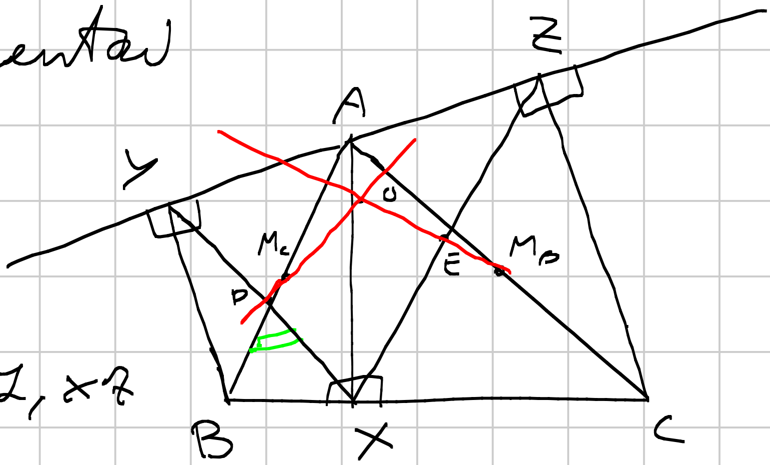
Geometria mattino - PreIMO 2016

Titolo nota 25/05/2016

AXBY ciclici di centro M_B
AXCZ M_C



$\widehat{M_C O M_B} = \pi - \alpha$

D, E p.ti medi XY, XZ

Ciclicità $\Rightarrow$ asse XY passa per M_C

$\widehat{M_C O M_B} = \widehat{BAC} + \widehat{AM_C O} + \widehat{OM_B A}$

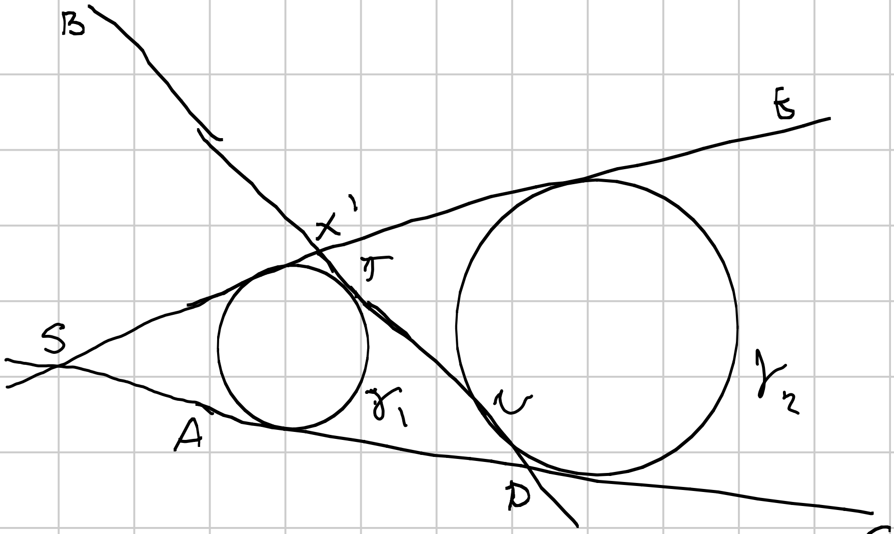
$\widehat{DM_C B} = \frac{\pi}{2} - (\pi - \beta - \widehat{BAY}) = \beta + \widehat{BAY} - \frac{\pi}{2}$

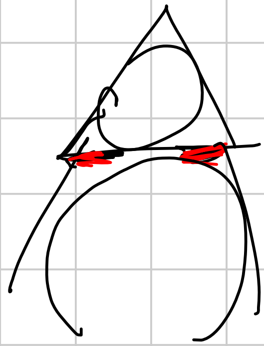
$\widehat{AM_B E} = \gamma + \widehat{CAZ} - \frac{\pi}{2}$

