+1)} = 1+\frac{1}{\prod_2^n(k^2+1)}\sum_{i=2}^{n}\underbrace{\prod_1^{i-1}k^2\prod_{i+1}^{n}(k^2+1)}_{\approx \frac{\text{roba}}{i^2}}$$

$$\text{LHS} \approx 1 + C\cdot\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i^2} \qquad \text{moralmente}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right) = 1-\frac{1}{n} \qquad\qquad \sum_2^n\frac{1}{i(i-1)} = 1-\frac{1}{n}$$

$$\sum_{i=2}^{n}\prod_1^{i-1}k^2\prod_{i+1}^{n}(k^2+1)\,i(i-1)\frac{1}{i(i-1)}$$

$$= \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i-1)}\,1^2\cdot 2^2\cdots(i-1)^2(i-1)\,i\,((i+1)^2+1)\cdots(n^2+1)$$

$$(\text{LHS}-1)^2 \overset{?}{\leq} 1-\frac{1}{a_n} \iff \left[a_n(\text{LHS}-1)\right]^2 \overset{?}{\leq} a_n(a_n-1)$$

HOPE: $a_n(\text{LHS}-1) \overset{?}{\leq} a_n-1 \iff \text{LHS}-1 \leq 1-\frac{1}{a_n}$

$$LHS-1 = \frac{1}{\prod_2^n (k^2+1)} \sum_{i=2}^{n} \prod_1^{i-1} k^2 \prod_{i+1}^{n} (k^2+1)(i-1)i \frac{1}{(i-1)i} \overset{?}{\leq} 1 - \frac{\prod_1^{n-1} k^2}{\prod_2^n (k^2+1)}$$

$$\sum_{i=2}^{n} \prod_1^{i-1} \underbrace{k^2}_{\leq (k^2+1)} \prod_{i+1}^{n} (k^2+1) \underbrace{(i-1)i}_{i(i-1) \leq i^2+1} \frac{1}{(i-1)i} \overset{?}{\leq} \prod_2^n (k^2+1) - \prod_1^{n-1} k^2$$

$$\text{LHS ultimo} \leq \sum_{i=2}^{n} \prod_2^n (k^2+1) \cdot \frac{1}{i(i-1)} = \prod_2^n (k^2+1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\overset{?}{\leq} \prod_2^n (k^2+1) - \prod_1^{n-1} k^2$$

$$\prod_2^n (k^2+1) \overset{?}{\geq} n \prod_1^{n-1} k^2$$

$$n^2+1 > n$$

$$k^2+1 > k^2$$

ok

$b_i = \frac{1}{a_i}$ Hp: $b_1 = 1$ $\boxed{(n-1)^2 b_{n-1} = (n^2+1) b_n}$

Tesi: $b_1 + \dots + b_n \leq 1 + \sqrt{1 - b_n}$

$$b_n = (n-1)^2 b_{n-1} - n^2 b_n$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 + (1^2 b_1 - 2^2 b_2) + (2^2 b_2 - 3^2 b_3) + \dots + ((n-1)^2 b_{n-1} - n^2 b_n)$$

$$= 2 - n^2 b_n$$

A3. Sia n un intero positivo e siano $a_1, a_2, \dots, a_n$ numeri interi positivi. Si estenda questa n-upla ad una successione infinita periodica ponendo $a_{n+i} = a_i$ per ogni $i \geq 1$. Supponendo che

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_1 + n$$

e che

$$a_{a_i} \leq n + i - 1 \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots n,$$

dimostrare che necessariamente si ha

$$a_1 + \cdots + a_n \leq n^2.$$

$a_i \leq 2n \qquad \forall i$

$a_1 \leq a_{a_1} \leq n \qquad a_i \leq a_n \leq a_1 + n \qquad a_i \leq 2n \quad \forall i$

Sia $k_h := \inf\{i : a_i \geq h\} \wedge (n+1)$

$k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_h \leq \dots$

$k_h - 1 = \#\{i \leq n : a_i \leq h-1\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{a_i \leq h-1}$

$a_{a_i} \leq n+i-1 \iff \begin{cases} \text{se } a_i \leq n & \text{la condiz.} \iff a_i \leq k_{n+i} - 1 \\ \text{se } a_i > n & \text{" "} \iff a_i - n \leq k_{n+i} - 1 \end{cases}$ $\quad i = 1, 2, \dots, n$

$\sum_h (n - k_h + 1) = \sum_h \sum_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{a_i \leq h-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_h \mathbb{1}_{h \leq a_i}$

eventi complementari

$\sum_{h=1}^{\cancel{\infty}\ 2n} \mathbb{1}_{h \leq a_i} = a_i$

$n - k_h + 1 \leq n - a_{h-n}$

$k_{n+i} \geq a_i + 1 \qquad i = 1, \dots, n \qquad k_h \geq a_{h-n} + 1 \qquad \underbrace{h = n+1, \dots, 2n}_{\text{sommo su questi } h}$

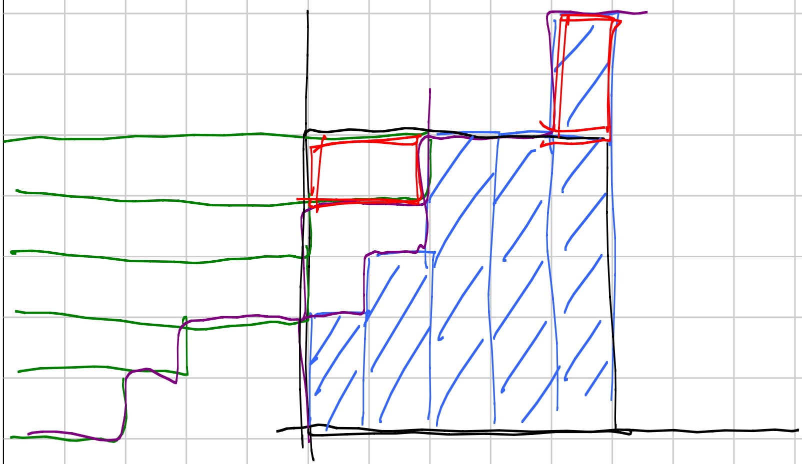
$\sum_{h=n+1}^{2n} (n - k_h + 1) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - n) \vee 0$

$n - k_h + 1 \leq 2n - a_{h-n}$

$\sum_{h=n+1}^{2n} (n - a_{h-n}) \geq \sum_{i=1}^{n} (a_i - n) \vee 0$

$a_i = f(i)$ $\qquad f(f(i)) \leq n+i-1$ $\qquad \exists\, g \approx f^{-1}$

" $f(i) \leq g(n+i-1)$ "



$a_i \leq n \implies n - a_i \geq n - k_{n+i} + 1$

$i \leq a_1 \leq n \implies a_i \leq a_{a_1} \leq n$

$i > a_1 \implies n+i > n+a_1 \geq a_j \quad \forall j \qquad n+i > \max\limits_j a_j \implies k_{n+i} = n+1$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j - n) \vee 0 = \sum_{h=n+1}^{2n} (n - k_h + 1) = \sum_{i=1}^{n} (n - k_{n+i} + 1) = \sum_{i=1}^{a_1} (n - k_{n+i} + 1) \leq \sum_{i=1}^{a_1} (n - a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} (n - a_i) \vee 0$$

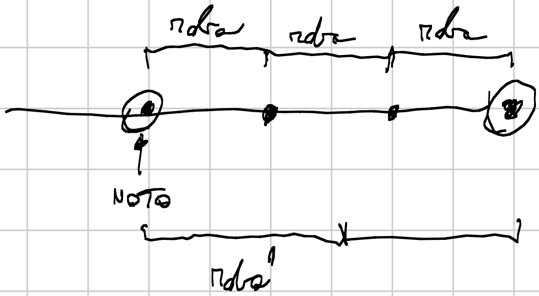
$$\sum_{j=1}^{n} (a_j - n) \vee 0 \leq \sum_{i=1}^{n} (n - a_i) \vee 0$$

$$\sum_{a_j > n} (a_j - n) \leq \sum_{a_i \leq n} (n - a_i) \qquad \sum_{1}^{n} a_i \leq \sum_{1}^{n} n = n^2$$

A4. Sia n un numero intero assegnato. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tali che per ogni scelta degli interi x e y si abbia

$$f(x + y + f(y)) = f(x) + ny$$

$$f(x + \underbrace{\text{roba}}_{y+f(y)}) = f(x) + \text{altra roba}$$



$$f\big(x + (y+f(y))(z+f(z))\big) = f(x) + ny(z+f(z)) = f(x) + nz(y+f(y))$$

$$f(x) + nyz + ny\,f(z) = f(x) + nyz + n\,f(y)\,z$$

$$ny\,f(z) = nz\,f(y)$$

se $n \neq 0$ $\quad y = 1 \Longrightarrow \quad f(z) = z\,f(1)$ (sostituisco nel testo ...)

se $n = 0$: il testo diventa $f(x + y + f(y)) = f(x)$

$g(x) = x + f(x)$: sostituisco e viene $g(x + g(y)) = g(x) + g(y)$

se $g(x+a) = g(x) + a$ e $g(x+b) = g(x) + b$ allora

$$g(x + (a,b)) = g(x) + (a,b)$$

6 $g(x) = 0$ oppure definisco $m = MCD(\mathrm{Im}(g))$

$$g(x + g(y)) = g(x) + g(y) \quad \text{vuol dire} \quad g(x+m) = g(x) + m$$

$$g(x) = m\,h(x) \qquad h(x+m) = h(x) + 1$$

pongo $h(0) = a_0$ $h(1) = a_1$ ... $h(m-1) = a_{m-1}$

viene $h(qm+r) = q + a_r$ $\qquad g(qm+r) = mq + m a_r$

$$f(qm+r) = mq + m a_r - (qm + r) = m a_r - r$$

PRE-IMO 2015

ALGEBRA - pomeriggio D. Ascari F. Morandin F. Poloni

Note Title 28/05/2015

A5. Determinare il massimo valore di $\alpha > 0$ tale che

$$a^2 + b^2 + c^2 + \alpha(ab + bc + ca) \geq (1 + \alpha)\sqrt{3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}.$$

per ogni terna di reali positivi a, b, c.

$$\sum_{cyc} a^2 + \alpha \sum_{cyc} ab \geq (1+\alpha)\sqrt{3\sum_{cyc} a^2b^2}$$

omogenea + simmetrica : bunching + schur?

$$\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 + 2\alpha \sum_{cyc} a^2 \sum_{cyc} ab + \alpha^2\left(\sum_{cyc} ab\right)^2 \geq (1+2\alpha+\alpha^2)\cdot 3 \cdot \sum_{cyc} a^2b^2$$

$$\sum_{cyc} a^4 + 2\sum_{cyc} a^2b^2 + 2\alpha\sum_{cyc} a^3b + 2\alpha\sum_{cyc} ab^3 + 2\alpha\sum_{cyc} a^2bc + \alpha^2\sum_{cyc} a^2b^2 + \alpha^2\cdot 2\sum_{cyc} a^2bc$$

$$\geq (1+2\alpha+\alpha^2)\cdot 3\sum_{cyc} a^2b^2$$

moltiplico tutto per 2 $\qquad \sum_{sym} a^m b^n c^\ell = [m,n,\ell] \quad m \geq n \geq \ell$

$$[4,0,0] + 4\alpha[3,1,0] + (2\alpha^2+2\alpha)[2,1,1] \geq (2\alpha^2+6\alpha+1)[2,2,0]$$

Bunching : $[4,0,0] \geq [3,1,0] \geq [2,2,0] \geq [2,1,1]$

Schur : $[4,0,0] + [2,1,1] \geq 2[3,1,0] \geq 2[2,2,0]$

$1 \geq 2\alpha^2 + 2\alpha \qquad 2\alpha^2 + 2\alpha - 1 \leq 0$ condizione sufficiente

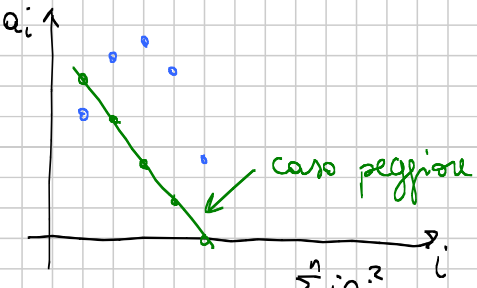
★ Unsmoothing. $a = b = 1$ $\quad c$ molto piccolo $\quad c \sim 0$

$2+\alpha \geq (1+\alpha)\sqrt{3} \qquad \alpha \leq \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ condizione necessaria

