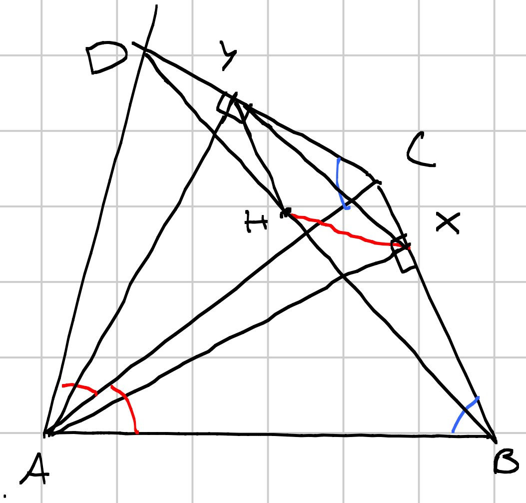
PreIMO17 – Geometria – Mattina

Note Title 22/05/2017



Hp: $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$

$\widehat{CBA} = \widehat{DCA}$

$\widehat{ABC} \sim \widehat{ACD}$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{CX}{XB} = \dfrac{DY}{YC}}$

$AX \perp BC$

r perp per y ad AX $\quad r \parallel BC$

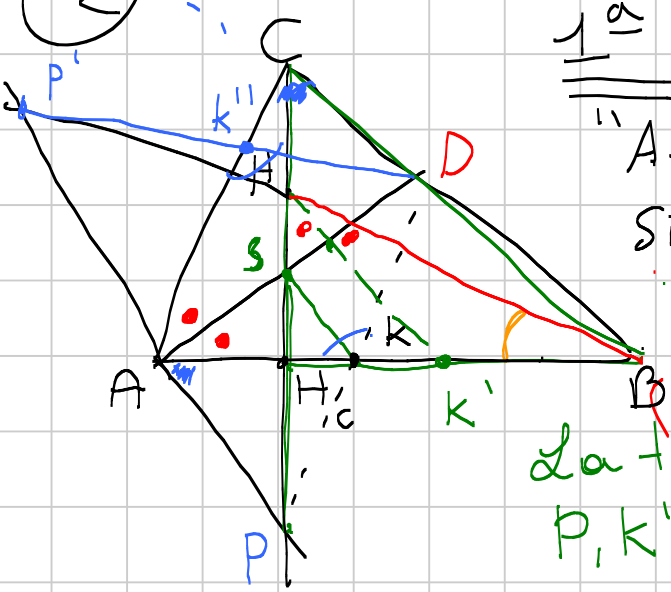
$H = BD \cap r$: Talete con r e BC

$\dfrac{DH}{HB} = \dfrac{DY}{YC} = \dfrac{CX}{XB} \Rightarrow HX \parallel DC \Rightarrow HX \perp AY$

$\Rightarrow$ H è ortocentro di AXY

---

(2)



Th $HK \perp AD$

1^a sol.

"Al contrario"

Sia K' l'intersezione della perpendicolare ad AD per H con AB

La tesi è vera sse P, K', D allineati.

Per dimostrare una cosa del genere...
Menelao su CH_cB
Scriviamo i rapporti

$$\frac{CP}{PH_c} = ?$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{CP}{\sin(\alpha+\gamma)} &\underset{\text{seni}}{\overset{ACP}{=}} \frac{AP}{\cos\alpha} \\ \frac{PH_c}{\sin\gamma} &\underset{\text{seni}}{\overset{APH_c}{=}} AP \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{CP}{PH_c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma\cos\alpha}$$

$$\frac{BD}{DC} \overset{\text{th bisettrice}}{=} \frac{AB}{AC} \underset{\text{seni}}{=} \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

$$\frac{H_cK'}{K'B} \underset{\text{bisettrice}}{=} \frac{HH_c}{HB} = \cos\alpha$$

Osservo $H_cHK' = \cdot = \frac{\alpha}{2}$. Poiché $H_c\hat{H}B = \alpha$
allora $K'HB = \cdot = \frac{\alpha}{2}$

