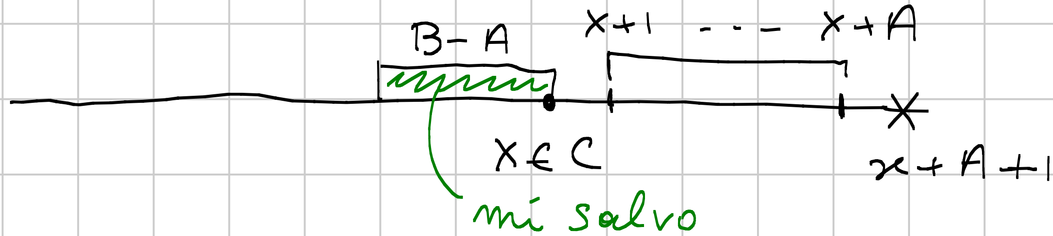
# Pre IMO 2017 - COMBINATORIA Mattina

Note Title 25/05/2017

## $\boxed{C1}$

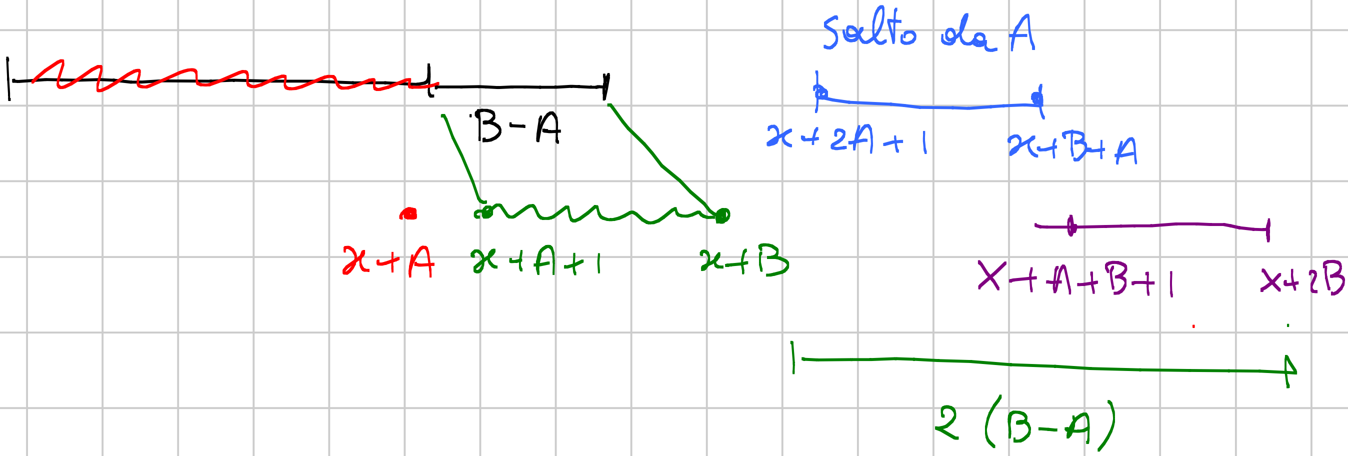


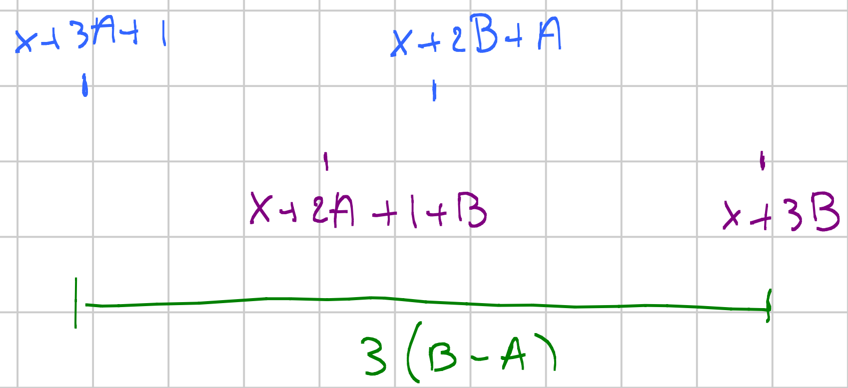

$x + B \leq y + 1$

↖ è almeno $x + A + F$

Condizione: $F > B - A$

Abbiamo appena fatto un salto:




