PREIMO 2017 – TdN Pomeriggio

Note Title 23/05/2017

N5

$$|m^k - n!| \leq n$$

massimo di $\frac{n}{m}$

$n=2, m=1, k=1$ va bene $\frac{n}{m} = 2$

CLAIM: 2 è davvero il max!

× assurdo $\exists (k, m, n)$ con $n > 2m$

$q = |m^k - n!|$, $q \leq n \Rightarrow q \mid n!$

$m^k = n! \pm q = q\left(\frac{n!}{q} \pm 1\right)$

$m < 2m \mid n!$ $\qquad m^2 \mid n!$

$\frac{n!}{q} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (q-1)(q+1) \cdots n$

$m \mid \frac{n!}{q}$

$\left(m, \frac{n!}{q} \pm 1\right) = 1$

$\Downarrow$

$\frac{n!}{q} \pm 1 = 1, -1$

$\frac{n!}{4} = 1,2$ Bisogna fare i casi $n = 1, 2, 3$

N 8 $f(x) = x^3 + x$

vogliamo sapere quando $f(x) \equiv f(y) \ (q)$

$$x^3 + x \equiv y^3 + y$$

$$(x-y)(x^2+y^2+xy+1) \equiv 0 \ (q)$$

$$x^2 + xy + y^2 + 1 \equiv 0 \ (q) \quad (*)$$

se fissiamo y, le "soluzioni"

$$x_{1,2} \equiv \frac{-y \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

se $\exists\, a$ t.c. $\Delta \equiv a^2 \ (q) \quad \sqrt{\Delta} \equiv a \ (q)$

se Δ non è r.q. l'equazione non ha sol.

$$\left(\frac{n}{q}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } q \mid n \\ 1 & \text{se } n \text{ è r.q.} \\ -1 & \text{se } n \text{ NON è r.q.} \end{cases}$$

le soluzioni di una quadratica mod q sono $1 + \left(\frac{\Delta}{q}\right)$

$$\Delta \equiv y^2 - 4(y^2+1) \equiv -3y^2 - 4$$

Fatto noto 1 (criterio di Eulero)

$$\left(\frac{n}{q}\right) \equiv n^{\frac{q-1}{2}} \quad (q)$$

"dim." $n^{q-1} \equiv 1 \quad \left(n^{\frac{q-1}{2}} + 1\right)\left(n^{\frac{q-1}{2}} - 1\right) \equiv 0 \ (q)$

$a^{q-1} - 1 = 0$

Fatto noto 2

$f(x) = a_{p-2} x^{p-2} + \dots + a_0$ (dove a_i può essere tutto mod q)

$$\sum_{i=0}^{q-1} f(i) \equiv 0 \ (q)$$

Lemma

$$\sum_{i=0}^{q-1} \left(\frac{ai^2+b}{q}\right) \equiv -\left(\frac{a}{q}\right) \quad (q)$$

dim:

$$\sum \left(\frac{ai^2+b}{q}\right) \overset{1}{\equiv} \sum (ai^2+b)^{\frac{q-1}{2}} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=0}^{q-1} \left(a^{\frac{q-1}{2}} \cdot i^{q-1} + \sum_{j=3}^{q} c_j i^{q-j} \right) \equiv$$

$$\downarrow 2$$

$$\equiv a^{\frac{q-1}{2}} \cdot \sum_{i=1}^{q-1} 1 + 0$$

$$\equiv -\left(\frac{a}{q}\right)$$

$$\left(\frac{\Delta}{q}\right) = \left(\frac{-3y^2-4}{q}\right)$$

$$\sum_{y=0}^{q-1} \left(\frac{\Delta}{q}\right) \equiv -\left(\frac{-3}{q}\right) \quad (q)$$

$$-q < \quad < q \qquad \Rightarrow \sum_{y=0}^{q-1} \left(\frac{\Delta}{q}\right) = -\left(\frac{-3}{q}\right)$$