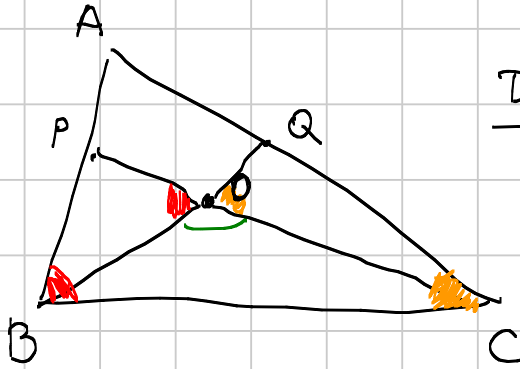
Infine $\frac{CP}{PH_c} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{H_cK'}{K'B} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \cdot \cos\alpha = 1$ ☒

<u>Idea 2</u> $HK \perp AD \iff H$ ortocentro di $AS\cancel{K}$ $\iff$
$\iff SK \parallel BC \iff \frac{PK}{PD} = \frac{PS}{PC}$ ... ☒

<u>Idea 3</u> Simmetrizzare la configurazione!
Sia P' intersezione di BH con AP
Sia $K'' := P'D \cap AC$.
Per Pappo $K''HK$ allineati
Voglio che $K''K \perp AD$ e per farlo
basta che $A\hat{K''}D = A\hat{K}D$ ← Angoli + potenze ☒

Problema 3

Th: Simmetrica di BC wrt PQ tange $\odot APQ$



Dim.

$APOQ$ è ciclico? sì.

$$\left.\begin{aligned} B\hat{O}C &= 2\alpha \\ P\hat{O}B &= \beta \\ Q\hat{O}C &= \gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow P\hat{O}Q = \pi - \alpha$$

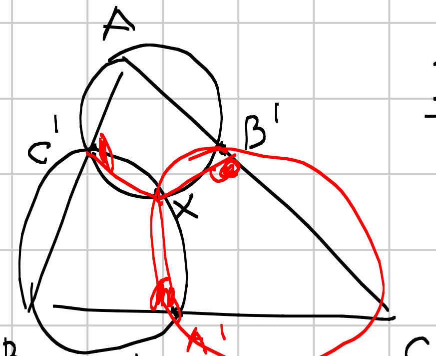
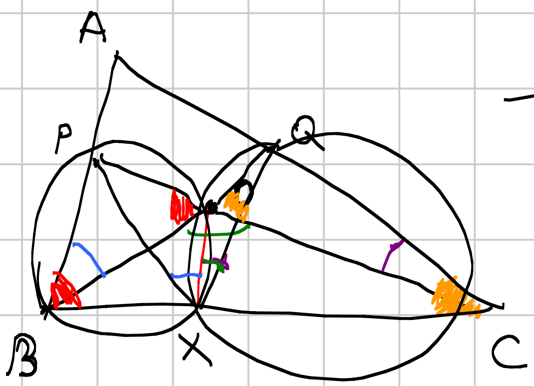


Fig. 1

Idea: Completare il disegno di Miquel

Se ho Fig. 1, allora $\odot BC'X$ e $\odot B'CX$ si intersecano su BC.

Dim. sul disegno costruendo $A' = (\odot BC'X \cap BC) \setminus \{B\}$



Idea 2 Faccio una simmetria rispetto a PQ.

Domanda: Dove va $\odot APQ$?

Risposta: Va in $\odot PXQ$

Perché?: Questa cosa è vera se e solo se $P\hat{X}Q = P\hat{A}Q$.

$$P\hat{X}Q = P\hat{X}O + O\hat{X}Q = P\hat{B}O + O\hat{C}Q = \frac{\pi}{2} - \gamma + \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$$