A6. Diciamo che una n-upla di reali $a_1, a_2, \dots, a_n$ è *concava* se per ogni $2 \le i \le n-1$, si ha $a_i \ge \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2}$. Determinare il massimo valore di $c > 0$ tale che per ogni n-upla concava di reali non negativi si abbia

$$\sum_{i=1}^{n} i a_i^2 \ge c \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

Smoothing



$a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ $\quad r(a) = \frac{\sum_{i=1}^n i a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ $\quad r(a) \geqslant c$ per ogni a concava

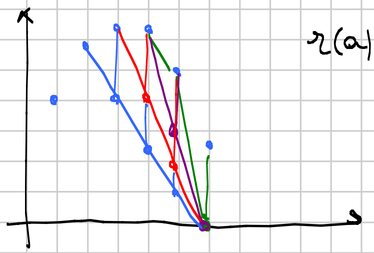
$c = \inf_a r(a)$

1) $a_i = k(n-i)$ $\quad r(a) = \frac{\sum_i i k^2 (n-i)^2}{\sum_i k^2 (n-i)^2} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} (n-j) j^2}{\sum_{j=0}^{n-1} j^2}$

$$= \frac{n\sum j^2 - \sum j^3}{\sum j^2} = \frac{\frac{\cancel{n}\cdot(\cancel{n-1})n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)^{\cancel{2}} n^{\cancel{2}}}{4}}{\frac{(\cancel{n-1})\cancel{n}(2n-1)}{6}} = \frac{n(4n-2-3n+3)}{4n-2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{4n-2}$$

2)



$r(a) = \frac{a_1^2 + 2a_2^2 + \dots + n a_n^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = n \, \frac{\frac{a_1^2}{n} + \frac{2a_2^2}{n} + \dots + 1 \cdot a_n^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

$\frac{a}{b} \to \frac{a-c}{b-c} \le \frac{a}{b}$ vero se $\frac{a}{b} < 1$

$r(a) < n \Rightarrow \frac{r(a)}{n} < 1 \Rightarrow$ posso farlo

azzero a_n $\quad r(a') < n-1$ posso diminuire a_{n-1} fino alla retta viola,

Voglio diminuire $a_j, a_{j+1}, \dots, a_n$ tutti assieme in modo proporzionale

$$\frac{\sum_1^n i a_i^2 - \varepsilon \sum_j^n i a_i^2}{\sum_1^n a_i^2 - \varepsilon \sum_j^n a_i^2} = r_j(a) \cdot \frac{\frac{\sum i a_i^2}{r_j(a)} - \varepsilon \sum_j^n a_i^2}{\sum_1^n a_i^2 - \varepsilon \sum_j^n a_i^2}$$

$\sum_j^n i a_i^2 / \sum_j^n a_i^2$

funziona se $\frac{r(a)}{r_j(a)} < 1 \iff r(a) < r_j(a)$

$$r(a) = \frac{\sum_1^{j-1} i a_i^2 + \sum_j^n i a_i^2}{\sum_1^n a_i^2} = \underbrace{\frac{\sum_1^{j-1} a_i^2}{\sum_1^n a_i^2}}_{\theta} \frac{\sum_1^{j-1} i a_i^2}{\underbrace{\sum_1^{j-1} a_i^2}_{\leq j-1}} + \underbrace{\frac{\sum_j^n a_i^2}{\sum_1^n a_i^2}}_{1-\theta} \cdot \frac{\overbrace{\sum_j^n i a_i^2}^{r_j(a)}}{\sum_j^n a_i^2}$$

$r_j(a) \geq j$

$r(a) < r_j(a)$

A7. Sia $n \geq 2$ un intero assegnato. Determinare tutti i polinomi non costanti f a coefficienti complessi che soddisfano

$$1 + f(x^n + 1) = f(x)^n.$$

ω radice primitiva n-esima di 1,

$f(\omega x)^n = 1 + f(\omega^n x^n + 1) = f(x)^n$

$\forall x \ \exists\, i(x)$ t.c. $f(\omega x) = \omega^{i(x)} f(x)$

$\exists\, \bar{i}$ t.c. $\exists\, \infty\ x$ con $f(\omega x) = \omega^{\bar{i}} f(x)$

$\exists\, \bar{i}$ t.c. $f(\omega x) = \omega^{\bar{i}} f(x) \implies \boxed{f(x) = x^{\bar{i}} g(x^n)}$

$f(x) = a_k x^k + \dots + a_0$

$f(\omega x) = \underbrace{\omega^k a_k}\, x^k + \dots + a_0 = \omega^{\bar{i}} f(x) = \underbrace{\omega^{\bar{i}} a_k}\, x^k + \dots + \omega^{\bar{i}} a_0$

CASO 1: $\bar{i} \neq 0$ cioè $f(0) = 0$ $\qquad f(x^n+1) = f(x)^n - 1$

CASO n pari: $f(0) = 0 \quad f(1) = -1 \quad f(2) = 0$

$f(2^n+1) = -1 \quad f((2^n+1)^n + 1) = 0$

CASO n dispari: $f(0) = 0 \quad f(1) = -1 \quad f(2) = -2$

$f(2^n+1) = -2^n - 1 \quad f((2^n+1)^n + 1) = -(2^n+1)^n - 1$

$$\Rightarrow \quad f(x) \equiv -x \,,$$

CASO 2: $\bar{\imath} = 0$ $\quad f(x) = g(x^n)$ $\qquad 1 + g\left((x^n+1)^n\right) = g(x^n)^n$

$x^n = t$ $\qquad \boxed{1 + g\left((t+1)^n\right) = g(t)^n}$

$t+1 = y$ $\qquad 1 + g(y^n) = g(y-1)^n$

$$g(y-1) = y^{\bar{J}} h(y^n)$$

CASO $\bar{J} \neq 0$ $\qquad g(-1) = 0$ $\qquad g\left((t+1)^n\right) = g(t)^n - 1$

CASO n pari: $\quad g(-1) = 0 \quad g(0) = -1 \quad g(1) = 0$

$g(2^n) = -1 \qquad g\left((2^n+1)^n\right) = 0$ $\qquad$ ASSURDO

CASO n dispari. $\quad g(x) = -x - 1$

CASO $\bar{J} = 0$ $\qquad g(y-1) = h(y^n) \qquad g(y) = h\left((y+1)^n\right)$

$1 + h\left((y^n+1)^n\right) = h(y^n)^n$

$$\boxed{1 + h\left((t+1)^n\right) = h(t)^n}$$

$g(x) = \quad -x-1 \qquad -(x+1)^n - 1 \qquad -\left((x+1)^n + 1\right)^n - 1$

$-\left(\left((x+1)^n+1\right)^n+1\right)^n - 1 \qquad \ldots$

$f(x) = \quad -x \qquad -x^n - 1 \qquad -(x^n+1)^n - 1 \qquad \ldots$

A8. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(1 + xy) - f(x + y) = f(x)f(y) \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R},$$

e tali che $f(-1) \neq 0$.

$P(x,y)$

niente fuori dalle $f \to$ Cauchy

Sostituzioni facili

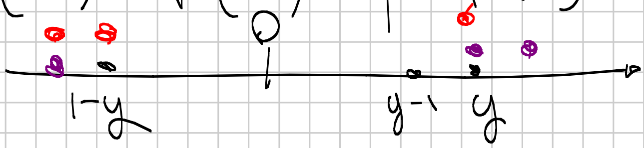
$f(-1)=\beta$
$f(0)=-1$
$f(1)=0$
$f(2)=1$

$P(-1,y)$: $f(1-y)-f(-1+y)=\beta f(y)$ $(*)$ $G(y)$

non consecutivi

Ricorda ricorrente a tre termini sugli interi, del tipo $c_0 f(y)+c_1 f(y+1)+c_2 f(y+2)=0$

$P(-1,3)$: $f(-2)-f(2)=\beta f(3)$



$f(1-y)-f(-1+y)=\beta f(y)$ $G(y)$

$f(-y)-f(y)=\beta f(y+1)$ $G(y+1)$

$G(-y)$

$f(y)+\beta f(y+1)+f(y+2)=0$

$f(-1)=\beta$
$f(0)=-1$
$f(1)=0$
$f(2)=1$
$f(3)=-\beta-1$
$f(4)=\beta(\beta+1)-1$

cose derivate da $G(\ ) \longrightarrow f(5)$:

Voglio un'equazione per β:

$$P(2,2):\quad f(5) = f(4) + f(2)^2$$

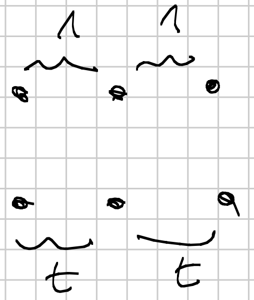
mi darà un'equazione per β

Due soluzioni $\begin{cases} 1 & f(y) + f(y+1) + f(y+2) = 0 \\ -2 & f(y) - 2f(y+1) + f(y+2) = 0 \end{cases}$

lineari, diff. finite

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
0	-1	-1
1	0	0
2	1	1
3	2	-1
4	3	0
5	4	1
6	⋮	-1
⋮		0
		1

non si estendono ai razionali



$P(x,y)\quad f(1+xy) = f(x+y) + f(x)f(y)$

$P(x,y+1)\ \beta \quad \beta f(1+xy+x) = \beta f(x+y+1) + \beta f(x)f(y+1)$

$P(x,y+2)\quad \underbrace{f(1+xy+2x) = f(x+y+2) + f(x)f(y+2)}$

$0 \qquad\qquad 0$

$f(\underbrace{1+xy}_{z}) + \beta f(\underbrace{1+xy}_{z}+x) + f(\underbrace{1+xy}_{z}+2x)$

$f(z) + \beta f(z+x) + f(z+2x) = 0$

Relazione tra tre punti a distanza x

Da cui si esclude $\beta = 1$ (prendendo $x = 3$)

Rimane $\beta = -2$ (funzioni lineari)

$g(x) := f(x) + 1$ soddisfa la stessa relazione

$H(x,z)\quad g(x) - 2g(x+z) + g(x+2z) = 0 \quad \forall x,z$

sostituendo $H(0,z)$ ho $g(2x) = 2g(x)$

$H($x, la cosa che fa venire $x+2z=y)$

ho $g(x)+g(y)=g(x+y)$

Mi manca l'ipotesi per passare da $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

$P(x,y)$: $f(1+xy)=f(x+y)+f(x)f(y)$

$P(x,x)$ non funziona $g(-x)=-g(x)$

$P(x,-x)$: $f(1-x^2)=-1-[f(x)]^2+\dots$

Se $z\leq 1$, allora $f(z)\leq -1$.

Combinatoria Mattina - PreIMO - 2015

Titolo nota 27/05/2015

C1 (a,b) naturali vogliamo colorare $\mathbb{Z}^2$
con ab colori
ogni rettangolo $a \times b$ e $b \times a$
deve contenere tutti i colori

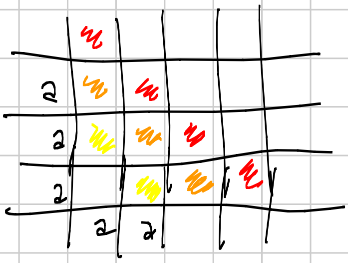
Soluzione

Oss. facili: $(1,n)$ si fa (colorando per diagonale)
(n,n) si fa (ripetendo ciclicamente)

2×3 NO; 2×4 SÌ; 2×5 NO

Claim: si fanno $\iff a \mid b$ (wlog $b \geq a$)

la colorazione la ottengo associando ad un colore una coppia (d,p)



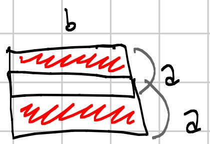
es $\Rightarrow d=1$
$\Rightarrow d=2$
$\Rightarrow d=3$

p mi dice in che posizione sono dentro al quadrato

la colorazione voglio che dipenda solo da (d,p)

L'altra parte del problema mi chiede di dimostrare che non riesco a colorare se $a \nmid b$

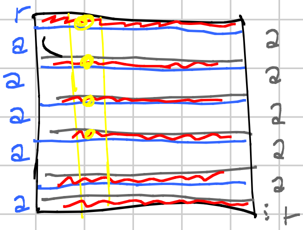
Oss 1:



le aree colorate di contengono gli stessi colori

Oss 2: Prendiamo $b \times b$

$b = qa + r$



l'oss 1 ⇒ contengono gli stessi colori
contengo " "
(l'area bianca)

Oss 2.1 Posso fare la stessa suddivisione con rettangoli verticali ottenendo altre aree bianche

Oss 3: ogni colore compare o q volte
o $q+1$ volte

ma r colori sulle strisce bianche compaiono q volte

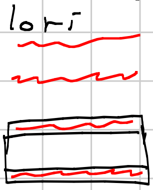
Ora D-C sulle caselle

dovrei avere $b^2 \geq \cancel{z} \cdot (q+1) + (\ ) \cdot q$

ma l'oss 2.1 mi dice che ho troppa area bianca

Sol 2 sfrutto l'oss. 1 ⇒

prendo una riga, salto di b e ottengo gli stessi colori



posso saltare anche di a e ottenere gli stessi colori

Quindi, per Bezout, posso saltare di (a,b)

Problema 2

Ogni giocatore sceglie un intero non somma di multipli pos. di numeri scelti

Alberto: "a" $(a,b)=1$
Barbara: "b"

$$n = ha + kb \quad h,k \in \mathbb{Z}$$
$$= (h-b)a + (k+a)b$$

L'ultimo numero che posso scegliere è $ab-a-b$ $(h=-1,\ k=a-1)$

Alberto: 2 $ab-a-b=1$ 2, 3 NON SI POSSONO SCEGLIERE
Barbara: 3

Alberto: "5"
Barbara: "4"

6	7	11
NO	NO	SI

Alberto: A   Barbara: P

Alberto: p   Barbara: n

Alberto: $pn-p-n$

1° caso   Barbara non ha strategie vincenti

2° caso   Barbara dice m. e vince.