$\widehat{M_C O M_B} = \alpha + \beta + \widehat{BAY} - \frac{\pi}{2} + \gamma + \widehat{CAZ} - \frac{\pi}{2} =$

$= \alpha + \beta + \gamma - \pi + \pi - \alpha = \beta + \gamma$

$= \pi - \alpha$





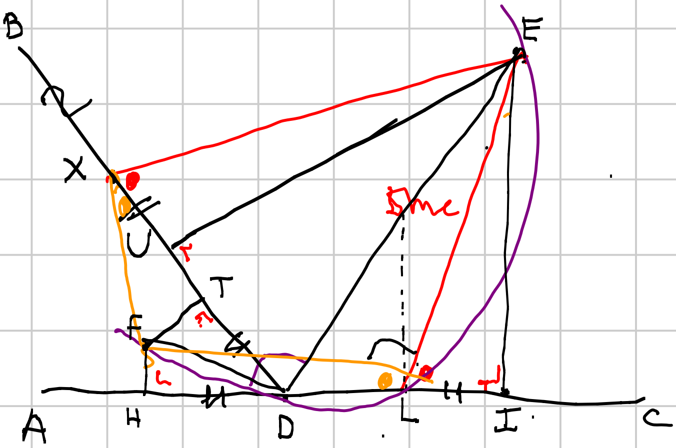
I Idea

$X' = t \cap BD \implies BX' = BP = \frac{AB+BC-AC}{2}$

Oss. $AT = DU \implies$

$\implies DX' = DT + DU = \frac{BD+AD-AB}{2} + \frac{BD+DC-BC}{2}$

Allora $BX' = BD - DX' = BD - \frac{BD+AD-AB}{2} - \frac{BD+DC-BC}{2} = BP$



$HL = AL - AH = \frac{AB+AC-BC}{2} - \frac{AB+AD-BD}{2} = \frac{BD+DC-BC}{2} = DI$

$HL = DI \implies HD = LI$

$HD = DT = XU$

$XU = BD - BX - DU =$
$= BD - \frac{AB+BC-AC}{2} - \frac{BD+DC-BC}{2}$
$= \frac{BD+AD-AB}{2} = DT$

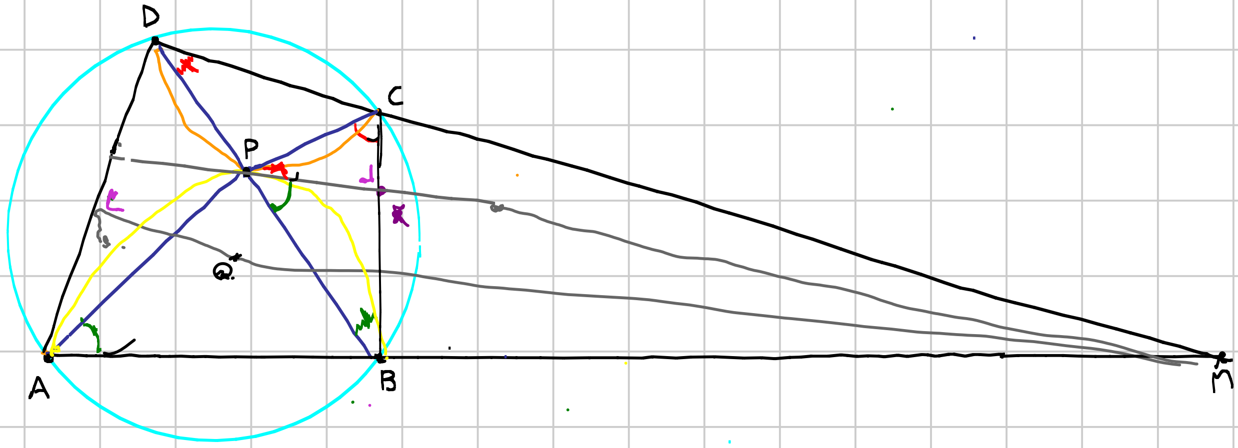
Th $\iff \widehat{FXE} = 90° \iff \widehat{FLE} = 90°$

