Preimo 2016 — Teoria dei Numeri (Mattino)

Titolo nota 23/05/2016

N2 SIANO l, m, n INTERI POSITIVI E p UN NUMERO PRIMO

TALI CHE:

$$p^{2l-1} m(mn+1)^2 + m^2$$

SIA UN QUADRATO PERFETTO.

DIMOSTRARE CHE m È UN QUADRATO PERFETTO.

MODO PER AVERE m QUADRATO PERFETTO:

$v_p(m)$ È PARI PER OGNI p PRIMO.

($v_p(m)$ = "ESPONENTE DI p NELLA FATTORIZZAZIONE DI m")

$$p^{2l-1} m(mn+1)^2 + m^2 = \square$$

$v_q(m)$ CON p PRIMO

$$m\left(p^{2l-1}(mn+1)^2 + m\right) = \square$$

$$v_q\left(m\left(p^{2l-1}(mn+1)^2+m\right)\right) = \text{PARI}$$

$$v_q(m) + v_q\Big(\underbrace{p^{2l-1}(mn+1)^2+m}_{\alpha}\Big)$$

- $v_q(m) = 0$

$$\Downarrow$$

$v_q(m)$ È PARI

- $v_q(m) > 0$. $q \mid m$

SPERANZA: q NON DIVIDE α

$\Longrightarrow v_q(\alpha) = 0$ (PARI) $\Rightarrow v_q(m)$ PARI

SE $q \mid m$ È

$$q \mid p^{2l-1}(mn+1)^2 + m$$

$$\Downarrow$$

$$q \mid p^{2l-1}(mn+1)^2$$

ORA: $(q, mn+1) = 1$

PERCHÉ $q \mid m \Rightarrow q \nmid mn+1$

ALLORA POSSIAMO TOGLIERE $(mn+1)^2$

DALLA DIVISIBILITÀ E AVREMO:

$q \mid p^{2l-1}$

PERCIÒ SE $q \neq p \Longrightarrow$

$v_q(m)$ È PARI.

m SARÀ DELLA FORMA:

- K^2 (ALLORA SIAMO A POSTO) $\Leftarrow$ p CON ESPONENTE PARI

- pK^2 $\Leftarrow$ p CON ESPONENTE DISPARI.

$m = pK^2$

$$p^{2l} \cdot k^2 (pk^2 n + 1)^2 + p^2 k^4 = \square$$

Possiamo raccogliere $p^2 k^2$:

$$p^{2l-2} (pk^2 n + 1)^2 + k^2 = \square \qquad (*)$$

Cosa utile: schiacciarlo tra due quadrati consecutivi

$$J^2 < \underbrace{p^{2l-2} (pk^2 n + 1)^2}_{\text{Grande}} + \underbrace{k^2}_{\text{piccolo}} < (J+1)^2$$

k^4

$$J \to p^{l-1} (pk^2 n + 1)$$

$$p^{2l-2}(pk^2n+1)^2 \overset{?}{<} p^{2l-2}(pk^2n+1)^2 + \underline{\underline{k^2}}$$

$$\overset{?}{<} \left(p^{l-1}(pk^2n+1)+1\right)^2$$

$<$ OVVIA

$$\cancel{p^{2l-2}(pk^2n+1)^2} + k^2 \overset{?}{<} \cancel{p^{2l-2}(pk^2n+1)^2} +$$

$$+2p^{l-1}(pk^2n+1)+1$$

$$k^2 \overset{?}{<} 2p^{l-1}(pk^2n+1)+1$$

$$l \geq 1 \to \quad RHS > 2pk^2n > k^2$$

SOL. ALTERNATIVA: IN $(*)$ USARE LA FORMA STANDARD DELLE TERNE PITAGORICHE.

N3

$$\left(b^2+11(a-b)\right)^2=a^3b$$

oss: $a=b$ é sol $\forall a\in\mathbb{Z}$

$$b^4+2\cdot 11(a-b)b^2+11^2(a-b)^2=a^3b$$

$$b(b-a)(a^2+ab+b^2)+2\cdot 11(a-b)b^2+11^2(a-b)^2=0$$

$$b(a^2+ab+b^2)-2\cdot 11 b^2-11^2(a-b)=0$$

é una quadratica in a

$\Downarrow$

$\Delta=\square$

$11 \mid b(a^2+ab+b^2) \longrightarrow \boxed{11 \mid b}$

$11 \mid a^2+ab+b^2 \Longleftrightarrow 11\mid a,\ 11\mid b$

$\downarrow$

$a^3\equiv b^3\ (11)$ se $b\not\equiv 0$ $\left(\frac{a}{b}\right)^3\equiv 1\ (11)$