Ma Alberto sceglie m. (Per il teorema del postino) $pn-p-n$ viene bruciato

In generale la strategia non si conosce, però Alberto può "rubarla" a Barbara se ne avesse una. □

C3 Grafo con grado massimo $\leq m+n+1$

Th: riesco a bipartire il grafo in A e B t.c.
in A il grado max $\leq m$ e in B gr. max $\leq n$

Sol: metodi costruttivi: mostro un algoritmo
" non costruttivi: pigeonhole / assurdo
"elemento estremale"

Algoritmo: iniziamo con una partizione casuale
e cerco di sistemare i vertici con gr
troppo alto

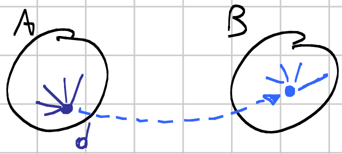
Ad ogni step, sposto un vertice nell'altro
sottoinsieme se ha grado troppo alto per
stare dov'era

Come in tutti i problemi che si rispettano, utilizziamo
un invariante che diminuisce sempre

Oss che è utile avere molti archi tra A e B
cerchiamo un'invariante che tenga conto degli archi

Proviamo con $Q = \alpha E_A + \beta E_B$ dove α, β sono
parametri reali e E_A, E_B sono gli archi dentro A, B

Ad ogni step



se spostiamo da A a B stiamo togliendo d_A archi
in A e ne stiamo aggiungendo d_B in B
so che $d_A \geq m+1$; $d_A + d_B \leq m+n+1$

$Q \longrightarrow Q - d_A \alpha + d_B \beta$

devo imporre $d_B \beta < d_A \alpha$

---- basta che $n\alpha < (m+1)\beta$

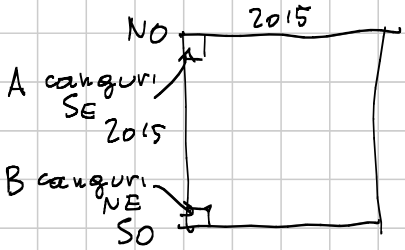
Se invece spostiamo da B ad A $m\beta < (n+1)\alpha$

$\Rightarrow$ esistono α, β che fanno funzionare le cose

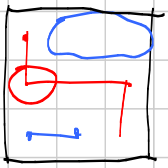
$(\alpha = m+1,\ \beta = n+1)$

da cui Q diminuisce ad ogni mossa, ma sono possibili solo un numero finito di valori per Q.

C4

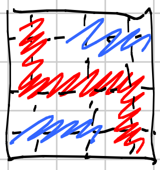


Dopo alcuni salti dei canguri, tutte le caselle sono state visitate da almeno un canguro. Quanti sono al minimo i canguri?

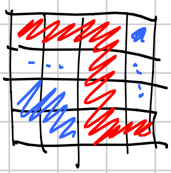


1. E' chiaro che con n si fa (0 punti)

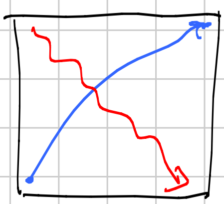
2. Sì con 2 canguri.



3. 6x6 con 4 canguri.



4. A mano vedo che 2 canguri non bastano 4x4, ma 3 sì.



5. Per dimostrare che $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ è suffic., $n = 3k + r^{=0,1,2}$, faccio un bordino di r con canguri appositi e poi uso k canguri sopra e k sotto. (2-3 punti)

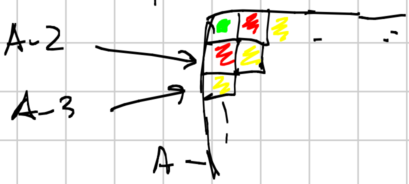
6. Perché non si può fare con meno canguri?

Oss. Se ci sono A canguri SE e B canguri NE, (che partono da un angolo e finiscono in quello opposto), ciascun canguro SE passa per almeno una casella per cui passa anche un canguro NE.

Quindi il totale delle caselle visitate è

$$\underset{2015}{2015^2 = n^2} \le (2n-1)\cdot A + (2n-1)\cdot B - A\cdot B - \frac{A(A-1)}{2} - \frac{B(B-1)}{2} - \frac{B(B-1)}{2} - \frac{A(A-1)}{2}$$

Spreco $A-1$ per la casella NO



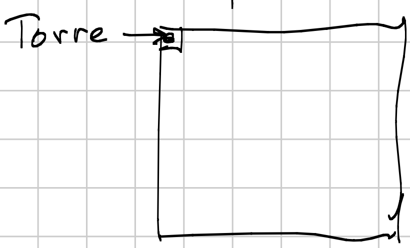
$A+B=K$

$4030(A+B) - A^2 - B^2 - AB$ $\qquad A^2+B^2+AB$

$B, A \geq 671, 672 \Rightarrow$ Somma ≥ 1343

$\lceil \frac{2n}{3} \rceil$

Lunch problem:



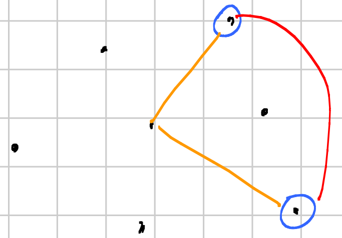
$n \times n$

la torre brucia le caselle in cui passa e non può passare né fermarsi su caselle bruciate. Si muove a turno. Perde chi non può più muovere. Chi vince?

PreIMO 2015 - Combinatoria - pomeriggio

Titolo nota 27/05/2015

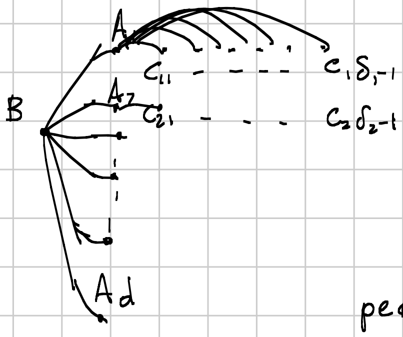
5)



Per ogni coppia di città che sono n c'è un unico cammino con ≤ 2 archi.
Allora $n-1$ è un quadrato, ma nessuna città ha grado $n-1$

$d =$ grado di B

$\delta_1 =$ grado di A_1



1) Tutti i vertici sono B, A_i o C_{ij} per l'ipotesi

2) Questo grafo ancora non va bene. A chi sarà collegata C_{11}?

perché C_{11} abbia un cammino lungo ≤ 2 che la connette ad A_2 serve che C_{11} sia collegata a
- A_2 no: sennò $BA_1C_{11}A_2$ è quadril.
- B no: sennò BAC_{11} triangolo
- una delle C_{2j} e una sola, sennò $C_{2j}C_{11}A_2C_{2k}$ è quadril.

(A_1 non va bene)

Quindi C_{11} è collegata a una e una sola $C_{2j}, C_{3j}, C_{4j} \dots C_{dj}$ e quindi ha grado $1+(d-1)=d$; e questo deve valere per tutte le C_{ij}. Quindi le C_{2j} sono tante quante le $C_{1j}, C_{3j}, \dots$ quindi $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_d$; e tutti questi sono $=d$, perché per ogni famiglia c'è un j t.c. C_{ij} è collegata a quella famiglia.

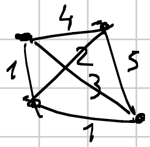
Quindi $n = \underbrace{1}_{B} + \underbrace{d}_{\text{grado di } B = \text{famiglie}} \cdot \underbrace{\left(\overset{A_i}{1} + \overset{C_{ij}}{(d-1)}\right)}_{\text{card. famiglia}}$

Quante "Λ" ci sono nel grafo?
- V_i grado $d_i \Rightarrow \frac{d_i(d_i-1)}{2}$ "Λ"
- $\frac{n-1-d_i}{2}$ "Λ" di cui V_i è "piede".

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^2 - \cancel{d_i}}{\cancel{2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1-\cancel{d_i}}{\cancel{2}} \qquad \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = n(n-1)$$

Se ora so (l'ho dim. sopra) che tutti i d_i sono uguali, $\Rightarrow \cancel{n} \cdot d^2 = \cancel{n}(n-1)$

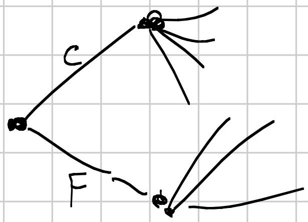
6) n città
ogni arco
ha un prezzo



La formica parte da una città e le visita tutte ogni volta scegliendo l'arco con il prezzo minore tra quelli che la portano in una città ancora non visitata

La cicala invece sceglie ogni volta l'arco più costoso

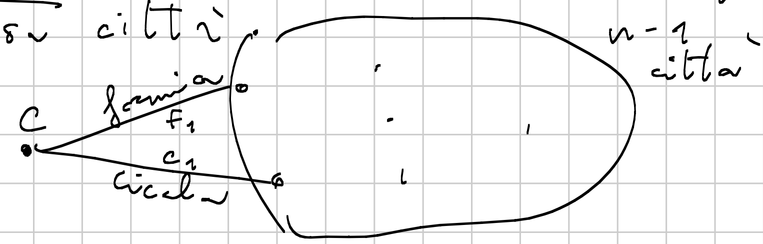
Tesi La cicala spende $\geq$ della formica



OSS. 1 Dopo la prima mossa, la cicala si ritrova ad applicare il suo algoritmo di visite a un mondo con $(n-1)$ città

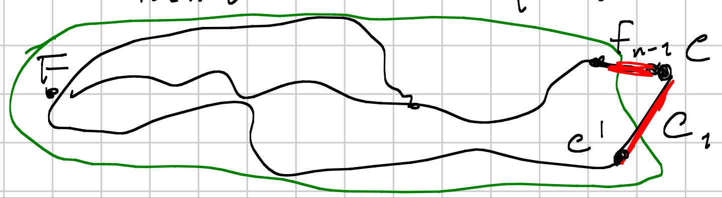
Il problema ci dice di voler essere risolto per induzione su n = n° di città.

1° caso La cicala e la formica partono dalla stessa città



$c_1 \geq F_1$ e poi anche in seguito la formica spenderà di meno, per ipotesi induttiva (ora i due insetti si muovono in un mondo con $n-1$ città)

2° caso La formica termina il suo percorso proprio nella città di partenza della cicala

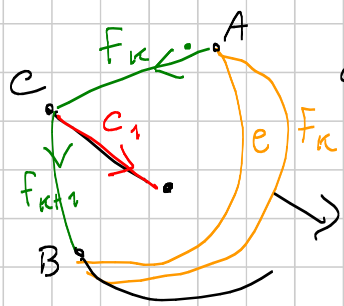


$c_1 \geq f_{n-1}$

c_1 è infatti uno degli archi più

costosi di quelli che escono da C.
La cicala a partire da C' fa il suo percorso.
Se cancello C all'inizio, la formica comunque fa lo stesso percorso: ogni volta andare in C non sarebbe necessario

3 caso La formica arriva e riparte dalla città iniziale della cicala



$c_1 \geq f_{K+1}$ come al solito

$c_1 \geq f_K$

$e \geq f_K$ perché la formica va in C e non in B

Se sostituisco e con f_K ed elimino C, la formica fa lo stesso percorso, andando da A direttamente in B e risparmiando f_{K+1}

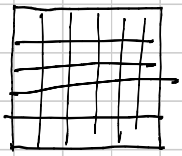
Ma sostituire un peso può causare problemi alla cicala

Aggiungo un secondo arco di peso f_K. Per farlo devo generalizzare tutto il problema.

