PreIMO '16 COMBINATORIA (pomeriggio)

Titolo nota 24/05/2016

C5 idea: induzione; dimostro che posso fare qualunque permutazione della n-upla $1 \dots n$

passo base: $n = 1, 3$

hp. induttiva: so fare tutte le permutazioni di $1 \dots n$

passo induttivo: mi basta saper scambiare $n+1$ con un altro numero x

perché → so scambiare $n+1$ con qualunque y $\left((n+1\ y) = (y\ x)(n+1\ x)(y\ x) \right)$

hp. induttiva

→ so fare tutte le trasposizioni su $1 \dots n+1$ → tesi.

- se $n+1$ è pari so fare $\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right)$
- se $n+1$ è dispari, sostengo di saper fare $\left(n+1\ \ \frac{n}{2}+1\right)$

Faccio:

$$1\ 2\ \dots\ \frac{n}{2}+1\ \dots\ n+1$$

$$1\ 1\ \dots\ \frac{n}{2}+1\ \dots\ n+2 \quad \leftarrow \text{pari}$$

$$1\ 1\ \dots\ n+2\ \dots\ \frac{n}{2}+1$$

ora voglio trasformare in

$$1\ 2\ \dots\ n+1\ \dots\ \frac{n}{2}+1$$

pongo

$$f(a,b) = \begin{cases} \left(\frac{a}{2}, b+\frac{a}{2}\right) & \text{se } a \text{ è pari} \\ \left(a+\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right) & \text{se } b \text{ è pari} \end{cases}$$

$a+b$ è dispari

voglio dire che $\exists k \quad f^{(k)}(1, m+2) = (2, m+1)$

$(c,d) = f(a,b)$ so chi sono a e b

2 possibilità:

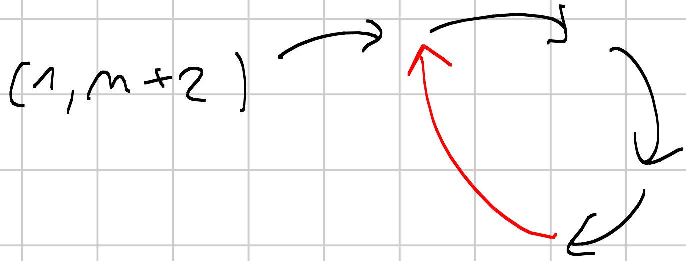
$\nearrow (a,b) = (2c, d-c)$

$\searrow (a,b) = (c-d, 2d)$

MA solo una delle due coppie è "positiva"

→ solo una va bene

Quindi so che $\exists k \quad f^{(k+1)}(1, m+2) = (1, m+2)$



questo non può succedere perché ed prima che vedo due volte è immagine di 2 coppie diverse a meno che non sia $(1, m+2)$.

Ma allora $f^{(k)}(1, m+2) = (2, m+1)$

→ HO VINTO! $\square$

CG

una parola composta da H e V
è buona se inizia con 2 volte
la stessa stringa

eg. HVVHVVVV è buona

c'è un automa che controlla se una
parola è buona o cattiva

Oss: esiste una parola cattiva per ogni lunghezza
HVVVVV _ _ _ V

Oss 2: voglio costruire una famiglia di parole p_n
tali che il # di confronti in funzione
della lunghezza di p_n cresca in modo più che
lineare

Oss 2bis: non mi piacciono le parole buone

Eg: $HV\underbrace{HH}\,\underbrace{HVHV}\,\underbrace{HVHHHVHH}$ - - - -

questo esempio funziona!

Dico che $p_0 = H$
$p_{n+1} = p_n \tilde{p}_n$ dove se p è una parola
$\tilde{p}$ ha le stesse
lettere tranne
l'ultima

Faccio un'altra costruzione:

$$\sigma : \begin{array}{l} H \longmapsto HV \\ V \longmapsto HH \end{array}$$

noto che $p_{n+1} = \sigma(p_n)$

devo solo mostrare che

$$\begin{array}{l} p_n \\ \downarrow \\ p_n \tilde{p}_n \searrow \\ \qquad \sigma(p_n)\sigma(\tilde{p}_n) \\ \qquad \quad \overset{?}{\|} \\ \qquad \sigma(p_n)\widetilde{\sigma(p_n)} \end{array}$$