Proviamo $\left(\frac{-3}{q}\right) = 1$

$$\left(\frac{-3}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{3}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{3}\right) (-1)^{\frac{3-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

Reciprocità quadratica

$$\left(\frac{q}{h}\right) = \left(\frac{h}{q}\right)(-1)^{\frac{h-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{q}{3}\right)(-1)^{q-1} = \left(\frac{q}{3}\right) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$q \equiv 1 \ (3)$$

Scegliendo $q \equiv 1 \ (3)$

$$\sum_{y=0}^{q-1} \left(\frac{\Delta}{q}\right) = -1$$

$$-3y^2 - 4 \equiv 0 \ (q) \qquad -3 \equiv a^2 \ (q)$$

$$y^2 \equiv \frac{4}{a^2} \ (q) \qquad y \equiv \pm \frac{2}{a} \ (q)$$

$\left(\frac{\Delta}{q}\right) = 0$ per esattamente 2 valori di y.

$$a \cdot 1 + b \cdot (-1) = -1$$

$$a + b = q - 2 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{q-1}{2} \qquad a = \frac{q-3}{2}$$

per tutti gli y t.c. $\left(\frac{\Delta(y)}{q}\right) = -1$ $\quad p(x) \equiv p(y) \ (q)$

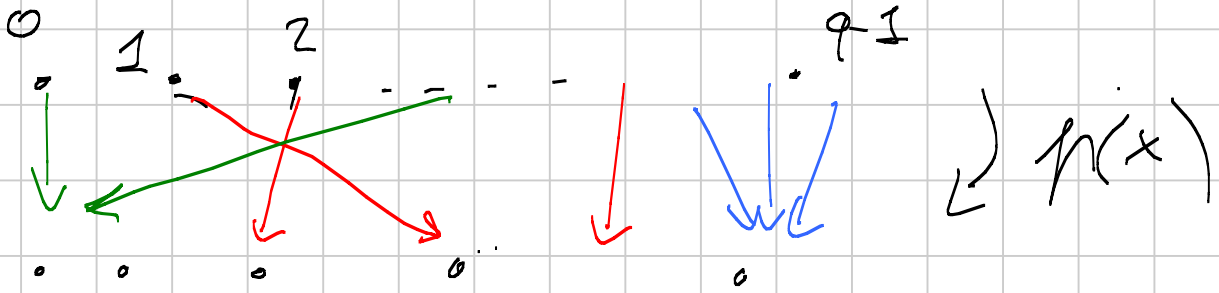
$\Updownarrow$

$x \equiv y \ (q)$

quindi p prende già $\frac{q-1}{2}$ valori DISTINTI

$y_0, q-y_0$ per cui $\left(\frac{\Delta(y_0)}{q}\right) = 0$

↓ ho altri 2 valori nell'immagine di p



— gli y t.c. $\left(\frac{\Delta(y)}{q}\right) = -1$

— $= 0$ (cioè ho 2 freccie in arrivo)

dunque

$\frac{q-1}{2} + 2$ valori DISTINTI raggiunti da p

Evitiamo la Rec. Quadratica

$q \equiv 1 \ (3) \iff x^3 - 1 \equiv 0 \ (q)$ ha 3 soluzioni.

$\iff x^2 + x + 1 \equiv 0 \ (q)$ ha 2 soluz. mod q

$\iff \Delta = -3$ è un quadrato modulo q

Contare le soluzioni di $x^2 + xy + y^2 \equiv -1 \ (q)$

Sia $q \equiv 1 \ (3)$. Allora $\exists \omega : \omega^2 + \omega + 1 \equiv 0 \ (q)$

$$x^2 + xy + y^2 \equiv (x - \omega y)(x - \omega^2 y) \equiv -1 \ (q)$$

$$AB \equiv -1 \ (q)$$

$$x = \frac{\omega A - B}{\omega - 1}$$

$$\{ \text{soluz. di } x^2 + xy + y^2 \equiv -1 \ (q) \} \xleftrightarrow{\sim} \{ \text{Soluz. di } AB \equiv -1 \}$$

$q - 1$

N 6 | Sia $C(n)$ la somma delle cifre di n. Sia $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + C(a_n)$. Si mostri che esistono infiniti primi p che dividono qualche a_n.