Riparto da capo Dato un multigrafo completo su n città ogni arco ha un peso, la cicala e la formica fanno come prima, allora la cicala spende di più

Ora l'induzione funziona, e anche i primi due casi (ricontrollare per esercizio)

Problema C7



100×100 numeri da 1 a 10000

Sceglie k numeri, poi può scegliere numeri < sulla colonna e numeri > sulla riga. Min k?

Oss. Se scelgo min di una riga, ho tutta la riga.

Min K = 1.

$A \succ B$ se segnato A riesco a segnare B

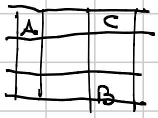
Cerco chi sono i massimali.

Supponiamo che esistano A, B massimali non confrontabili

I° caso. A, B sulla stessa colonna. Questo si risolve da solo

II caso. A, B // // riga. // // // // //

III caso A, B a caso

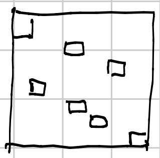


WLOG $A > B$.

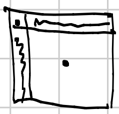
- Se $A > C > B$, allora $C \succ A$ $C \prec B$
- Se $C > A > B$ allora $C \succ B$ $A \succ C \Rightarrow A \succ B$
- Se $A > B > C$ // $C \prec B$ $A \prec C \Rightarrow B \succ A$

Così ho finito.

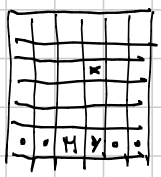
Sol alternativa



Se ci fosse una casella min di riga e max di colonna, avrei vinto. Però è falso, non lo trovo sempre



Prendiamo il max tra i min.



- Ci guadagniamo la riga.
- Se x è un min, allora $x < M < Y$. quindi lo prendo
- Ora ho tutti i min, quindi ho vinto.

Problema C8

Grafo completo su n vertici con gli archi pesati

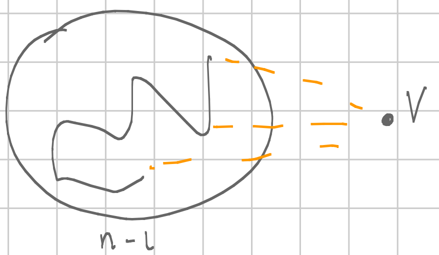
⇒ esiste un cammino lungo $\geq n-1$ archi con pesi decrescenti

(i pesi degli archi sono tutti diversi)

Proviamo

idea n° 1 : induzione su n

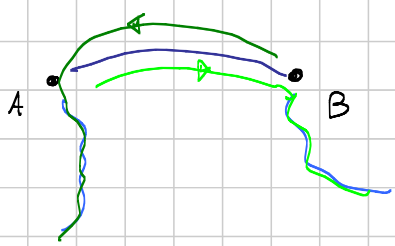
il punto sarebbe aumentare un percorso di 1



idea 1.1 scegliere in modo accurato V (il vertice da togliere)

idea 2.0 induzione sugli archi

Soluzione: togliamo tutti gli archi e li ri-aggiungiamo uno alla volta
scegliamo di rimetterli in ordine dal più leggero



Oss: i percorsi verdi sono + lunghi di quelli azzurri

$\forall$ vertice v e in ciascun istante
$\exists$ un percorso massimo e decrescente che parte da v

$$Q = \sum_v \text{lungh}(\text{max perc. d. che parte da } v)$$

quando aggiungo il percorso massimo da B è lungo $\geq 1 +$ il massimo da A prima di aggiungere

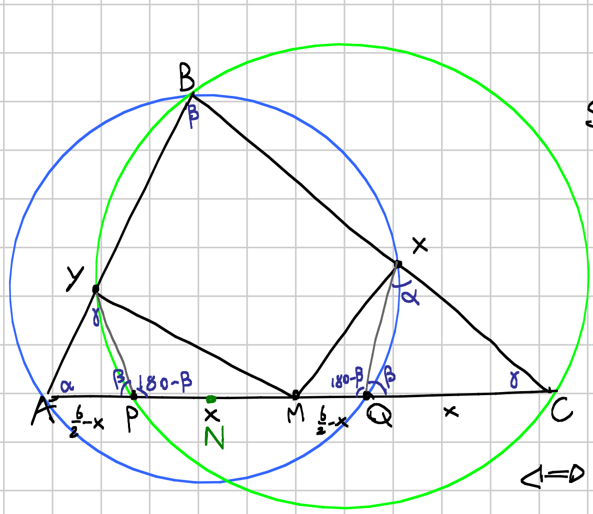
simmetricamente il p. m. da $A \geq 1 +$ il max da B prima di aggiungere

$$Q' \geq Q + 2$$

Alla fine $Q \geq 2|E| = n(n-1)$
quindi il percorso medio $\geq \frac{Q}{n} = n-1$

GEOMETRIA MATTINA PreIMO 2015

Titolo nota 26/05/2015



$PQ = \frac{AC}{2}$

Soluzione 1: Angoli

$Y\hat{P}C = 180-\beta$

$X\hat{Q}A = 180-\beta$

$\triangle APY \sim \triangle XQC$ (per angoli)

Th $\iff Y\hat{M}X = 180-\beta \iff X\hat{M}Q + Y\hat{M}P = \beta$

$\iff P\hat{Y}M = X\hat{M}Q \iff \triangle PMY \sim \triangle QXM$

Hanno un angolo in comune, basta dimostrare che $\frac{PY}{PM} = \frac{QM}{QX}$

$$\frac{PY}{PM} = \frac{PY}{QC} \underbrace{=}_{\text{similitudine di } \triangle APY \text{ e } \triangle XQC} \frac{AP}{QX} = \frac{MQ}{QX} \qquad \begin{cases} AP = MQ \\ PM = QC \end{cases}$$

Ora $P\hat{M}Y = M\hat{X}Q \Rightarrow P\hat{M}Y + Q\hat{M}X = \beta \Rightarrow Y\hat{M}X = 180-\beta \Rightarrow BXMY$ ciclico.

Soluzione 2: metrica. Prendo $N \in AC$ tale che $AN \cdot AM = AP \cdot AC$ $(= AY \cdot AB)$

Ho (per def.) $BYNM$ ciclico.

Voglio dimostrare che $BXNM$ è ciclico. Voglio dim $CM \cdot CN = CX \cdot CB$

Abbiamo $AN = AP \cdot \frac{AC}{AM} = 2AP$ $\qquad CN = b - 2AP = b - 2(\frac{b}{2} - x) = 2x$

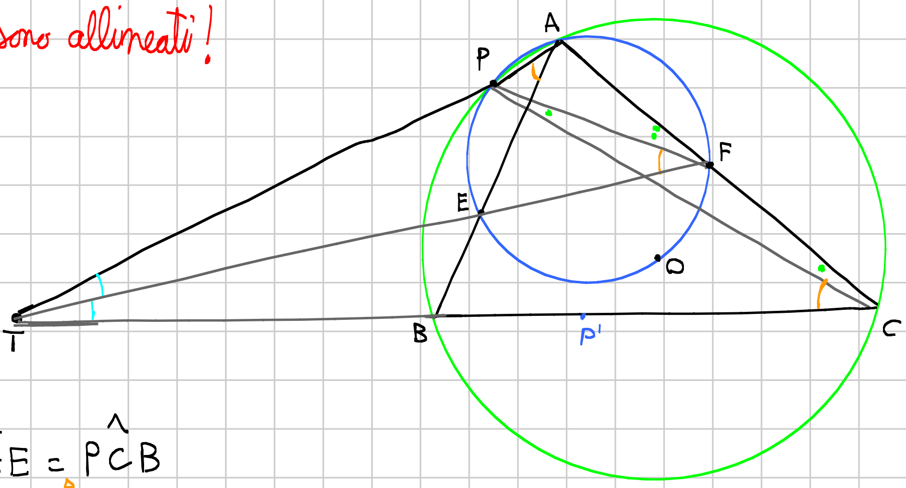
$CM \cdot CN = CQ \cdot CA$ $\qquad (CN = CQ \cdot \frac{CA}{CM} = 2CQ$

$CM \cdot CN = CQ \cdot CA = CX \cdot CB \Rightarrow MNXB$ ciclico

X e Y stanno sulla circoscritta di $MNB \Rightarrow BXMY$ ciclico.

A, P, T non sono allineati!

$T = EF \cap BC$



$P\hat{F}E = P\hat{A}E = P\hat{C}B$

insistono su PE — insistono su PB

TPFC ciclico (per i due angoli)

$P' \in BC \iff C\hat{T}F = F\hat{T}P \iff PF = FC \iff PFC$ è isoscele $\iff$

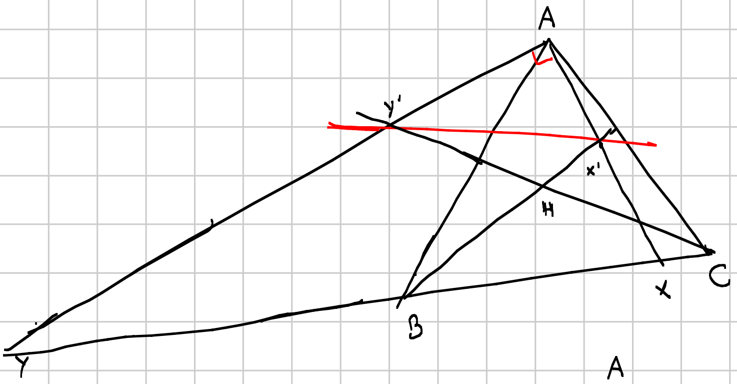
ciclicità TPFC

$\iff P\hat{F}C = 180 - 2F\hat{C}P \iff P\hat{F}A = 2P\hat{C}F$

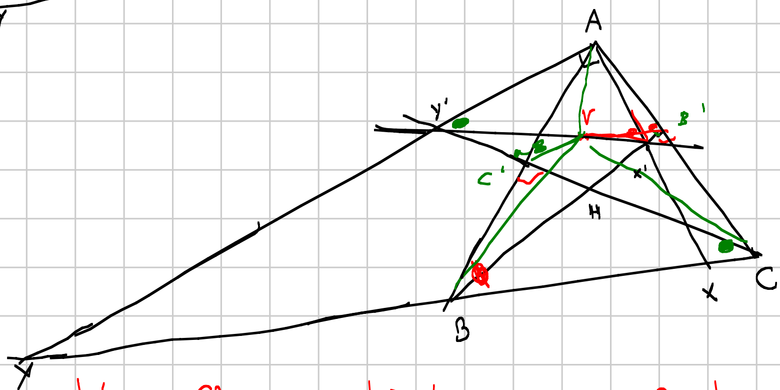
Ma $P\hat{O}A = 2P\hat{C}F \,(= 2P\hat{C}A)$ (è angolo al centro di Γ_{ABC})

Quindi $P\hat{F}A = 2P\hat{C}F = P\hat{O}A$

$P' \in BC \iff P\hat{F}A = P\hat{O}A \iff PAFO$ ciclico $\iff O \in \Gamma$



$XAY = 90°$



Soluzione

Th $\odot CYY'$, $\odot BXX'$, $X'Y'$ concorrenti

Idea: Che proprietà deve avere il p.to di $\cap$, perché la tesi sia vera

Se riesco a trovare una bella proprietà di V, faccio al contrario! Prendo $V \in X'Y'$ che soddisfa la proprietà e mostro che $CYY'V$ e $BXX'V$ sono ciclici

Prendo V t.c. $AV \perp X'Y'$, $V \in X'Y'$.

Voglio che $CYY'V$ ciclico $\iff AY'V = VCY$

Ma $AY'V = ACV$ per come ho preso V.