$FLE = 90° \iff F\hat{H}L \sim L\hat{I}E \iff \frac{FH}{HL} = \frac{LI}{IE} \iff \frac{FT}{DI} = \frac{HD}{IU} \iff \widehat{FDE} = 90°$

$\Updownarrow$

$\widehat{FDT} \sim \widehat{DEU}$

$$\boxed{\widehat{FDE} = \widehat{FLE} = 90°}$$



Γ_{PCD} è tangente a Γ_{PAB}

l tange Γ_{PCD} in P $\widehat{lPC} = P\hat{D}C$. Vogliamo mostrare $\widehat{lBP} = P\hat{A}B$

Vogliamo $C\hat{P}B = P\hat{D}C + P\hat{A}B$

$C\hat{P}B = 180 - C\hat{B}P - B\hat{C}P = (90 - C\hat{B}P) + (90 - B\hat{C}P) = B\hat{A}P + C\hat{D}P$

Analogo per Q.

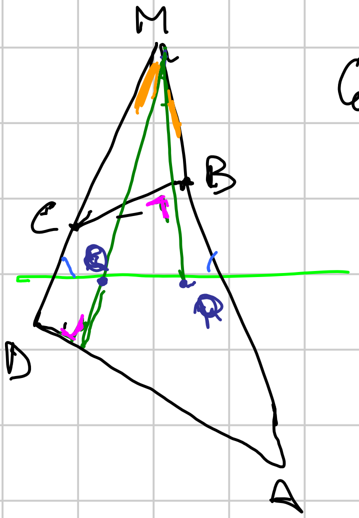
$M \in$ tang(P) (concorrenza di tre assi radicali in M)

$M \in$ tang Q

$MA \cdot MB = MP^2 = MQ^2$ $MP = MQ$

$x\hat{P}C + x\hat{C}P = C\hat{D}P + B\hat{C}P = 90° \Rightarrow$ tang$(P) \perp CB$

Allo stesso modo tang$(Q) \perp AD$



Con simmetria risp bisettrice di $A\hat{M}D$

$BC \longrightarrow$ retta $\parallel AD$ (ABCD ciclico)

