PREIMO 2017 – TDN MATTINO

Note Title 23/05/2017

$\boxed{N1}$

$$n = 2^k!$$

$\sigma(n)$ = somma dei divisori (positivi) di n

σ è una funzione moltiplicativa.

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) \quad \text{se } (a,b)=1$$

$$a = p^k \qquad b = q^h$$

$$\sigma(a) = 1 + p + \dots + p^k$$

$$\sigma(b) = 1 + q + \dots + q^h$$

$$\sigma(a)\sigma(b) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{h} p^i q^j = \sigma(ab).$$

Potenza di un primo che divide un fattoriale.

$$n! = p^\alpha \cdot m \qquad (m,p)=1$$

$$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots$$

$$n! = 2^k! = 2^\alpha m$$

$$\alpha = \left[\frac{2^k}{2}\right] + \left[\frac{2^k}{4}\right] + \dots + \left[\frac{2^k}{2^k}\right]$$

$$= 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 1 = 2^k - 1.$$

$$2^k! = 2^{2^k - 1} \cdot m$$

$$\sigma(2^k!) = \sigma(2^{2^k-1}) \cdot \sigma(m)$$
$$= (2^{2^k} - 1)\,\sigma(m).$$

$$p \mid 2^{2^{k-1}} + 1 \mid 2^{2^k} - 1 \mid \sigma(n)$$

$$2^{2^{k-1}} \equiv -1 \pmod p$$

$$2^{2^k} \equiv 1 \pmod p$$

$$\text{ord}_p 2 = 2^k \qquad p \equiv 1 \pmod{2^k}$$
$$\Rightarrow p > 2^k.$$

$\boxed{N3}$ $\qquad n = p(p^2 - p - 1) = q(2q+3)$

p, q primi. Quali n sono possibili?

$p = q$: $\qquad p^2 - p - 1 = 2p + 3$
$(p-4)(p+1) = p^2 - 3p - 4 = 0 \qquad p = 4$ $\boxed{NO}$

$p \nmid q \qquad p \mid 2q+3 \qquad 2q + 3 = kp. \quad k \in \mathbb{Z}$

Sostituendo si ottiene $\qquad p^2 - p - 1 = kq$

Moltiplico la prima per k : $\quad 2kq + 3k = k^2 p.$
" " seconda per 2 : $\quad 2p^2 - 2p - 2 = 2kq$

$$2p^2 - 2p - 2 = k^2 p - 3k$$

$$\boxed{2p^2 - (k^2+2)\,p + 3k - 2 = 0}$$

$$\Delta = k^4 + 4k^2 - 24k + 20$$

$\Delta > (k^2)^2$ se $4k^2 - 24k + 20 > 0$

$4(k-1)(k-5) > 0$

ok se $k > 5$.

$\Delta < (k^2+2)^2$ se $-24k + 16 < 0$

$k > \frac{2}{3}$.

Se $k > 5$ l'unica possibilità è

$\Delta = (k^2+1)^2$

Sostituendo si ottiene

$2k^2 - 24k + 19 = 0$ no sol. intere

$k = 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, 5$ $\quad$ k dispari

$k=1$ $\quad 2p^2 - 3p + 1 = 0 \quad (2p-1)(p-1) = 0$

no sol. numeri primi.

$k=3$ $\quad 2p^2 - 11p + 7 = 0$ no sol. intere

$k=5$ $\quad 2p^2 - 27p + 13 = 0$ $\quad p = 13$, $\quad p = \frac{1}{2}$ NO

$n = p(p^2 - p - 1) = 2015$.

N 2 Oss. Siccome in notazione decimale le cifre di posto $\geq n$ sono divisibili per 10^n, si possono ignorare.

$$\underbrace{\cdots a_n}_{\text{buttiamo via}} a_{n-1} \cdots a_1 a_0 \equiv 0 \mod 5^n$$

$$a_{n-1} \cdots a_1 a_0 \equiv 0 \mod 5^n$$

Quindi possiamo cercare una soluzione con <u>esattamente</u> n cifre

Per induzione: $s_1 = 5$ per $n = 1$

$$s_{n+1} = \boxed{d}\, s_n = s_n + d \cdot 10^n$$

- d cifra dispari
- $s_n + d \cdot 10^n \equiv 0 \quad (5^{n+1})$

$$\begin{aligned} &5^n (q_n + d \cdot 2^n) \equiv 0 \quad (5^{n+1}) \\ \iff\ & q_n + d \cdot 2^n \equiv 0 \quad (5) \\ \iff\ & d \equiv -q_n \cdot (2^n)^{-1} \quad (\mathrm{mod}\ 5) \end{aligned}$$

(dove $s_n = 5^n q_n$)

Scelgo $d \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ nella giusta classe di resto

Alternativa   Aggiustare le cifre una alla volta

$$5^2 = 25$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 250 \\ \hline 275 \end{array}$$

Parto da 5^n. Se tutte le sue cifre sono dispari, ok. Altrimenti scelgo K minimo per cui la cifra in posizione K e' pari.