Quindi $CYY'V$ ciclico $\iff ACV = VCY \iff VC'BC$ ciclico (3)

Voglio che $BXX'V$ ciclico $\iff AX'V = VBC$

Ma $AX'V = AB'V$ poiché (1) $AY'C'V$ $\Rightarrow$ (2) $AVX'B'$ ciclici

Quindi $BXX'V$ ciclico $\iff AB'V = VBC \iff B'VCB$ ciclico (4)

le ciclicità in (3) e (4)

Quindi mi basta mostrare che $BC'VB'C$ ciclico

Cioè mi basta mostrare $VC'CB'$ ciclico, cioè

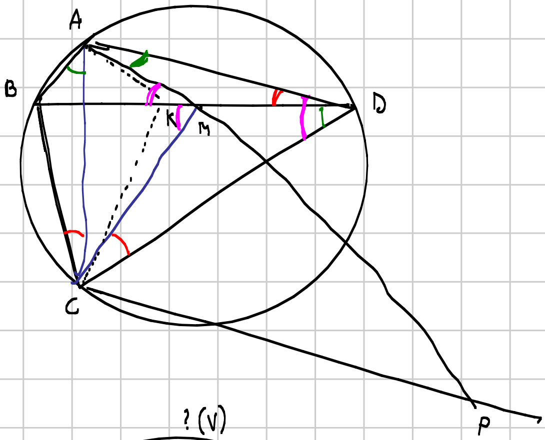
cioè $VC'Y' = VB'C$ Che mostro questo ho concluso

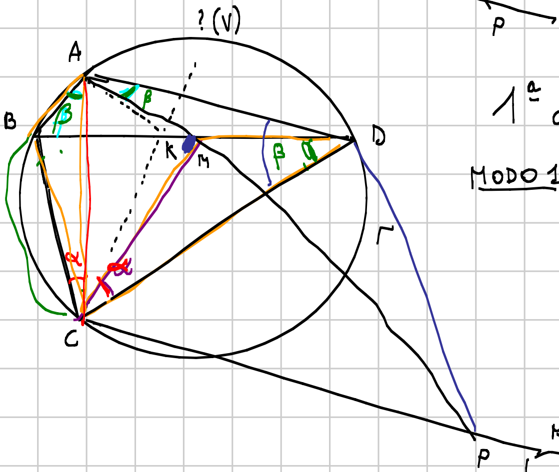
$VB'C = 180 - VB'A = 180 - VX'A = 180 - (90 - AY'V) = 90 + AY'V \overset{AY'C'V \text{ cicl.}}{=}$

$AVX'B'$ ciclico

$= 90 + AC'V = VC'Y'$

che era ciò che volevamo

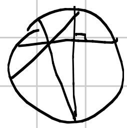




Soluzione

1^a cosa: Cosa vuol dire l'ipotesi?

MODO 1: Potrò sfruttare in qualche modo che AK interseca Γ in V p.to medio dell'arco $\widehat{BD}$? (e simm.)



← ?

MODO 2: Per il th. della bisettrice

$$\boxed{\frac{BK}{KD} = \frac{BC}{CD} \quad \frac{AB}{AD}}$$

Quindi

Hp. $\Longleftrightarrow$ $\boxed{AB \cdot CD = BC \cdot AD}$ (1)

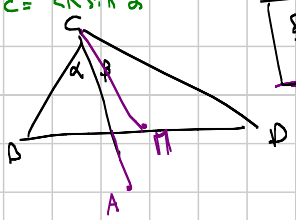
Quad. armonico

1 CHI NON SA

(1) $\Longleftrightarrow \sin\alpha \cdot \sin\gamma = \sin\beta \cdot \sin\delta \Longleftrightarrow \boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \frac{CB}{CD}}$

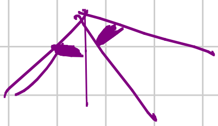
$AB = 2R\sin\alpha$
$AD = 2R\sin\beta$
$CD = 2R\sin\gamma$
$BC = 2R\sin\delta$

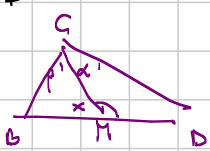
Quindi cosa ho?



$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{CB}{CD}}$$

Questo vuol dire che la ceviana CA è la simmetrica rispetto alla bisettrice di CM.





$$\left.\begin{array}{l} \frac{BM}{\sin\beta'} = \frac{BC}{\sin x} \\ \frac{MD}{\sin\alpha'} = \frac{CD}{\sin x} \end{array}\right] \Longrightarrow \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{BC}{CD}$$

$\Downarrow$

$\alpha' = \alpha$

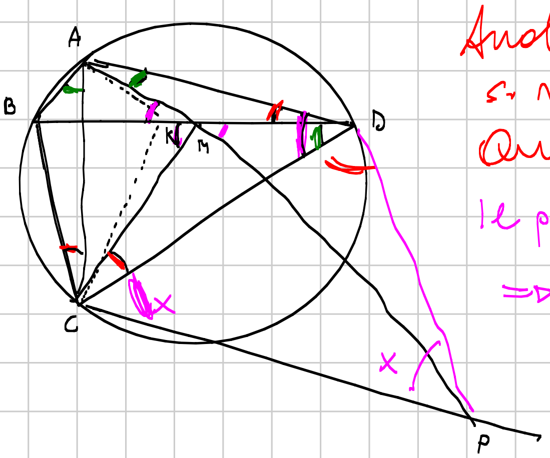
Abbiamo concluso che CA è la simmetrica di CM rispetto alla bisettrice di $B\hat{C}D$ $\Longrightarrow$ Quindi $B\hat{C}A = D\hat{C}M$.

Analogamente $B\hat{A}C = D\hat{A}M$.

Se ne deduce la similitudine di $\triangle A\hat{B}C$ e $C\hat{M}D$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow C\hat{M}D = A\hat{B}C \Longrightarrow \underbrace{180 - C\hat{M}D}_{= B\hat{M}C} = 180 - A\hat{B}C = A\hat{D}C$

Quindi $B\hat{M}C = A\hat{D}C$



Analogamente a prima si mostra che $A\hat{M}B = A\hat{D}C$

Quindi MB è la bisettrice di $A\hat{M}C$

Il parallelismo di AD e CP $\Rightarrow$

$\Rightarrow A\hat{D}C \overset{(1)}{=} D\hat{C}P \overset{(2)}{=} D\hat{M}P$

perché $A\hat{D}C = A\hat{M}B = D\hat{M}P$

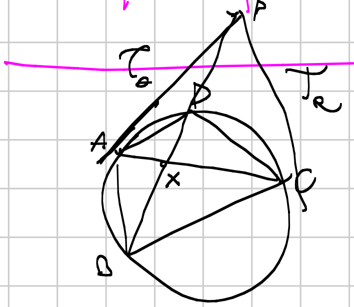
(1) vale per il parallelismo

(2) per quello che abbiamo detto prima

Ma allora $DMCP$ è ciclico perché $\underline{D\hat{C}P = D\hat{M}P}$

Ma allora $C\hat{D}P = C\hat{M}P = 180 - 2x$

A questo punto $D\hat{P}C = 180 - C\hat{D}P - D\hat{C}P = 180 - (180 - 2x) - x$
$= x \Rightarrow D\overset{\triangle}{P}C$ è isoscele



Se $ABCD$ è armonico $\Rightarrow \tau_a$, BD, τ_c concorrono

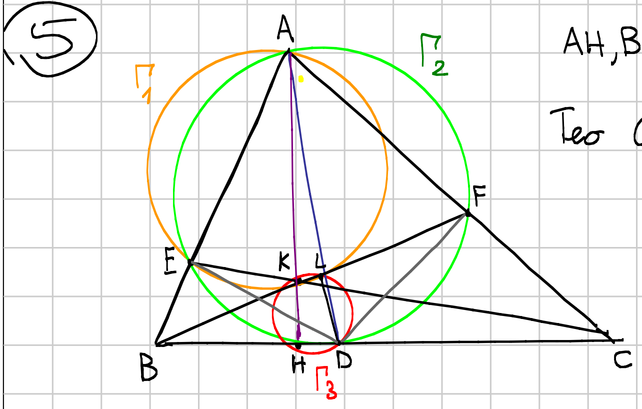
~~B, X, D, P~~ B, D, X, P è una quaterna armonica

$$\frac{BX}{XD} \cdot \frac{DP}{PB} = -1$$

Geometria Pomeriggio PreIMO 2015

Titolo nota 26/05/2015

(5)



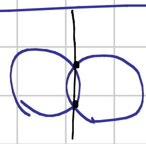
AH, BF, CE concorrono.

Teo Ceva

$$\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AE}{EB}=$$

$$=\frac{AB\cdot\cancel{\cos\beta}}{AC\cdot\cancel{\cos\gamma}}\cdot\frac{CD\cdot\cancel{\cos\gamma}}{\cancel{AD\cos\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{\cancel{AD\cos\frac{\alpha}{2}}}{BD\,\cancel{\cos\beta}}=$$

$=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{CD}{BD}=1$ per il Teorema della bisettrice $\Rightarrow$ BF, CE, altezza concorrono (in K)

Assi radicali  $PA\cdot PB=\mathrm{pow}_{\Gamma}(P)$ 

Prese Γ_1 e Γ_2 $\mathrm{pow}_{\Gamma_1}(P)=\mathrm{pow}_{\Gamma_2}(P)$ è una retta.

Fatto Prese tre circonferenze, i tre assi radicali di ogni coppia di esse concorrono

$P\in a(\Gamma_1,\Gamma_2)$ $P\in a(\Gamma_2,\Gamma_3)\Rightarrow P\in a(\Gamma_1,\Gamma_3)$

Γ_3 = circoscritta a KLD

$a(\Gamma_1,\Gamma_2)=AB$ $a(\Gamma_1,\Gamma_3)=KL\Rightarrow$ si intersecano in B!

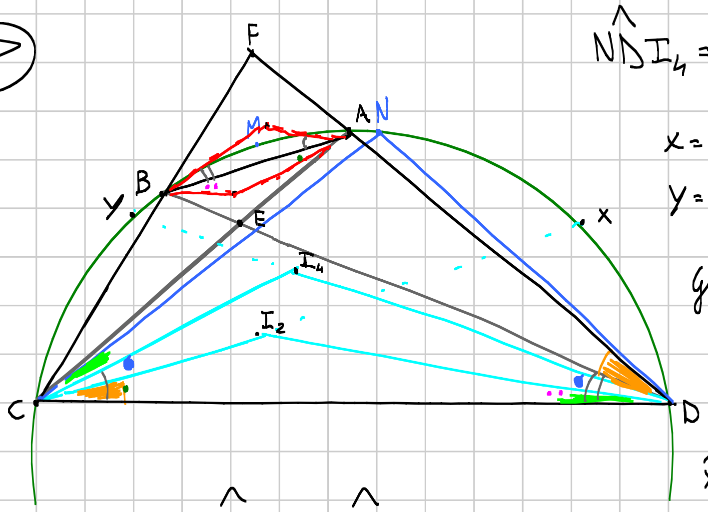
$B\in a(\Gamma_2,\Gamma_3)$ Detto X il p.to di intersezione di $\Gamma_2\Gamma_3$ $X\neq D$

si ha $X\in BD$

$X\in\Gamma_2\Rightarrow X=BD\cap\Gamma_2\Rightarrow X=H$

$\widehat{KLD}=180^\circ-\widehat{KHD}=90^\circ$

(7)



$\widehat{NDI_4} = \widehat{DCI_2}$

x = p.to medio $\widehat{AD}$

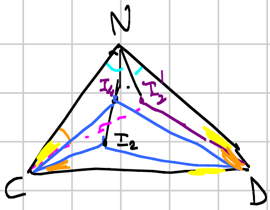
y = p.to medio $\widehat{AC}$

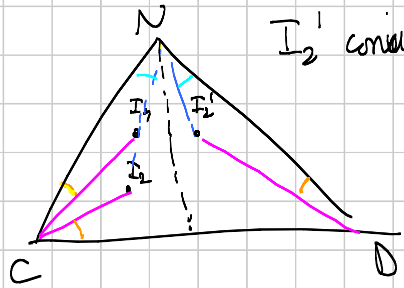
gli angoli sono uguali $\Leftrightarrow \widehat{YN} = \widehat{XD}$

$\widehat{YN} = \widehat{CN} - \widehat{CY} = \frac{\widehat{CD}}{2} - \frac{\widehat{CA}}{2}$

$\widehat{XD} = \widehat{DN} - \widehat{NX} = \frac{\widehat{CD}}{2} - \frac{\widehat{CA}}{2}$