$MP \longrightarrow$ retta che passa per M

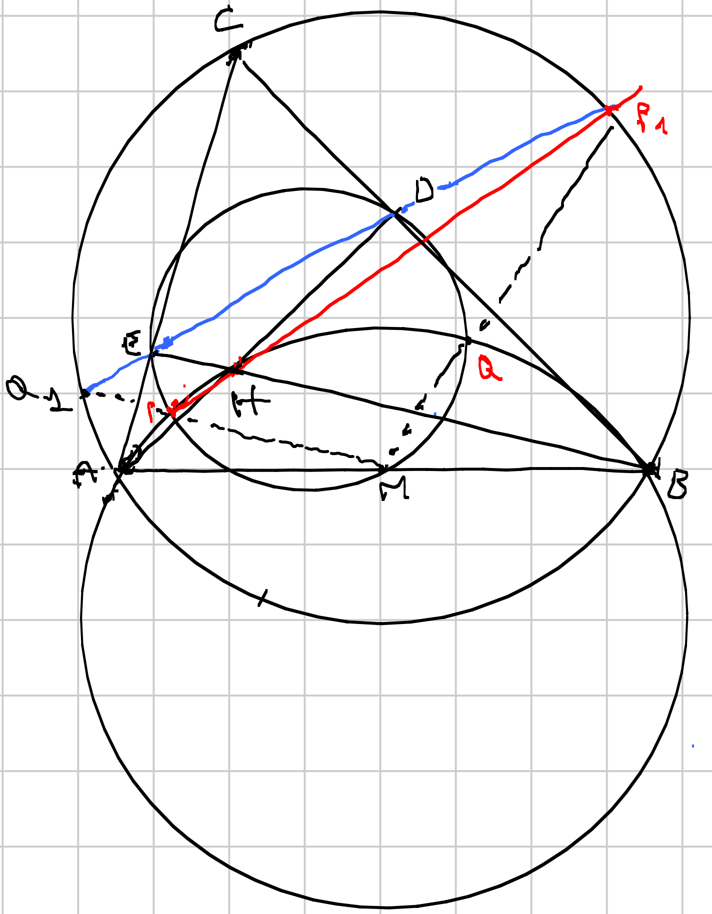
e $\perp AD$

è la retta MQ

$QP \perp$ bisettrice di $A\hat{M}D$

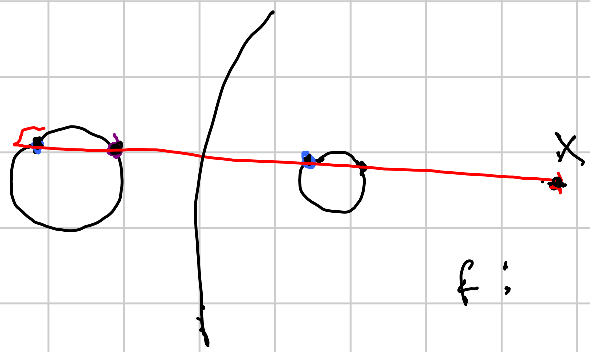
$\Rightarrow$ fa angoli uguali con i lati MD e MA

ES. 4



DIGRESSIONE 1:

•) Fatto noto: i centri di similitudine di (ABC) e (DEM) sono H e G,



f: f(•) = •

è un'inversione centrata in X

•) INVERSIONI:

a) DURA E PURA

raggio a caso $P \to P'$

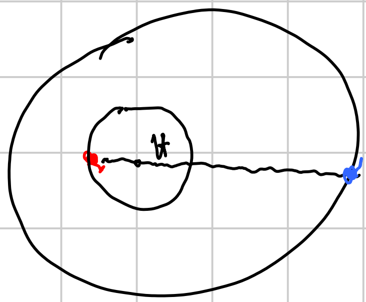
b) FINE (solo se necessario)

raggio non a caso

ORA :