$\operatorname{ord}\left(\frac{a}{b}\right)=1,3$ $\quad\mid\ \varphi(11)=10$

$a\equiv b\ (11)$

$3a^2\equiv 0\ (11) \longrightarrow a\equiv b\equiv 0\ (11)$

$b = 11K$

$$\cancel{11}K\,(a^2 + 11aK + 11^2K^2) - 2\cdot 11^{\cancel{3}\,2}K^2 - 11^2(a - 11K) = 0$$

$$a^2K + 11a(K^2 - 1) + 11^2K(K^2 - 2K + 1) = 0$$

$$\Delta = 11^2(K^2-1)^2 - 4\cdot K\cdot 11^2K(K-1)^2$$

$$\overset{\shortparallel}{(K-1)^2(K+1)^2} \longrightarrow K = 1 \text{ é sol}$$

$\downarrow$

$(0, 11)$

$$(K+1)^2 - 4K^2 = B$$

$$-3K^2 + 2K + 1 = (3K+1)(1-K)$$

é > 0 solo in $-\frac{1}{3} \leq K \leq 1$

$\Longrightarrow$ TUTTE E SOLE LE SOL SONO

(a, a) $a \in \mathbb{Z}$ e $(0, 11)$

SOL. ALTERNATIVE:

$p \neq 11 \rightarrow v_p(a) = v_p(b)$

oppure considerare $\gcd(a, b)$

$\boxed{N1}$ $x^3 - 2015x = q$ $x, q \in \mathbb{Q}$

$\exists q$ tale che ci siano ZERO SOLUZIONI.

Esempio: $q = 1$

supponiamo $x = \frac{a}{b}$ $(a,b) = 1$

Sostituiamo e moltiplichiamo per b^3

$$\underbrace{a^3 - 2015ab^2}_{\text{MULTIPLO di } a} - b^3 = 0$$

$a \mid b^3$ $b \mid a^3$

$a = \pm 1$ $b = \pm 1$ NON FUNZIONA

Non ci possono essere due sol distinte.

$x = \frac{a}{c}$ $y = \frac{b}{c}$ $(a, b, c) = 1$

$c \neq 0$.

Sostituiamo x e y nell'equazione e facciamo la differenza

$$x^3 - y^3 - 2015(x-y) = 0$$

divido per $x - y$:

$$x^2 + xy + y^2 - 2015 = 0$$

$$a^2 + ab + b^2 - 2015c^2 = 0$$

MOD 5 funziona

TRACCIA DI SOL. MOD. 3

MOLTIPLICO PER 4

$$\underbrace{4a^2+4ab+b^2}_{(2a+b)^2}+3b^2-8060c^2=0$$

$$c^2-8062c^2$$

$$3 \mid \alpha^2+\beta^2 \Rightarrow 3\mid\alpha \quad 3\mid\beta.$$

Sostituendo ottengo a, b, c div. per 3.

$$f(x) = d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \ldots + d_0$$

$$= \frac{c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0}{c} \qquad c, c_i \in \mathbb{Z}$$

$$x=\frac{a}{b} \longrightarrow \frac{c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1}b + \ldots + b^n}{c\, b^n}$$

Non ottengo mai $\frac{1}{q}$ per q primo "ben scelto".

Assurdo: $\frac{1}{q} = f(x)$

$q \cdot$ Numeratore $= c\, b^n$

$q > c \Rightarrow q \mid b$

Denominatore è divisibile per q^2 $(n \geq 2)$

RHS 1_r ~~⊗~~

LHS $= q \cdot$ Num

Se $q \nmid c_n$ Num non è div. per q.

IMPOSSIBILE

$\boxed{N4}$ Proprietà: (i) $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$

$a_n > 0$ (ii) $a_{2n} = 2a_n$ $\forall n$.

Tesi: p primo $> a_1 \Rightarrow \exists n$ t.c. $p \mid a_n$.

$s_n = a_{n+1} - a_n > 0$ $\exists s$ minimo

$s = a_{m+1} - a_m$.

Considero k tale che $2^k > p$

$$\boxed{a_{2^k(m+1)} - a_{2^k m}} = 2\left[a_{2^{k-1}(m+1)} - a_{2^{k-1}m}\right]$$

$$= 4\left[a_{2^{k-2}(m+1)} - a_{2^{k-2}m}\right] = \dots =$$

$$= 2^k(a_{m+1} - a_m) = 2^k s.$$

si può scrivere come una somma telescopica

$$a_k - a_h = (a_k - a_{k-1}) + (a_{k-1} - a_{k-2}) + \dots + (a_{h+1} - a_h)$$

Il n° di addendi $= 2^k > p$.

$\to$ gli addendi sono tutti uguali a s.

(lo è una prog. aritmetica)

Quindi per $2^k m \leq n < 2^k (m+1)$

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = s}$$

Considero i primi p termini

$$n = 2^k m + i \qquad 0 \leq i < p \qquad (2^k > p)$$

Claim: sono tutti distinti modulo p.

($\to$ tesi)

Se $a_{2^k m + i} \equiv a_{2^k m + j} \pmod p$

$0 \leq i < j < p$

Per differenza $s(i-j) \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow s \equiv 0 \pmod p$

$p > a_1 = a_2 - a_1 \geq s$ ASSURDO.

Tra i vari $a_{2^k m + i}$ c'è un multiplo di p.

$\forall n$, n è stretto fra due potenze di 2

$$2^{k_n} \leq n < 2^{k_n + 1}$$

- $k_n \leq k_{n+1}$
- $k_{2n} = k_n + 1$

$$\boxed{a_n = np + 2^{k_n}}$$

$a_n < a_{n+1}$

$a_{2n} = 2np + 2^{k_n + 1} = 2np + 2 \cdot 2^{k_n}$

$= 2(a_n)$.