Intervalli raggiungibili: $[x + KA + 1,\ x + KB]$

Gap fra due intervalli: $(K+1)A - KB + 1$

Se questo è $\leq 1$, l'intervallo $k$-esimo e il $(k+1)$-esimo si attaccano

Il minimo $k$ per cui succede è

$$(k+1)A \leq kB$$

$$A \leq k(B-A)$$

$$k \geq \left\lceil \frac{A}{B-A} \right\rceil$$

Mi salvo al prossimo salto se

$$\underbrace{x + \left\lceil \frac{A}{B-A} \right\rceil A + 1}_{\text{primo punto a dx del quale posso visitare tutto}} \leq \underbrace{y - (B-A) + 1}_{\text{inizio del prossimo intervallo di salvezza}}$$

vorrei

$$y - x \geq \left\lceil \frac{A}{B-A} \right\rceil A + (B-A)$$

$$y - x \geq A + F \geq \left\lceil \frac{A}{B-A} \right\rceil A + (B-A)$$

impongo questa.

Questo dimostra che $F = \left\lceil \frac{A}{B-A} \right\rceil A + (B-2A)$ basta. Bisogna mostrare che $F-1$ non funziona

* prendo tutti i buchi di lunghezza $F-1$

* $mA + nB \overset{?}{=} m'A + n'B$

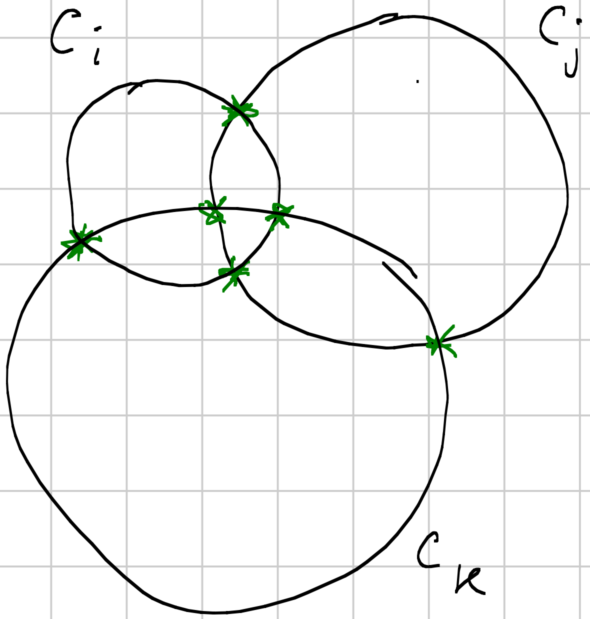
- caso $(A, B) = 1$
- $(m - m')A = (n' - n)B$

$$\Rightarrow \quad n' - n \equiv 0 \ (A)$$

$$|n' - n| \geq A$$

* Ad ogni buco si perde almeno una casella.

$\boxed{C2}$




Invece di scegliere una moneta scelgo

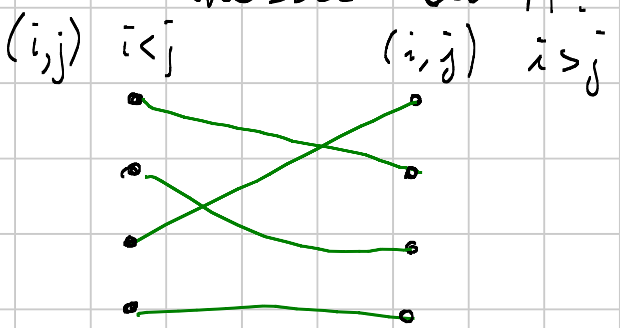
- una coppia di indici $\subseteq \{1, \dots, n\}$
- un ordinamento di questa coppia,

ovvero una coppia ordinata $(i,j)$ in $\{1, \dots, n\}$.