Fine **Th** $\Leftrightarrow$ BX tange $\odot PXQ$ $\Leftrightarrow$

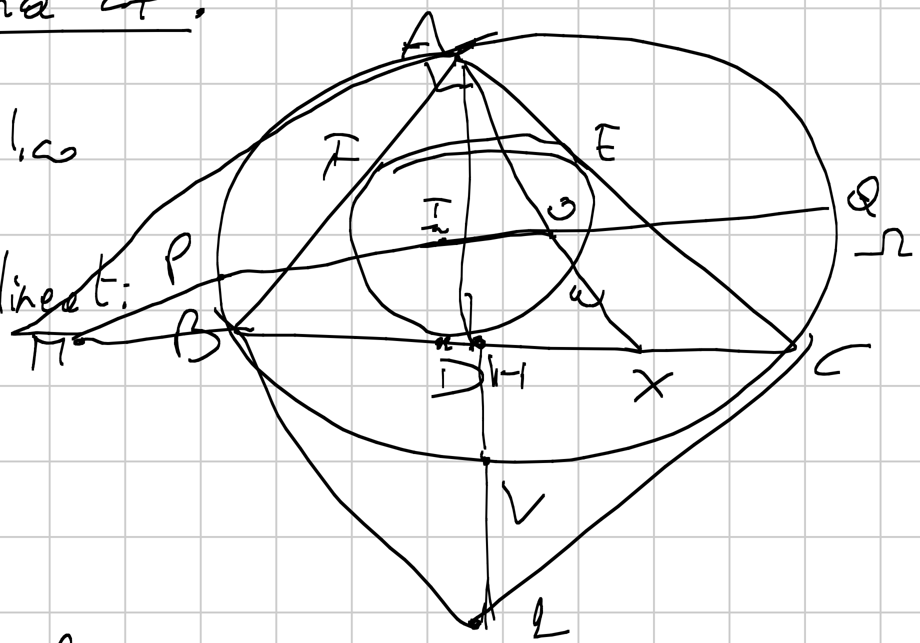
$$\Leftrightarrow B\hat{X}P = X\hat{Q}P$$

Calcoliamoli: $B\hat{X}P = B\hat{O}P = \beta$

$$X\hat{Q}P = X\hat{Q}O + O\hat{Q}P = X\hat{C}O + O\hat{A}P = \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \gamma = \beta. \blacksquare$$

Problema 4:

$PQHX$ ciclico
$\Updownarrow$?
A, D, L allineati



$M = PQ \cap BC$

$MP \cdot MQ = MB \cdot MC$ perché $BCQP$ ciclico

$MP \cdot MQ = MX \cdot MH \Leftrightarrow HXQP$ ciclico

$HXQP$ ciclico $\Leftrightarrow MB \cdot MC = MX \cdot MH$

$\odot ABC$ e $\odot AXH \Rightarrow M \in$ asse radicale

Se M e N soddisfano, allora $M, N, A \in$ asse radicale

$\Rightarrow$ allineati, assurdo!

Sia $K = AA \cap BC$

vogliamo dimostrare che $KB \cdot KC = KX \cdot KH$

$\Leftrightarrow KX \cdot KH = KA^2 (= KB \cdot KC)$

$\Leftrightarrow AK$ tange $\odot AXH$

$K\hat{A}X = \pi/2$ e $A\hat{H}X = \pi/2$ perché AH altezza

Dunque segue la tangenza.

Tesi A, D, L allineati $\Leftrightarrow K, I, O$ allineati

Dim 1

$K \overset{?}{=} Pol_\Omega(AL) \Leftrightarrow AL = Pol_\Omega(K)$

$A \in Pol_\Omega(K)$ in quanto AK tange Ω

$L \in Pol_\Omega(K) \Leftrightarrow K \in Pol_\Omega(L) = BC$ vero

Abbiamo dimostrato che $K = Pol_\Omega(AL)$
$\Rightarrow KO \perp AL$

($\Rightarrow$) Sia V $ADL \cap \Omega$
$ABVC$ armonico poiché AL simmediana
$(B, C, A, V) = -1$

<u>Def</u>: $(A, B, C, D) = \dfrac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}}$

Proiettando da A lungo BC si ottiene che
$(B, C, K, D) = -1$

$K' := EF \cap BC$ dove E, F punti di tangenza di ω con AC e AB risp..
$(B, C, K', D) = -1$ (lasciata al lettore)

