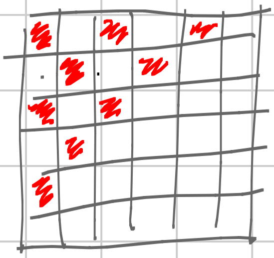
PreIMO 2016 - COMBINATORIA (mattino)

Titolo nota 24/05/2016

C1

un drago si nasconde in una tabella
2015×2015



1 passo: coloriamo a scacchiera

2 passo: colpiamo le bianche poi le rosse poi
ancora le bianche

ora abbiamo finito di sparare
perché il drago si sposta su una
casella del colore diverso

al più servono $\left\lfloor \frac{2015^2}{2} 3 \right\rfloor$

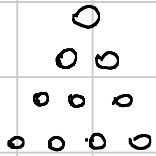
3 passo: se considero 
devo sparare almeno 3 volte
intanto devo colpirle entrambe
se sparo solo 2 volte non sono sicuro:
se il drago stava sulla seconda
potrebbe spostarsi sulla prima

4 passo: tassello la scacchiera con 2×1
lasciando un angolino
$\Rightarrow$ mi servono almeno
$3 \times$ ogni tessera 2×1 +
1 sull'angolino

C2 36 persone, nessuno stringe la mano a qualcuno con lo stesso numero di strette di mano. Quante strette di mano al max?

Quante persone possono stringere la mano a tutti? Solo 1

In generale, quanti posso stringere la mano a $36-k$ persone? Al massimo k. Infatti, se m è il numero di persone che fanno $36-k$ strette, allora questi possono stringere la mano solo a $36-m$ persone. Si ottiene che $m \leq k$

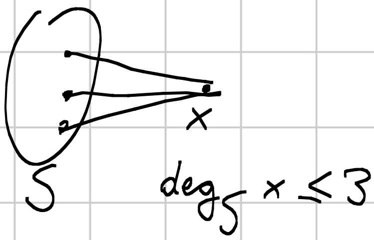


Se io dispongo le 36 persone a triangolo, e faccio in modo che ogni persona stringa la mano a quelli che non stanno sulla sua riga, allora ho vinto.

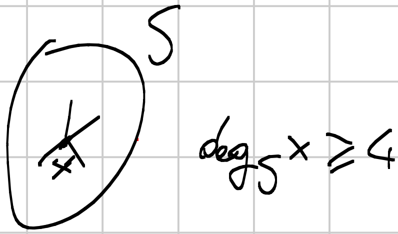
C3.

In un grafo G esiste sempre $S \subseteq V(G)$ t.c. non succedono né

A



B



Cosa faccio?

→ costruisco S aggiungendo un vertice alla volta... ... FALLISCO

→ cerco un algoritmo "sensato" che mi dica l'ordine in cui aggiungere i vertici... ... FALLISCO

Nuova idea! Voglio caratterizzare S come massimizzante una certa funzione f della configurazione.

CIOÈ voglio f che so far aumentare se sono in A o in B.

$S \subseteq V(G)$ sono finiti $\to \exists S$ che massimizza f; questo deve per forza soddisfare la tesi.

ingredienti candidati per f: $|S|$, $E(S)$

archi dentro S

mossa A $\quad x \in A \setminus S \quad \deg_S x \leq 3$

$x \quad A \setminus S \longrightarrow S$

$\Delta|S| = +1$

$\Delta E(S) \leq 3$

mossa B $\quad x \in S \quad \deg_S x \geq 4$

$x \quad S \longrightarrow A \setminus S$

$\Delta|S| = -1$

$\Delta E(S) \leq -4$

posso prendere $f(S) = \pi|S| - E(S)$

mossa A $\quad \Delta f(S) \geq \pi - 3 > 0$

B $\quad \Delta f(S) \geq 4 - \pi > 0$

C4 $A, B \subseteq \mathbb{N}$, A finito. Ogni $n \in \mathbb{N}$ si scrive come $a+b$ in un unico modo. Mostrare che B è periodico.

A	B
0	0
1	
2	
3	
4	
	5
	10
	15
20	
21	

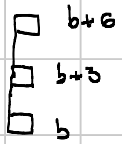
Metodo costruttivo: brutto

Cercare condizioni su A: non funziona

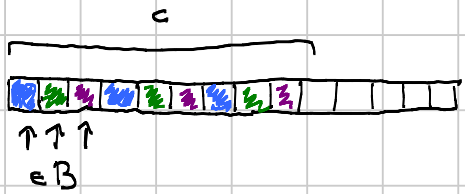
Idea: per ogni $b \in B$, considero $b + A = \{b+a : a \in A\} = X_b$

Questi X_b sono invarianti per traslazione, sono dei tasselli

Devo tassellare $\mathbb{N}$ con gli X_b



Nell'esempio $A = \{0, 3, 6\}$



Guardo come è fatto $\mathbb{N}$ a un certo momento

Inizio: tutto vuoto

1: • • X · · X · · ·

2: • X X · X X · · · · ·

3: · · · · • • • • •

Da un certo punto in poi è tutto vuoto, quindi un numero finito di possibilità

Se io ho i buchi fatti in un certo modo, in modo unico so come saranno fatti i buchi dopo aver messo un tassello.

Ma io so come è fatto il tassello che ho appena messo.

Quindi la sequenza è periodica

Soluzione trollosa.

$a = \sum_{i \in A} 10^{-i}$ $\qquad$ $b = \sum_{i \in B} 10^{-i}$

$a \in \mathbb{Q}$, $\quad b \in \mathbb{R}$

$ab = 1,\bar{1}$

$b = \frac{10}{9a} \in \mathbb{Q}$, non ha antiperiodo e quindi è periodico. FINE

Euristica sulla soluzione trollosa

l'ipotesi $\qquad a(x) := \sum_{i \in A} x^i \left(= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i x^i \right)$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 & i \notin A \\ 1 & i \in A \end{cases}$$

$b(x) \quad$ " "

è equivalente a $\quad \boxed{a(x)\,b(x) = \frac{1}{1-x}}$

poi $a(x)$ è un polinomio

se voglio B periodico (di periodo c)

$\to$ voglio $\boxed{b(x)(1-x^c)}$ sia un polinomio di grado $< c$ (in particolare i coeff. sono definitivamente nulli)

la tesi si riconduce a dimostrare che

$$\frac{1-x^c}{(1-x)\,a(x)}$$ è un polinomio

cioè voglio che le radici del denominatore sia radici dell'unità distinte

È vero perché $b(x) = \dfrac{1}{(1-x)\,a(x)}$ ha coefficienti interi e limitati

Infatti quando avete $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbb{R}[[x]]$

potete scrivere $= \displaystyle\sum_{i,j} \frac{c_{ij}}{(x-r_i)^j}$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}$$

$\Rightarrow$ i coeff. della serie formale sono

$$[x^n]\,\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{ij} c_{ij}\, r_i^n \binom{n}{j-1}$$

$\Rightarrow$ se sono interi e limitati

$\Rightarrow$ r_i sono radici dell'unità e le molteplicità sono 1