Se uno dei due gioca $(i,j)$, le mosse valide sono $(k,l)$ non ancora giocate e tali che $\{k,l\} \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{i,j\}$

$n=3$ è immediato (e vince A).

$\boxed{n \geq 4}$ Hope: magari vince B stabilendo cosa giocare semplicemente in funzione dell'ultima mossa di A.



Vorremmo: una bigezione tra le coppie ordinate e loro stesse tale che $(i,j) \longleftrightarrow (k,\ell)$

$\Rightarrow \{i,j\} \cap \{k,\ell\} = \emptyset$

$\boxed{\text{LEMMA DEI MATRIMONI}}$ $B = \{r_1, \dots, r_n\}$

e $G = \{g_1, \dots, g_n\}$

Ogni $r_i$ è associato ad un sottoinsieme delle $G$ "che gli piacciono"

Vogliamo associare ad ogni $r_i$ una $g_j$ che gli piace, in modo che ragazzi diversi sposino ragazze diverse.

CONDIZIONE: comunque scelti $k$ degli $r_i$ esistono ALMENO $k$ $g_j$ che piacciono ad ALMENO uno di loro

---

Nel nostro caso, $B = \{(i,j) \quad i<j\}$

$G = \{(i,j) \quad i>j\}$

Siano $r_1, \dots, r_k \in B$.

$$\begin{matrix} r_1, & \dots, & r_k \\ \parallel & & \parallel \\ (i_1, j_1), & \dots, & (i_k, j_k) \end{matrix}$$

Caso 1: non ci sono 2 elementi $i, j$ tali che ogni coppia contiene $i$ o contiene $j$.

Ogni coppia in $G$ va bene, perché non è possibile che abbia un elemento in comune con ognuno dei ragazzi.

Caso 2: tutti gli $r$ sono del tipo $(1, j_k)$

Le ragazze che vanno bene sono $\binom{n-1}{2}$

Vorremmo $\binom{n-1}{2} \geq \underbrace{\# \text{ ragazzi}}_{\text{al più } n-1}$

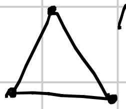
Basta $\frac{(n-1)(n-2)}{2} \geq (n-1)$ OK per $n \geq 4$

Caso 3: i ragazzi sono del tipo $(1, j_k)$ e $(2, j'_k)$. Quindi l'unica cosa che può succedere è che siano $(1,2)$; $(2,3)$; $(3,1)$.

Chiaramente almeno 3 ragazze vanno bene.

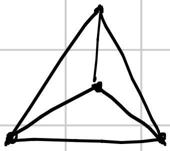
$((3,4); (4,1); (2,4))$

$\boxed{C3}$

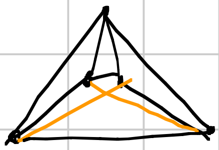


$n=3$

max $\#NT = 3$

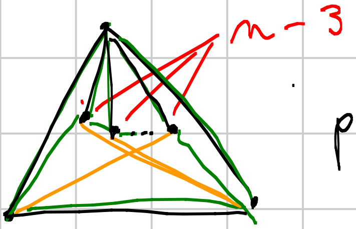


$n=4$ max $=6$



$n=5$ max $=8$

... in generale




per $n$ max $= 2n-2$ ?!

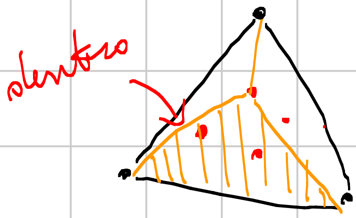
HOPE

Quindi so $\max(n) \geq 2n-2$.

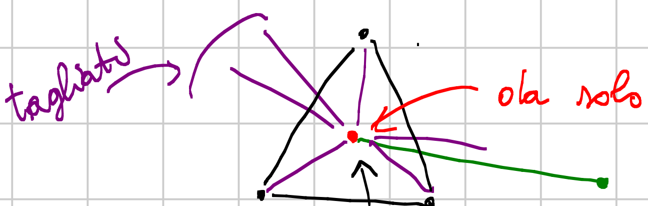
Voglio dimostrarlo. Prendo una configurazione da $\boxed{n \geq 5}$. (mi serve il passo base per $n=3,4$)

→ se la configurazione è un poligono convesso allora ha $\#NT \leq n$.