Analogamente $\widehat{NCI_4} = \widehat{CDI_2}$





I_2' coniugato isog di I_2

$\triangle NCD$ isoscele I_2' è il simmetrico di I_4 risp. all'asse di CD

$\widehat{CNI_2} = \widehat{DNI_2'} = \widehat{CNI_4}$

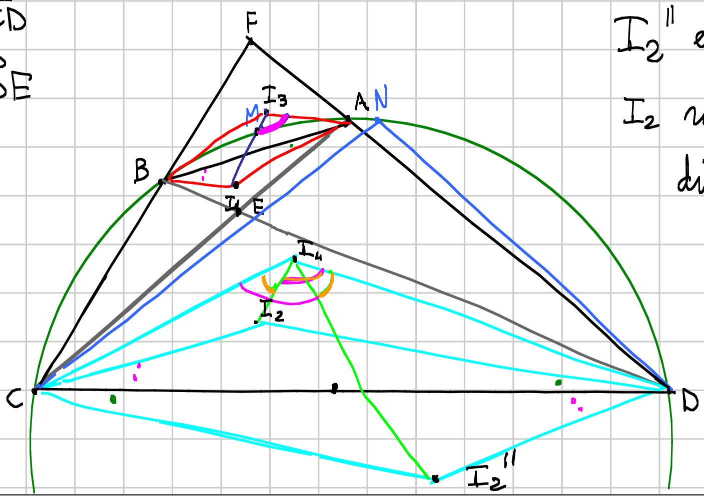
I_2' è coniug. isogonale

I_4 e I_2' sono simmetrici risp. asse di CD

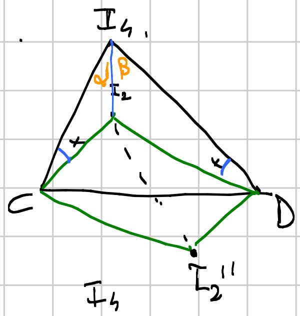
Da questo segue NI_2I_4 allineati

$\triangle FAB \sim \triangle FCD$

$\triangle ABE \sim \triangle CDE$



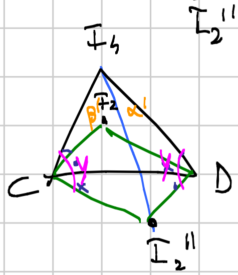
I_2'' è il simmetrico di I_2 risp. al p.to medio di CD



$$\frac{CI_2}{\sin\alpha} = \frac{I_4 I_2}{\sin x} = \frac{I_2 D}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{CI_2}{I_2 D}$$

teo seni $I_4 I_2 C$

teo seni $I_4 I_2 D$



Esattamente come prima

$$\frac{CI_2''}{\sin\beta'} = \frac{DI_2''}{\sin\alpha'} \quad \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{DI_2''}{I_2''C} = \frac{CI_2}{I_2 D} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$\Rightarrow \alpha = \alpha'$

Vogliamo $DI_4'CI_2'' \sim BI_3AI_1$

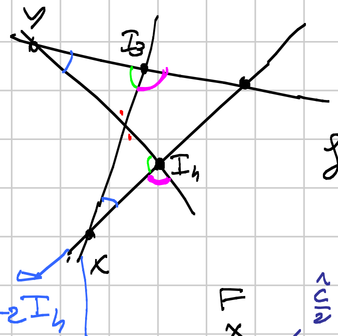
Simmetria risp. bisettrice più omotetia $A \to C$ $B \to D$ $I_3 \to I_4$ $I_1 \to I_2''$

$$A\hat{I}_3 I_1 = C\hat{I}_4 I_2'' = D\hat{I}_4 I_2$$

Qual è l'angolo che insiste su MN?

Dico $\hat{D}$ $\hat{C}$ Conto diangoli: su MN si ha un angolo di $\frac{\hat{C}-\hat{D}}{2}$

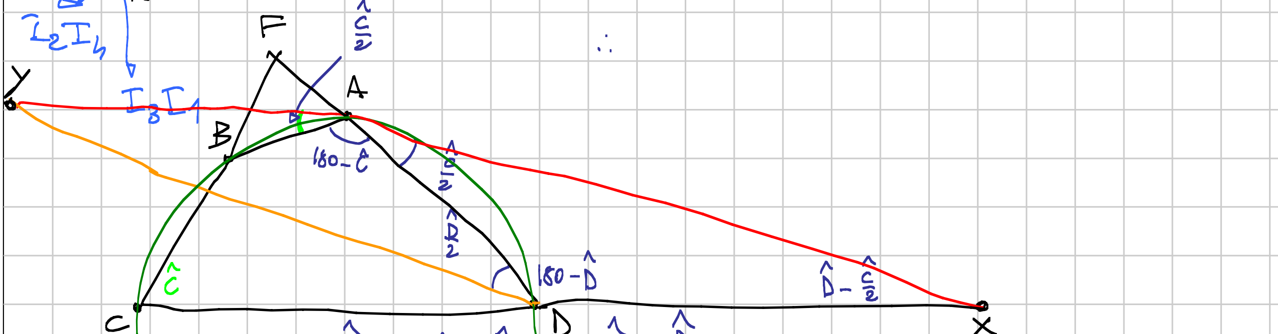
$\Rightarrow$ Basta dimostrare che l'angolo fra I_1I_3 e I_2I_4 è $\frac{\hat{C}-\hat{D}}{2}$



$\Rightarrow \hat{X} = \hat{Y} \Rightarrow$

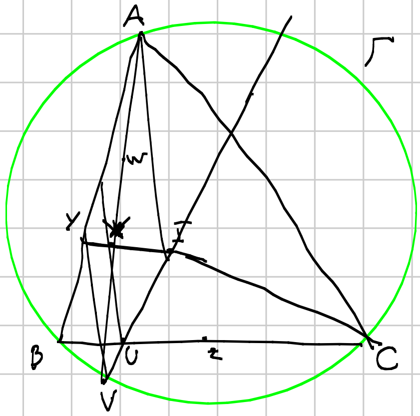
L'angolo fra I_1I_3 e I_2I_4 è l'angolo fra AI_3 e DI_4

$\therefore$



$$D\hat{Y}X = 180 - \left(180 - \frac{\hat{D}}{2}\right) - \left(\hat{D} - \frac{\hat{C}}{2}\right) = \frac{\hat{C}}{2} - \frac{\hat{D}}{2}$$

8



Sol.

Chiamo $\alpha = \frac{\hat{A}}{2}$, $\beta = \frac{\hat{B}}{2}$, $\gamma = \frac{\hat{C}}{2}$.

$C\hat{U}I = 90 - \gamma$

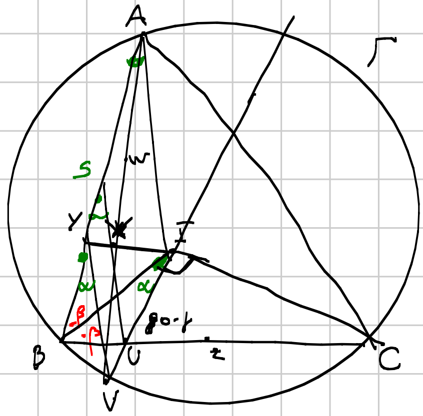
$B\hat{U}I = 90 + \gamma$

$\Downarrow$

$B\hat{I}U = 180 - I\hat{B}U - B\hat{U}I =$

$= 180 - \beta - (90+\gamma) =$

$= 90 - \beta - \gamma = \alpha.$



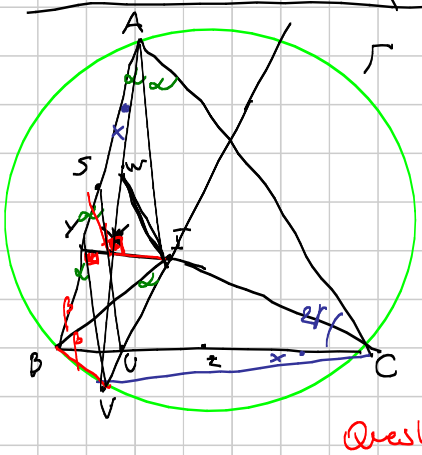
Ma il parallelismo $VX \parallel AI \Rightarrow B\hat{Y}V = B\hat{A}I = \alpha$

Questo ci dice che $\boxed{BYIV \text{ è ciclico}}$ (1). Sia $S = XU \cap AB$

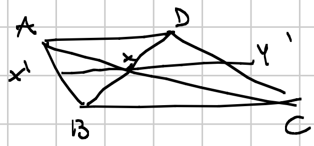
Ma per il parallelismo $AI \parallel SU \Rightarrow B\hat{S}U = B\hat{A}I = \alpha$

Questo ci dice che $\boxed{BSIU \text{ è ciclico}}$ (2). Ma noi abbiamo che $S\hat{B}I = I\hat{B}U$ perché BI è bisettrice. Quindi, siccome $BSIU$ è ciclico $\Rightarrow \boxed{IS = IU}$ (3)

Cosa ci dice l'ultima parte dell'ipotesi?



$AYVI$ è un trapezio



Per Talete $x'x = xy'$!

Hp $\Rightarrow \boxed{XS = XU!}$ (4)

(4) + (3) $\Rightarrow \boxed{XI \perp SU}$ (5)

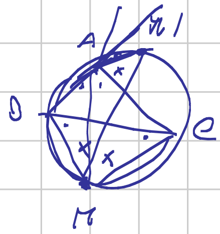
Questo (5) + $YV \parallel SU \Rightarrow \boxed{IY \perp YV}$ (6)

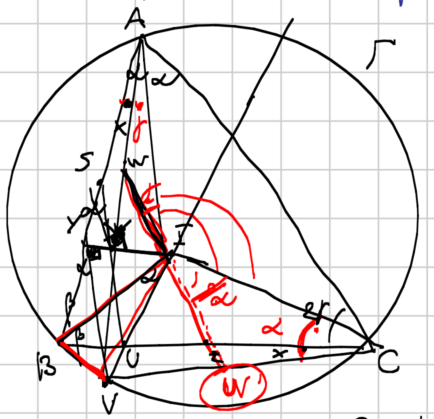
(6) + BYIV ciclico (1) ⇒ $\boxed{V\hat{B}I = 90°}$ (7) ⇒ BV è bisettrice esterna di $A\hat{B}C$ ⇒ $V\hat{A}C = A\hat{C}V$ ⇒

⇒ Chiamo $BAV = x$ ⇒ $2\alpha - x = 2\gamma + x$ ⇒

⇒ $x = \alpha - \gamma$

Ma quindi $\boxed{X\hat{A}I = \gamma}$ (8) (per differenza)

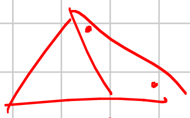




$W\hat{I}A = \gamma$ perché $AIY = 90°$ (vedi prima)

Voglio mostrare che ? = α

Ma noto che $ICV = \alpha$



~~Questo~~ Quindi th ⇔ $IW \cap CV$ è il punto medio di CV

Oss. $IW \parallel BV$: basta mostrare che $W\hat{I}V + I\hat{V}B = 180°$

Ma $W\hat{I}V = W\hat{I}Y + Y\hat{I}V = 90 - \gamma + 180 - (Y\hat{B}V) =$

$= 90 - \gamma + 180 - (Y\hat{B}I + I\hat{B}V) =$

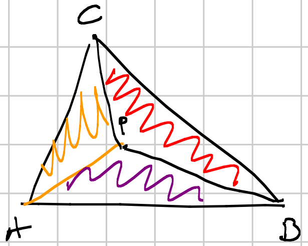
$= \cancel{90} - \gamma + 180 - \beta - \cancel{90} = 90 + \alpha$

$I\hat{V}B = 90 - BIV = 90 - \alpha$

Quindi $W\hat{I}V + I\hat{V}B = 90 + \alpha + 90 - \alpha = 180$

Oss. 2 $IW \cap CV = W'$ chi è W'? ⇒ W' = p.to medio di CV

Quindi ho concluso



$[\lambda[BPC] : \lambda[CPA] : \lambda[APB]]$

Ad es.

$G \quad [1:1:1] = [\tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{3}]$ (esatte)

$I \quad [a : b : c]$

$\vdots$

Fatto 1 Ogni retta del piano, allora si scrive come $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$

Dim. Classiche e teorie di base (CEvarsiteG) (o liforum)

Fatto 2 $\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0$
$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0$

$$\left[\det\begin{pmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{pmatrix} : -\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{pmatrix} : \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix}\right]$$

Dove definisco $\det\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix} := xw - yz$

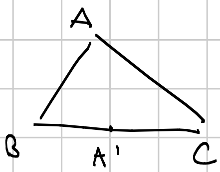
Dim. Usare fatto 1

Fatto 3 Pti $[p_1 : q_1 : r_1]$, $[p_2 : q_2 : r_2]$ $\longrightarrow$ la retta su cui giacciono è

$$\det\begin{pmatrix}q_1 & r_1\\ q_2 & r_2\end{pmatrix} x - \det\begin{pmatrix}p_1 & r_1\\ p_2 & r_2\end{pmatrix} y + \det\begin{pmatrix}p_1 & q_1\\ p_2 & q_2\end{pmatrix} z = 0$$

Dim. Usare fatto 1

$A' \quad [0:1:1]$
$B' \quad [1:0:1]$
$C' \quad [1:1:0]$



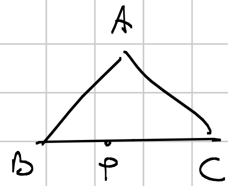
Per def.