$AH \cdot HD = BH \cdot HE = r^2$

φ = inversione centro H e raggio r + simm. in H



$D \leftrightarrow A$, $E \leftrightarrow B$

$(ABC) \leftrightarrow (DEM)$

Chiamiamo P_1 l'immagine di P

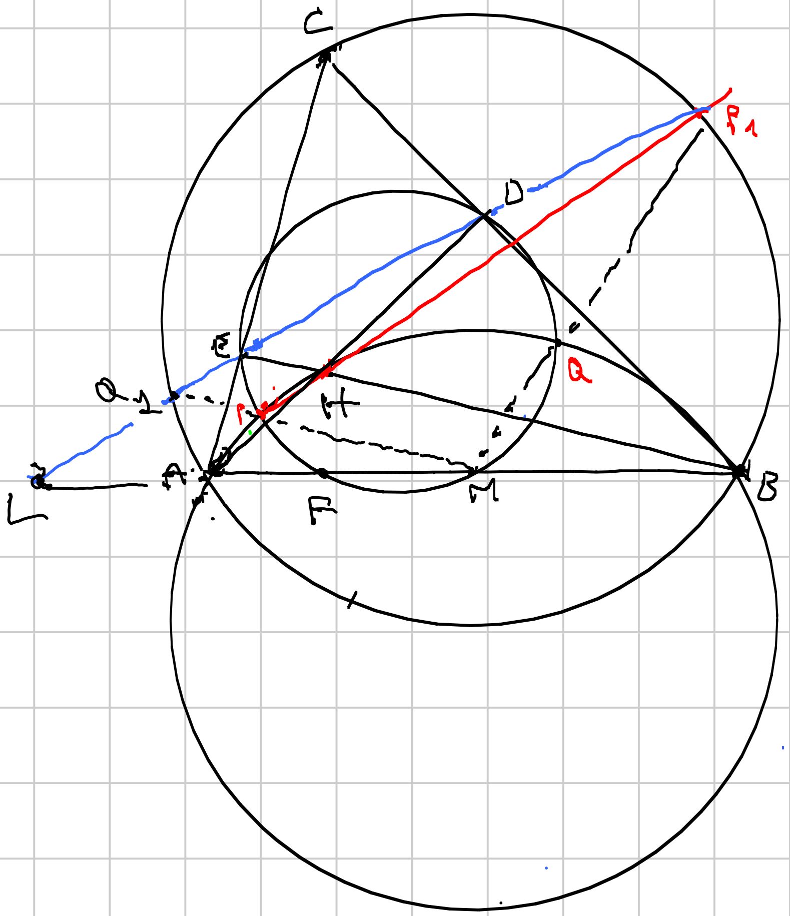
$P \in (DEM) \Rightarrow P_1 \in (ABC)$

$\varphi(P) = \varphi((DEM) \cap (ABH)) \subseteq \varphi((DEM)) \cap \varphi((ABH))$

$= (ABC) \cap DE$

$\Rightarrow P_1 \in DE$

$\Rightarrow (ABC)$, DE, PH concorrono in P_1



$CF \perp AB$

oss:

$PH \cdot HP_1 = QH \cdot HQ_1$

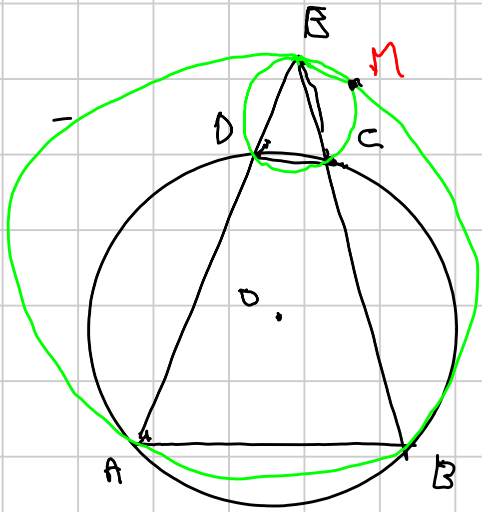
$\Rightarrow PP_1QQ_1$ ciclico

Sia $L = DE \cap AB$

$LQ_1 \cdot LP_1 =$
$LA \cdot LB =$
$LE \cdot LD =$
$LF \cdot LM$

$\Rightarrow P_1Q_1MF$ ciclico (*)

DIGRESSIONE 2



M pt. di Miquel di ABCD

Fatto noto:

$M = (AOC) \cap (BOD)$

(Dim: angoli)

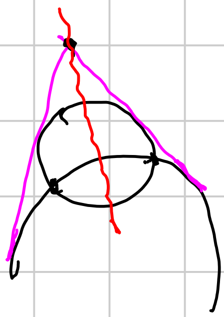
ORA: applico il fatto noto ad (P_1Q_1PQ)

Qual è il suo centro?

è C, che sta sull'asse di P_1Q_1

perché $CO \perp DE$

ma C sta sull' asse di PQ
perché C è il centro dell' omotetia di fattore 2
che manda (DEM) in (ABH)



Il pt. di Miquel di $P_1 Q_1 P Q$ è
(per il fatto noto)

$(P_1 PC) \cap (Q_1 QC) = F$

Ma CFP_1P è ciclico perché
$CH \cdot HF = PH \cdot HP_1 = r^2$

Ma allora $\underbrace{Q_1 P}_{} \cap P_1 Q = (PQF) \cap (P_1 Q_1 F) = M$

$PQFM$ è Feuerbach

$P_1 Q_1 FM$ è ciclico per (*)