è chiaro che $\sigma(\tilde{p}_n)$ e $\widetilde{\sigma(p_n)}$ coincidono con $\sigma(p_n)$ per tutte le lettere tranne le ultime 2

poi, la penultima è H (è uguale)
l'ultima è diversa da quella di $\sigma(p_n)$

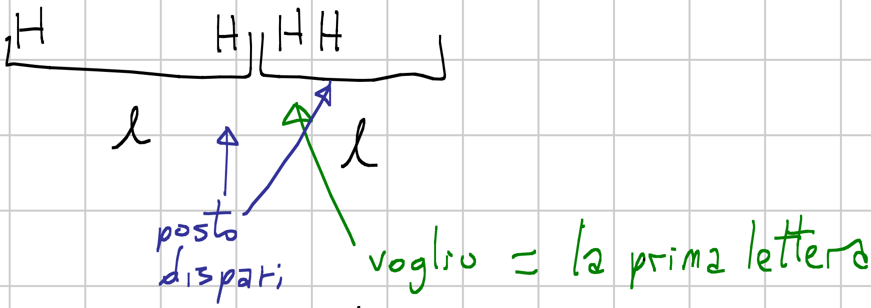
Devo ancora verificare che

- le p_n sono cattive

- # confronti su p_n è minorato da una funzione che cresce più delle rette (qualcosa come $C \cdot n 2^n$)

Sono cattive: se confronto la lunghezza ℓ

per ℓ dispari sbaglio al + al 2° confronto



ma la 2ª lettera è sempre V

se ℓ pari allora torno alla parola P_{n-1}
riunendo le lettere a blocchetti di 2
usando la costruzione di σ

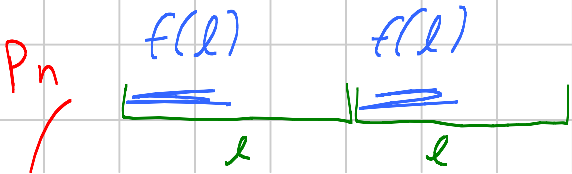
(sto facendo induzione su $\nu_2(\ell)$)

Conto il # di confronti effettuati

Per ogni ℓ, sia $f(\ell)$ il numero di confronti per la lunghezza ℓ.

- $f(\ell) \geq 1 \quad \forall \ell = 1, \dots, 2^{n-1}$
- $f(2\ell) = 2f(\ell) \quad \forall \ell = 1, \dots, 2^{n-2}$

il primo punto è facile
per il secondo
l'ipotesi è che confrontando lungh ℓ



σ

$P_n = P_{n+1}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{2\ell}$

però le prime 4ℓ lettere le trovo uguali in P_n (perché $P_{n+1} = P_n \tilde{P_n}$) quindi sto lavorando in P_n

allora devo fare sicuramente $2\cdot(f(\ell)-1)$ confronti per la lungh 2ℓ
poi vedo $2H$ e continuo per il confronto n° $2f(\ell)$ che sbaglia

Ho finito: $\sum_{\ell=1}^{2^{n-1}} f(\ell)$ voglio una stima

se chiamo $g(\ell)$ t.c. $\begin{cases} g(\ell)=1 & \text{se } \ell \text{ dispari} \\ g(2\ell)=2g(\ell) \end{cases}$

ho mostrato che $f(\ell) \geq g(\ell)$

$$\sum_{\ell=1}^{2^{n-1}} f(\ell) \geq \sum_{\ell=1}^{2^{n-1}} g(\ell) \underset{\text{per casa}}{=} \frac{1}{4} n 2^n$$

$\square$

C7 100 giudici; non ne esistono 3 x, y, z tali che ci sono 3 concorrenti A, B, C per cui

x: A > B > C
y: B > C > A
z: C > A > B

TESI: esiste una classifica globale

"condivisibile"

Definisco un graf "diretto" sull'insieme dei concorrenti. ($G(A,B)$ = insieme dei giudici che preferiscono A a B.)

$$A \longrightarrow B \quad \text{se} \quad \#G(A,B) > 50$$

$$A \longleftrightarrow B \quad \text{se} \quad \#G(A,B) = 50 = \#G(B,A)$$

LEMMA:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \arrow[dl] \\ C \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

non succede!

$$\#G(A,B) > 50$$
$$\#G(B,C) > 50$$
$$\#G(C,A) > 50$$

$\rightarrow \exists\, x \in G(A,B) \cap G(B,C) \rightarrow$ per cui $A > B > C$

e cicliche $\rightarrow$ contraddice l'ipotesi.