$[[BA'C] : [CA'A] : [AA'B]]$

$[0 : 1 : 1]$

$N \quad [(p-a) : (p-b) : (p-c)]$ dove $p = \frac{a+b+c}{2}$

Dim. Quanto valgono le coordinate di P su un lato? Completare...



$A_1 = B'C' \cap EF = [b-c : a-c : b-a]$

$Y = A_1 B \cap A'C' = [c-b : a+c-2b : a-b]$

$Z = A_1 C \cap A'B' = [c-b : c-a : 2c-a-b]$

(Oss. a, b, c lati del triangolo)

Oss. ? $[p_1 : q_1 : r_1]$, $[p_2 : q_2 : r_2]$, $[p_3 : q_3 : r_3]$ allineati $\iff \det\begin{pmatrix}p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\\ p_3 & q_3 & r_3\end{pmatrix} :=$

$= p_1 q_2 r_3 + q_1 r_2 p_3 + r_1 p_2 q_3 - p_3 q_2 r_1 -$
$- p_1 q_3 r_2 - q_3 p_2 q_1 = 0$

Dim. Fatti precedenti

La th. è equivalente a YZI allineati + (1)

YLN allineati

Ovvero mostrare che

$$\det\begin{pmatrix} c-b & a+c-2b & a-b \\ c-b & c-a & 2c-a-b \\ a & b & c \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} c-b & a+c-2b & a+b \\ a & b & c \\ b+c-a & a+c-b & a+b-c \end{pmatrix} = 0$$

Che sono vere.

PREIMO 2015 – TDN MATTINO

Titolo nota 25/05/2015

Esercizio N1 $\quad 2^n + n = m!$

$m=1$ No

Allora $m!$ deve essere pari $\Rightarrow$ n deve essere pari

$n = 2^k s \quad s$ dispari.

Se $k=1 \quad 2 \| m!$

$m = 2,3 \quad 2^2+2 = 3!$

Sol. $(m,n) = (3,2)$

$k \geq 2$ Considero una eventuale soluzione

$m! = 2^n + n \geq 2^{2^k} + 2^k \geq \ldots$

$2^k \| 2^n + n$

Per esempio, dimostriamo che $2^{2^k} + 2^k > (2k-1)!$

Se dimostriamo questo, $m \geq 2k$

$m!$ è divisibile per 2^{k+1}.

Verifica di alcuni casi iniziali

Dimostrazione per induzione: $k \Rightarrow k+1$

Basta dimostrare: $\dfrac{2^{2^{k+1}} + 2^{k+1}}{2^{2^k} + 2^k} > (2k+1) \cdot 2k$

cioè $2^{2^{k+1}} + 2^{k+1} > \left(2^{2^k} + 2^k\right) \cdot (2k+1) \cdot 2k$

Osserviamo che:

– $2^{2^k} + 2^k < 2 \cdot 2^{2^k}$

– $k \leq 2^k - 1 \Rightarrow 2k < 2^{k+1}$

$2k+1 \leq 2^{k+1}$

Il termine a destra è minore di

$2^{2^k+1} \cdot 2^{k+1} \cdot 2^{k+1} = 2^{2^k + 2k + 3}$

e questo è evidentemente $< 2^{2^{k+1}}$
per k grande $(k \geq 4)$.

Esercizio N2 $\quad cm$ e cn hanno le stesse cifre $\neq 0$

WLOG $m \geq n$.

ENUNCIATO PER $(rm, rn) \Rightarrow$ ENUNCIATO per (m, n)

$$n = 2^a 5^b \ell \qquad r = 2^b 5^a \qquad rn = 10^{a+b} \ell$$

Posso limitarmi al caso $(n, 10) = 1$.
m rimane qualsiasi.

Oss. $\quad (10m - n, 10) = 1$

Quindi esiste k tale che $10^k \equiv 1 \pmod{10m-n}$
cioè $\quad 10^k - 1 = c(10m - n)$
ossia

$$\boxed{10cm + 1 = 10^k + cn}$$

Quante cifre hanno cm e cn?

$$10^k = 10cm - cn + 1 > 10cn - cn = 9cn > cn$$
$\Rightarrow$ le cifre di cn sono al più k.

Invece cm ha esattamente k cifre

- $10cm + 1 \geq 10^k + 1 \qquad cm \geq 10^{k-1} \rightarrow$ almeno k cifre
- $10cm + 1 < 10^k + 10^k = 2 \cdot 10^k \leq 10^{k+1}$
  $cm < 10^k \qquad \rightarrow$ al più k cifre.

$$cm = \overline{a_1 a_2 \cdots a_k} \qquad \leftarrow \text{(cifre decimali)}$$
$$cn = \overline{b_1 b_2 \cdots b_k} \qquad \text{con eventuali zeri iniziali.}$$

$$10cm+1 = 10^k + cn$$

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_k 1} = \overline{1 b_1 b_2 \dots b_k}$$

$a_1 = 1 \quad b_k = 1$

$a_2 \dots a_k$ sono uguali a $b_1 \dots b_{k-1}$

Esercizio N3 $\quad n > 3$ dispari $\quad m = \phi(n)$

$\exists\, q$ primo $\quad q \mid 2^m - 1 \quad q \nmid n$

Eulero $\quad 2^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n$ cioè $\quad n \mid 2^m - 1$.

1° caso $\quad n = p^k > 3 \quad m = p^k - p^{k-1}$ è pari ≥ 4.

Sia $p \mid n$. Allora $\quad p \mid 2^m - 1 = (2^{m/2} - 1)(2^{m/2} + 1)$

entrambi > 1

p divide uno dei fattori a destra

Sia q primo che divide l'altro fattore

$q \mid 2^m - 1 \quad q \neq p. \quad q \nmid p^k = n$

2° caso $\quad n$ ha almeno due fattori primi distinti.

$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots$

$m = \phi(n) = (p_1 - 1)\, p_1^{a_1 - 1} (p_2 - 1)\, p_2^{a_2 - 1} \dots$

m è divisibile per 4

$p_i - 1 \mid \frac{m}{2}$

Fermat $\quad 2^{m/2} \equiv 1 \pmod p \quad \forall p \mid n$

$p \mid n \mid 2^m - 1 = (2^{m/2} - 1)(2^{m/2} + 1)$

Tutti questi primi dividono $2^{m/2} - 1$.

$\Rightarrow$ Ogni fattore primo q di $2^{m/2} + 1$ divide $2^m - 1$, ma non divide n

Esercizio N4 $\quad a$ tale che $\exists$ sol. intere positive di
$$(m^2+n)(m+n^2) = a(m-n)^3.$$

(a) Ci sono almeno 500 numeri amichevoli nell'intervallo $[1, 2015]$.

Tentativo di trovare dei numeri amichevoli
$$m-n=k \qquad m=n+k$$
Provo a far comparire k^2 in uno dei fattori, per esempio a destra:
$$n+k+n^2 \qquad k=n+1$$
$$(n+1)^2$$
Provo con $k=n+1 \qquad m=n+k=2n+1$.
L'altro fattore diventa
$$m^2+n = (2n+1)^2+n = 4n^2+5n+1 = (n+1)(4n+1)$$

Il prodotto è : $(n+1)^3(4n+1)$
$a=4n+1$ è OK.

(b) 2 è amichevole?

Partiamo dall'uguaglianza
$$(m^2+n)-(m+n^2) = (m-n)(m+n-1).$$
Poniamo $\quad x = m+n^2$
$$m^2+n = x+(m-n)(m+n-1)$$

$$x\,(x+(m-n)(m+n-1)) = 2\,(m-n)^3$$

Equazione di 2^0 grado nella x
ci vuole Δ = quadrato.

$$\Delta = (m-n)^2(m+n-1)^2+8\,(m-n)^3$$
$$= (m-n)^2\left[(m+n-1)^2+8(m-n)\right]$$

$$(m+n-1)^2+8(m-n) < (m+n+3)^2$$

Inoltre m, n devono avere la stessa parità
$m+n$ deve essere pari
$(m+n-1)^2+8(m-n)$ deve essere dispari.

C'è un unica possibilità:

$$(m+n-1)^2+8(m-n)=(m+n+1)^2$$
$$8(m-n)=(m+n+1)^2-(m+n-1)^2$$
$$=2(m+n)\cdot 2$$
$$2(m-n)=m+n$$
$$m=3n$$

Sostituisco nell'equazione iniziale e trovo

$$n^2(9n+1)(3+n)=4n^2$$

ASSURDO.

$$x^{\phi(n)}-1=\prod_{d\mid\phi(n)}\Phi_d(x)$$

con $x=2$

$$2^{\phi(n)}-1=\prod_{d\mid\phi(n)}\Phi_d(2)$$

PREIMO 2015 – TDN POMERIGGIO

Titolo nota 25/05/2015

Esercizio N5 $\quad ab \neq \square \Rightarrow \exists n$ t.c. $(a^n-1)(b^n-1) \neq \square$.

Teo. $m^2 ab \neq \square \Rightarrow$ esiste un numero primo p dispari tale che $m^2 ab$ non è un quadrato modulo p.

Supposto il teo. vero, consideriamo il simbolo di Legendre modulo p:

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = -1$$

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$$

I fattori sono uno $+1$ l'altro -1.

Per simmetria supponiamo $\left(\frac{a}{p}\right) = +1 \quad \left(\frac{b}{p}\right) = -1$

$$\left(\frac{x}{p}\right) = +1 \iff x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$$

Proviamo con l'esponente $n = \frac{p-1}{2}$

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(b^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)$$

divisibile per p $\qquad \equiv -2 \pmod p$ non divisibile per p.

Se la potenza di p che divide $a^{p-1/2}-1$ è dispari, sono a posto.

Se no, cambio n, e prendo $\frac{p-1}{2} \cdot p$

$$a^{\frac{p-1}{2}p} - 1$$

LTE: la potenza di p che divide $a^{\frac{p-1}{2}p} - 1$ è la potenza di p che divide $a^{p-1/2}-1$ $+ 1$.

(Per l'altro fattore non c'è problema: $b^{\frac{p-1}{2}p} - 1 \equiv b^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv -2 \pmod p$)

PROBLEMA 6

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$\forall$ p e a,b t.c. $p \mid ab-1$ allora $p \mid f(a)f(b)-1$

trovare f

SOLUZIONE: $f(x) = \pm x^n$

$$p \mid ab-1 \mid (ab)^n - 1$$

$$b \equiv \frac{1}{a} \pmod p$$

$$f(b) \equiv f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{g(a)}{a^n}$$

Traccia della dimostrazione del teorema

1. Basta considerare m "libero da quadrati"
$m = q_1 \cdots q_k$ $\quad q_i$ primi distinti

Caso A: m dispari

Con il teo. cinese del resto, posso risolvere il sistema

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{q_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{q_2} \\ \dots \\ x \equiv a_k \pmod{q_k} \\ x \equiv 1 \pmod 4 \end{cases} \qquad x \equiv b \pmod{4 q_1 \cdots q_k}$$

$$\left(\frac{a_1}{q_1}\right) = -1 \qquad \left(\frac{a_2}{q_2}\right) = 1, \dots, \left(\frac{a_k}{q_k}\right) = 1$$

RECIPROCITÀ QUADRATICA

$$\left(\frac{a_i}{q_i}\right) = \left(\frac{q_i}{a_i}\right)$$

DIRICHLET Esiste un primo $p \equiv b \pmod{4q_1 \cdots q_k}$

$$\left(\frac{p}{q_1 \cdots q_k}\right) = \left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right) \cdots \left(\frac{p}{q_k}\right) = (-1)(+1)\cdots(+1) = -1.$$

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{q_1 \cdots q_k}{p}\right) = -1$$

PROBLEMA 6

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$\forall$ p e a, b t.c. $p \mid ab - 1$ allora $p \mid f(a)f(b) - 1$

trovare f

SOLUZIONE: $f(x) = \pm x^n$

$$p \mid ab - 1 \mid (ab)^n - 1$$

$$b \equiv \frac{1}{a} \pmod p$$

$$f(b) \equiv f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{g(a)}{a^n}$$

dove $g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$

se $p \mid ab - 1 \longrightarrow p \mid f(a) \cdot \frac{g(a)}{a^n} - 1$

$\Rightarrow p \mid f(a)\,g(a) - a^n$

fissato a vale per infiniti p

$\longrightarrow f(a)\,g(a) = a^n$

$f(x)\,g(x) - x^n = F(x)$

ha infinite radici

$\rightarrow F(x) \equiv 0$

$f(x)\,g(x) = x^n$

$\rightarrow f(x) = \pm x^k$

per qualche k

$f(q)$ q PRIMO

$f(q) = \pm q^k$ PER QUALCHE k

PER ASSURDO:

$f(q) \neq \pm$ POTENZA DI q

$$\exists\, p \in \mathbb{P} \mid p \neq q,\ p \mid f(q)$$

$$f(q) = \pm p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$\downarrow$$

$$q$$

$$b = q^{-1}\ (p) \qquad q \not\equiv 0\ (p)$$

$$p \mid q \cdot q^{-1} - 1$$

$$p \mid \underbrace{f(q)}_{\equiv 0\ (p)} f(q^{-1}) - 1 \qquad \square$$

$$f(q) = \pm q^k$$

VERA PER OGNI q

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$$

$$\lim_{q \to +\infty} \frac{f(q)}{a_n q^n} = 1 \qquad \lim_{q \to +\infty} \frac{\pm q^k}{a_n q^n} = 1$$

CI SONO ∞ q

$K = n$ E $a_n = \pm 1$

$f(q) = q^K$ o $f(q) = -q^K$

IL POLINOMIO $\overline{f}(x) = f(x) - x^K$ HA INFINITE RADICI

$\overline{f}(x) \equiv 0$

$f(x) = x^K$ $\quad$ $f(x) = -x^K$

Esercizio N7 $\quad m^2 + 2 \cdot 3^n = m(2^{n+1} - 1)$.