ALTRIMENTI ho




ma anche (induttivamente)




Voglio togliere LUI.

→ se lui crea al più 2 non tagliati (al più 2 dei sono NT) cancello e ottengo che

$$\#NT \text{ nella conf. da } n \leq 2 + \max(n-1)$$
$$= 2 + 2(n-2)$$
$$= 2n-2$$

→ se tutti i / interni al triangolo sono NT. Togliendo il pto ho

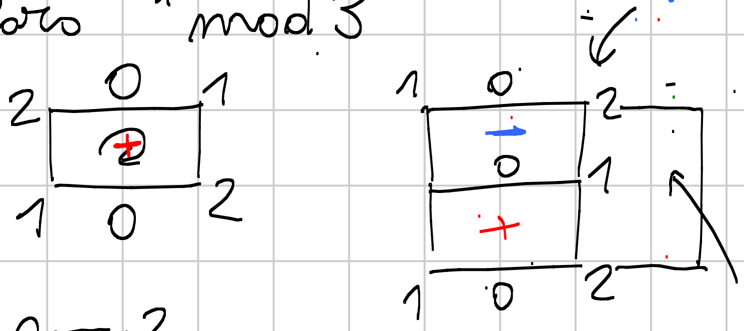
$$\#NT \text{ nella conf} \leq 3 + \max(n-1) - 1$$

creato dal pto extra fuori nel caso in questione

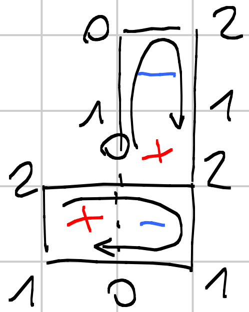
→ ho dimostrato $\max(n) \leq 2n-2$. $\square$

$\boxed{C4}$ Coloro "mod 3"

wow!

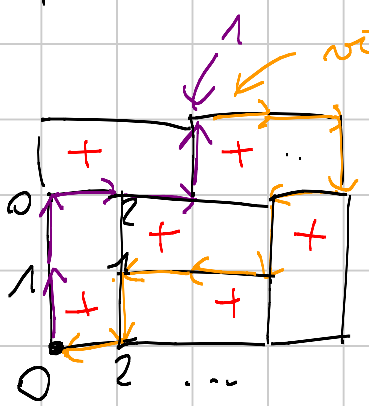


questa non può essere colorata "bene" :(



* la scacchiera si colora in + e − ("a scacchiera") e si assegnano così i "poli" alle tessere-calamita.

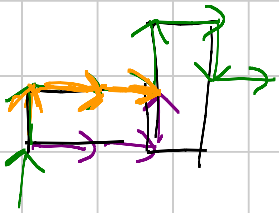
viene 1?



riempio secondo le calamite.

HOPE: lungo un percorso chiuso la somma dei "segni" che incontro è 0.

Facile per induzione sul # tessere dentro il percorso (ne tolgo una al bordo)



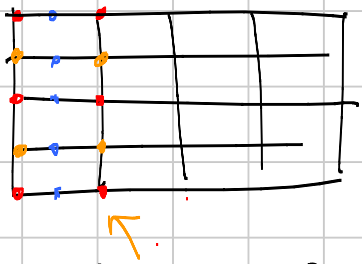
$\to\to\to - \to\to\to = 0$

quindi posso sostituire $\longrightarrow$ con $\to$

e togliere una tessera.

IDEA ALTERNATIVA:


* ogni tassellazione si raggiunge da



tramite una sequenza di "flip".

* coloro "bene" la tassellazione "facile"
* do una "ricetta" per aggiustare il colore quando flippo senza modificare i colori sul bordo (e mantenendo lo stesso tipo di colorazione).