Data l'iniettiva della funzione birapporto fissati tre punti si ha che $K \equiv K'$.
Allora $K \in EF$.
$K \in Pol_\omega(AD) \iff A, D \in Pol_\omega(K)$
$D \in Pol_\omega(K)$ banalmente poiché $KD \equiv BC$ tange ω
$A \in Pol_\omega(K) \iff K \in Pol_\omega(A) = EF$ poiché AE e AF tangono ω.
$AD = Pol_\omega(K) \Rightarrow KI \perp AD$
avevamo che $KO \perp AL$ e $AD \equiv AL$.
Segue che K, O, I allineati.

($\Leftarrow$) $KO \perp AL \Rightarrow KI \perp AL$.
$V = AL \cap \Omega$

$(B,C,A,V)=-1 \overset{\text{da } A}{\Rightarrow} (AB,AC,AK,AL)=-1$

Supponiamo per assurdo che K non sia il polo di AL rispetto ad ω. Sia $K'=Pol_\omega(AL)$.

$K'I \perp AL$, I centro di ω.

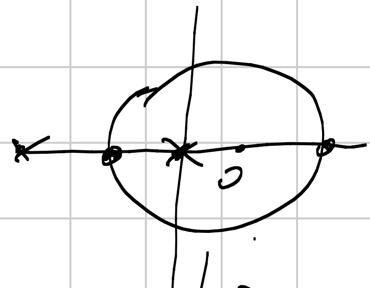
$\Rightarrow K' \in KI$.

Ora verifichiamo che $K' \in EF$.

$EF = Pol_\omega(A)$. Però $A \in Pol_\omega(K') \Rightarrow K' \in Pol_\omega(A)$

$\Rightarrow K' \in EF$

Allora $(AF, AE, AK', AL) = -1$



Sempre per l'iniettività della funzione birapporto fissati 3 argomenti, si ha $AK' \equiv AK \Rightarrow K' \equiv K$

$\Rightarrow K = Pol_\omega(AL) \iff AL = Pol_\omega(K)$

KD tange ω $D \in Pol_\omega(K)$

$D \in AL \Rightarrow A, D, L$ allineati. $\blacksquare$

<u>Dim 2:</u>

Coordinate baricentriche con riferimento ABC

$BC=a \quad AC=b \quad AB=c \qquad \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = S_A$ e cyc

$D=(0, a+b-c, a+c-b)$

$a^2z+c^2x=0 \quad$ e $\quad a^2y+b^2x=0$

$\Rightarrow L=(-a^2, b^2, c^2)$

$AK: b^2z+c^2y=0 \qquad BC: x=0$

$K := AK \cap BC \qquad K=(0, b^2, -c^2)$

$I=(a,b,c) \qquad O=(a^2S_A, b^2S_B, c^2S_C)$

A, D, C allineati $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+b-c & a+c-b \\ -a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow c^2(a+b-c) = b^2(a+c-b)$

$\Leftrightarrow (b-c)(b^2+c^2-ac-ab) = 0 \overset{b\neq c}{\Leftrightarrow} b^2+c^2 = ab+ac$

O, I, K allineati $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 0 & b^2 & -c^2 \\ a & b & c \\ a^2S_A & b^2S_B & c^2S_C \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow a^2b^2cS_A - ab^2c^2S_B - ab^2c^2S_C + a^2bc^2S_A = 0$

$\Leftrightarrow abS_A - bcS_B - bcS_C + acS_A = 0$

$\overset{S_B+S_C=a^2}{\Leftrightarrow} bS_A + cS_A = abc$

$\Leftrightarrow (b+c)(b^2+c^2-a^2) = 2abc$

$\Leftrightarrow b^3+c^3+b^2c+bc^2-a^2b-a^2c-2abc = 0$

$\Leftrightarrow (b^2+c^2-ab-ac)(a+b+c) = 0$

$\overset{a+b+c>0}{\Leftrightarrow} b^2+c^2 = ab+ac \Leftrightarrow A, D, C$ allineati $\blacksquare$