Sommo $5^n \cdot 10^K$, ottengo un numero multiplo di 5^n in cui tutte le cifre fino a K compreso sono dispari.

Itero la costruzione finché $K > n$

Elimino tutte le cifre a sinistra della n-esima

$\boxed{N4}$ $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$

Se $p(x) = -a_i$ deve avere una soluzione intera, deve esistere n t.c. $a_i = -p(n)$

Considero quindi l'eqz. $p(x) - p(n) = 0$

$$(x-n)\left(x^2 + nx + n^2 + a(x+n) + b\right) = 0$$

Questa ha 3 soluzioni intere $\Longleftrightarrow$

$$\Delta = (n+a)^2 - 4(n^2 + an + b)$$

e' un quadrato.
Per semplicita' proviamo a prendere $a = 0$.

$$-4b - 3n^2 = \square$$

Proviamo anche a considerare solo n pari e (necess.) $b < 0$

Voglio b tale che per "tanti" valori di n

$$b - 3n^2 \text{ sia un quadrato}$$

Questo e' equivalente a: per ogni K esiste b che si scrive come $3n^2 + t^2$ in almeno K modi diversi.

Oss. • $t^2 + 3n^2 = |t + \sqrt{-3}\, n|^2$

$z = t + \sqrt{-3}\, n \qquad |z|^2 = z\bar{z} = (t + \sqrt{-3}\, n)(t - \sqrt{-3}\, n)$

$$= t^2 + 3n^2$$

• $\overbrace{(t_1 + \sqrt{-3}\, n_1)}^{z_1}\overbrace{(t_2 + \sqrt{-3}\, n_2)}^{z_2} =$

$$= \underbrace{(t_1 t_2 - 3 n_1 n_2) + \sqrt{-3}\,(t_1 n_2 + n_1 t_2)}_{z}$$

$$(t_1^2 + 3n_1^2)(t_2^2 + 3n_2^2) = \left[(t_1 t_2 - 3n_1 n_2)^2 + 3(t_1 n_2 + n_1 t_2)^2\right]$$

Alla luce dell'Osservazione, per trovare un b buono prendo un numero che si scriva come $t^2 + 3n^2$ e prendo una potenza di questo.

norma $(z\bar{z})$

$$7 = 2^2 + 3 \cdot 1^2 = N(2 + \sqrt{-3})$$

$$7^{2m} = N\left((2 + \sqrt{-3})^{2m}\right)$$

$$7^{2m} = N(7^m)$$

$$7^{2m} = N\left((2 + \sqrt{-3})^{2m-2}\right) \cdot N(7)$$

$$7^{2m} = N\left((2 + \sqrt{-3})^{2m-2s}\right) \cdot N(7^s)$$

Se voglio scrivere 7^{2m} come $\square + 3\square$?

$$t^2 + 3n^2$$

$$t = 7^s \frac{(2+\sqrt{-3})^{2m-2s} + (2-\sqrt{-3})^{2m-2s}}{2}$$

$$n = 7^s \frac{(2+\sqrt{-3})^{2m-2s} - (2-\sqrt{-3})^{2m-2s}}{2\sqrt{-3}}$$

Resta da dimostrare che, fissato m e facendo variare s, ottengo tutte rappr. di

$$7^{2m} = t^2 + 3n^2$$

distinte.

Speriamo che $\dfrac{(2+\sqrt{-3})^{2m-2s} + (2-\sqrt{-3})^{2m-2s}}{2}$ non abbia fattori 7.

Questa e' una soluz. della succ. per ricorrenza

$$a_{k+1} = 4a_k - 7a_{k-1}$$

$$(x - (2+\sqrt{-3}))\cdot(x - (2-\sqrt{-3})) = x^2 - 4x + 7$$

Per induzione, se $7 \nmid a_k$ allora $7 \nmid a_{k+1}$.

Ma $a_0 = 1$, quindi $7 \nmid a_k \ \forall k$.
$a_1 = 2$

$\boxed{3}$

N3 - Bis

$$p(p^2-p-1) = q(2q+3)$$

$p=q$ come prima

$2q+3 = Kp$

$p^2-p-1 = Kq$

$2q+3 \equiv 0 \ (p) \qquad q \equiv -\frac{3}{2} \ (p)$

$-1 \equiv Kq \ (p)$

$\equiv -\frac{3}{2}K \ (p) \Rightarrow K \equiv \frac{2}{3} \ (p)$

$3K-2 = e p \qquad K = \frac{ep+2}{3} \geq p/3$

$2q+3 \geq p^2/3 \qquad q \text{ "}\geq\text{" } p^2/6$

$p^2-p-1 = Kq \geq p/3 \cdot p^2/6 = p^3/18$

si controllano i primi ≤ 13

(in realtà $K = \frac{p+2}{3}$)