L'equazione è quadratica in m $(f(m) = 0)$

Se ha due radici, x, y, si ha

$$\begin{cases} x + y = 2^{n+1} - 1 \\ xy = 2 \cdot 3^n \end{cases}$$

Per simmetria, possiamo $x = 3^a$ $\quad y = 2 \cdot 3^{n-a}$.

$f(x) = 0 \qquad 3^{2a} + 2 \cdot 3^n = 3^a(2^{n+1} - 1)$.

SEMPLIFICANDO, $\quad 3^a + 2 \cdot 3^{n-a} = 2^{n+1} - 1$.

1° caso $\quad$ n pari,

$a \equiv n - a \pmod 2$

TUTTI E DUE PARI o TUTTI E DUE DISPARI

CONGRUENZA mod 8

P $\quad 3^a + 2\cdot 3^{n-a} \equiv 1 + 2\cdot 1 \equiv 3 \pmod 8$

D $\quad 3^a + 2\cdot 3^{n-a} \equiv 3 + 2\cdot 3 \equiv 1 \pmod 8$

NON VA BENE per $n \geq 2$

(IL CASO PARI EVENTUALE RESTANTE È $n=0$)

<u>2° caso</u> n dispari ($n+1$ pari)

$$3 \mid 2^{n+1} - 1$$

Se $3^k \parallel m$ scrivo $v_3(m) = k$

$$v_3(2^{n+1}-1) = v_3\left((2^{n+1}-1)(2^{n+1}+1)\right) = v_3(4^{n+1}-1)$$

LTE $\Rightarrow 1 + v_3(n+1)$.

(a destra)

A sinistra

(perché $a \neq n-a$)

$$v_3(3^a + 2\cdot 3^{n-a}) = \min\{a, n-a\}.$$

Questo dice $\min\{a, n-a\} = 1 + v_3(n+1)$

$$= 1 + v_3\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Traducendo, questo significa

$$\min\{3^a, 3^{n-a}\} \leq 3\,\frac{n+1}{2}$$

$$\max\{3^a, 3^{n-a}\} = \frac{3^n}{\min\ldots} \geq \frac{3^{n-1}\cdot 2}{n+1}$$

Osserviamo infine

$$3^a + 2\cdot 3^{n-a} \geq 3^{\max\{a, n-a\}} + \left(2\cdot 3^{\min\{a,n-a\}}\right)$$

$$\geq \frac{3^{n-1}\cdot 2}{n+1}$$

Quest' ultimo numer è $> 2^{n+1}-1$

se $n \geq 9$

RESTA UN NUMERO FINITO DI CASI DA VERIFICARE

($n=0$ PARI, $n=1,3,5,7$ DISPARI)

$n=3 \Rightarrow m=6 \quad m=9$
$n=5 \Rightarrow m=9 \quad m=54$

GLI ALTRI NON DANNO SOLUZIONE

N8 $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$

$n \leq f(n) \leq n+2014$

$(m,n)=1 \to (f(m), f(n))=1.$

$\Downarrow$ $\cdot$ $\sim$

$p \mid f(n) \to p \mid n$ (p PRIMO)

$p_1 < p_2 < \ldots < p_k < \ldots$ ← TUTTI I PRIMI

$f(p_1)$

$\ldots$

$f(p_k)$

1. $(p_A, p_B)=1 \to (f(p_A), f(p_B))=1$

I FATTORI PRIMI DI $f(p_1), \ldots, f(p_k)$ SONO A DUE A DUE DISGIUNTI.

2. SCELGO K IN MODO CHE

$$p_K + 2015 < p_{K+1}$$

DIMOSTRIAMO CHE CI SONO INFINITI K CON QUESTA PROPRIETÀ.

PER ASSURDO: SUPPONIAMO $\exists N \mid \forall m > N$ VALE $p_{m+1} \leq p_m + 2015$

CONSIDERIAMO I NUMERI:

$$n!+2,\ n!+3,\ \ldots,\ n!+2017$$

PER n SUFFICIENTEMENTE GRANDE

$$n > \max\{2017, p_{N+1}\}$$

$n!+K$ NON È PRIMO PERCHÉ $K \mid n!+K$
$K \neq 1, n!+K$.

IL PIÙ GRANDE PRIMO $p_z < n!+2$ E IL PIÙ PICCOLO PRIMO $p_{z+1} > n!+2017$ SONO APPUNTO CONSECUTIVI: ASSURDO POICHÉ $z > N$ E $p_{z+1} > p_z + 2015$.

$\square$

QUINDI:

ESISTONO INFINITI K TALI CHE

$$p_{K+1} > p_K + 2015.$$

PRENDO UN K CON QUESTA PROPRIETÀ.

E CONSIDERO

$f(p_1)$

...

$f(p_K)$

È POSSIBILE CHE $p_J \mid f(p_i)$ CON $J > K$, $i \leq K$.

$p_J \mid f(p_i) \Rightarrow f(p_i) \geq p_J \geq p_{K+1} > p_K + 2015 \geq p_i + 2015$

CONTRO $p_i \leq f(p_i) \leq p_i + 2015$

$\left.\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \dots \\ p_K \end{array}\right\} \Rightarrow$ SONO TUTTI I PRIM. DA 2 A p_K

LA LORO IMMAGINE HA PRIM $\leq p_K$

$f(p_i) \neq 1$. PERCHÉ $f(p_i) \geq p_i > 1$.

$\forall i \ \exists r \mid p_r \mid f(p_i)$, $r \leq K$.

PERCHÉ $f(p_i) \neq 1$, $p_J \nmid f(p_i)$ $J > K$

SUPPONIAMO $f(p_i)$ COMPOSTO PER QUALCHE i

$$\left.\begin{array}{l} f(p_1) \\ f(p_i) = p_A^{\alpha} \cdot p_B^{\beta} \\ f(p_K) \end{array}\right] \quad (f(p_x), f(p_y)) = 1.$$

NON HANNO FATTORI MUTUALMENTE COMUNI.

DENOTIAMO CON $\omega(n)$ IL NUMERO DI PRIMI DISTINTI DI n.

$\omega(f(p_i)) \geq 1$. $\quad \omega((f(p_1) \cdot \ldots \cdot f(p_i) \cdot \ldots \cdot f(p_K))) =$

$$= \underbrace{\omega(f(p_1)) + \ldots +}_{\geq 1} \underbrace{\omega(f(p_i))}_{\geq 2} \underbrace{+ \ldots + \omega(f(p_K))}_{\geq 1}$$

$\geq K+1$.

IL PRODOTTO $f(p_1) \ldots f(p_K)$ HA $K+1$ PRIMI DISTINTI:

ASSURDO! POICHÉ $p_J \nmid f(p_i)$ $\forall J > K$

PERCIÒ POICHÉ $\exists$ INFINITI K CON LA PROPRIETÀ

$p_K + 2015 < p_{K+1}$

E $\forall \, l \leq K$ $f(p_l)$ È UNA POTENZA DI PRIMO,

$f(p)$ È UNA POTENZA DI PRIMO $\forall p \in \mathbb{P}$.

$\forall q \in \mathbb{P}^{\leftarrow \text{PRIMI}}$ $\exists$ $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{P}$ $f(p) = q^n$.

VERO PERCHÉ OGNUNO DI $f(p_1) \ldots f(p_K)$

PRENDE <u>ESATTAMENTE</u> OGNUNO DEI PRIMI

$p_1, \dots, p_k$

Supponiamo $f(p) = q^k$ $\to \geq 2$.

Supponiamo $f(p^n) \neq$ potenza di q.

$\exists r \in \mathbb{P} \mid r \mid f(p^n),\ r \neq q$

$\exists s \in \mathbb{P} \mid f(s) = r^j \to s \neq p$ POICHÉ $r \neq q$

$$(s, p^n) = 1 \to \big(\underset{1}{\underset{\shortparallel}{f(s)}}, f(p^n)\big) = \big(r^j, \overset{\text{MULTIPLO DI } r}{f(p^n)}\big) \geq r$$

ASSURDO.

Perciò $f(p^k) = q^c$. $\forall p \in \mathbb{P},\ k \in \mathbb{Z}^+$.

Supponiamo che $\forall k$ valga:

$$p^k \leq f(p^k) \leq p^k + 2014$$

$$p^k \leq q^c \leq p^k + 2014$$

$$1 \leq \frac{q^c}{p^k} \leq 1 + \frac{2014}{p^k}$$

$a \leq x \leq b$

$c \leq y \leq d$

$\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$

Vale anche per $k+1$:

$$1 \leq \frac{q^{c'}}{p^{k+1}} \leq 1 + \frac{2014}{p^{k+1}}$$

$$\left(1 + \frac{2014}{p^k}\right)^{-1} \leq \frac{q^{c'-c}}{p} \leq 1 + \frac{2014}{p^{k+1}}$$

PER K GRANDE: $\exists n \mid \frac{q^n}{p}$ È SEMPRE PIÙ VICINO A 1.

$$1-\lambda < \frac{q^n}{p} < 1+\lambda \quad \forall \lambda > 0.$$

ALLORA $q^n = p$ ↗ $q = p$ OK.
↘ $q^n = p \rightsquigarrow p \notin \mathbb{P}$

PERCIÒ $f(p) = p^k \quad \forall p \in \mathbb{P}$

$f(n)$. $\exists q \mid q \mid f(n),\ q \nmid n$.

CONSIDERO $(n,q) = 1 \to (f(q), f(n)) = 1$

$\neq$ $q \mid f(q),\ q \mid f(n)$

Problema N7

$$m^2 + 2\cdot 3^n = m(2^{n+1}-1)$$

i) $m = 2^\alpha \cdot 3^\beta$ $\qquad \alpha \leq 1$, $\beta \leq n$

ii) wlog $\boxed{m = 3^t}$ $\qquad m = \frac{2\cdot 3^n}{3^t}$

$\boxed{t,\ n-t \geq 3}$ $\qquad \boxed{3^n = 2b^2+1}$

$$3^{2t} + 2\cdot 3^n = 3^t(2^{n+1}-1)$$

$$\boxed{3^t + 2\cdot 3^{n-t} = 2^{n+1}-1}$$

mod 27 $\quad LHS \equiv 0 \quad (27)$

$\longrightarrow \quad 2^{n+1} \equiv 1 \quad (27)$

$2^{18} \equiv 1 \quad (27)$

$18 \mid n+1$

$2^{n+1} \equiv 1 \quad (7)$ $\qquad 2^6 \equiv 1 \quad (7)$

$2^{18} \equiv 1 \quad (7)$

$2^{n+1} - 1 \equiv 0 \ (19)$ $\qquad 2^{18} \equiv 1 \quad (19)$

$3^t + 2\cdot 3^{n-t} \equiv 0 \quad (7)$
(19)

$n-t \geq t$

$$3^t(1 + 2\cdot 3^{n-2t}) \equiv 0 \quad (7)$$

$$1 + 2 \cdot 3^{n-2t} \equiv 0 \quad (7)$$

$$3^{n-2t} \equiv 3 \quad (7)$$

$$\boxed{n - 2t \equiv 1 \quad (6)}$$

$$3^{n-2t} \equiv 9 \quad (19) \quad \to \boxed{n-2t \equiv 2 \quad (18)}$$