LEMMA+:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, leftrightarrow] & B \arrow[d] \\ & C \end{tikzcd}$$

neanche questo può succedere!

LEMMA+ $\Rightarrow$ non esistono cicli diretti

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A_n \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd}$$

prendo il ciclo più piccolo (per assurdo): LEMMA $\rightarrow n > 3$. LEMMA+ mi dice che non ho $A_2 \longleftrightarrow A_n$; LEMMA mi

dice che non ho $A_2 \to A_n$.
Quindi ho $A_n \to A_2$; ma allora
$A_2 \to A_3 \to \dots \to A_n$ è un ciclo più corto: assurdo!

FATTO: se non ci sono cicli diretti allora posso fare una classifica "condivisibile".
Per induzione sul numero di concorrenti. $\square$

C8 Ci sono h camere
e hm parlamentari;

alcuni sono nemici (il grafo ha N archi)

Qual è il minimo N per cui esiste un grafo delle inimicizie che non riesco a far stare in parlamento.

Ci sono alcuni bound facili:

- se c'è una cricca grossa $h+1$ non ci sta
- se c'è un parlamentare antipatico con grado $\geq hm - m + 1$

La risposta è $N = \min\left\{ \frac{h(h+1)}{2}, hm - m + 1 \right\}$

Per mostrare la minimalità voglio riuscire a disporre ogni grafo con $N-1$ archi in parlamento

per la disposizione uso un algoritmo greedy

- ordino i parlamentari per la loro antipati
- cerco di far sedere il primo che mi rimane fuori
  - la prima camera non è piena e non contiene nemici (lo metto lì)

    altrimenti cerco di farlo stare nella seconda

    e così via

- se in questo modo non riesco a metterlo

1 allora c'è almeno una camera piena e senza nemici

sposto uno di questi in un'altra camera 2 (non piena e senza nemici) e ci faccio stare lui

Mi rimangono da mostrare

1 : sia P_k il parlamentare che voglio aggiungere

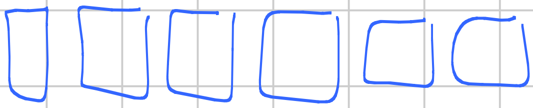
$\Rightarrow \deg(P_k) \geq h$

e $k > h$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \deg(P_i) \geq h(h+1) > 2N \quad \text{assurdo}$$

sto sommando i gradi

sto guardando il # di archi

2 

P camere piene

Q camere senza nemici di P_k

$Q \leq P$; $P \leq h-1$; $(1) \Rightarrow Q \geq 1$

$$\sum_{\substack{P_i \text{ t.c. stanno sulle camere} \\ \text{piene} \neq P_k}} \deg(P_i) \geq P \cdot m \cdot \deg(P_k) + \deg(P_k)$$

$$\sum_{\substack{P_i \text{ che già stanno sulle} \\ \text{camere non piene}}} \deg(P_i) \geq \underbrace{(h-P)}_{\text{le camere}} \cdot \underbrace{1}_{\text{almeno 1 per camera}} \cdot \deg(P_k)$$

$$\deg(P_k) \geq h-Q$$

$$\sum_{P_i \text{ camere non piene}} \deg(P_i) \geq (h-P)(Qm+1)$$

le camere

in ogni camera c'è almeno un nemico per ognuno di quelli già seduti nelle Q e nemico di P_k

Come si imposta il conto:

ho mostrato che $2N \geq (Pm+1)(h-Q) + (h-P)(h-Q)$

e $2N \geq (Pm+1)(h-Q) + (h-P)(Qm+1)$

ma queste contraddicono $N \leq \min\left\{\frac{h(h+1)}{2}, hm - m + 1\right\}$

a meno di $h \leq 2$ o $m = 2$

Il punto chiave è che fissati h, m, P sono lineari in Q e fissati h, m, Q sono lineari in P
(è utile fare il caso $P = Q$)

$\square$