---

a_n cresce "lentamente"

I numeri con dei divisori primi fissati sono "pochi".

Per assurdo: i primi che compaiono tra i divisori di $a_1, a_2, \ldots$ sono $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_h$

Come dire che gli a_n sono tanti.

Quanti sono gli $a_n \leq 10^k$?

$a_{n+1} - a_n = C(a_n)$

Se $a_n \leq 10^k$? $\longrightarrow$ $C(a_n) = ?$

$C(a_n) \leq 9 \cdot k$

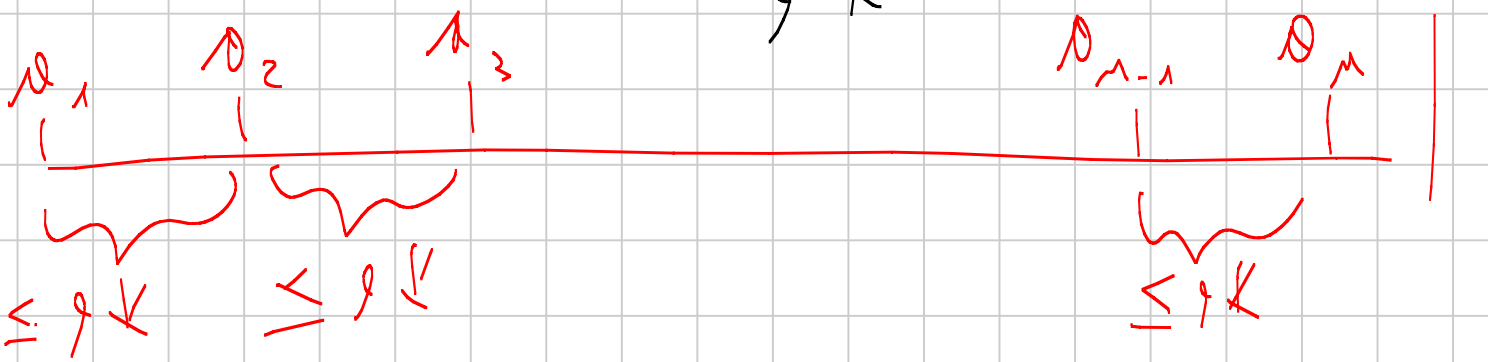
IL MAX DI $C(x)$ CON $x < 10^k$ È $9k$.

VISTO CHE SE $p_n < 10^k$ ALLORA

$0 < p_{n+1} - p_n < 9k$

IL NUMERO DI p_m MINORI DI 10^k

SARÀ ALMENO $\frac{10^k}{9k}$



II STIMA (SUI $p_1, \dots, p_h$)

CI CHIEDIAMO QUANTI SIANO I NUMERI DELLA FORMA $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_h^{\alpha_h} < 10^k$

STIMA PARZIALE

$h = 1$

QUANTI SONO I NUMERI DELLA FORMA $p_1^{\alpha_1}$ CON p_1 FISSATI MINORI

$p_1 \quad 10^k$?

10^k

$1 \quad p_1 \quad p_1^2 \quad p_1^3 \quad \dots \quad p_1^\beta \mid p_1^{\beta+1}$

$p_1^\beta < 10^k$

$\downarrow$

$2^\beta < 10^k$

$\updownarrow$

$16^{\beta/4} < 10^k$

$\downarrow$

$10^{\beta/4} < 10^k$

$\updownarrow$

$\beta < 4k$

SONO AL PIÙ $4k$

(OSS.: C'È ANCHE LO ZERO MA $\beta < 4k$)

DIRETTO

QUINDI I NUMERI DELLA FORMA $p_i^{a_i}$

CON p_i FISSATO SONO $\leq 4k$

I NUMERI DELLA FORMA

$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_h^{\alpha_h}$ SONO AL PIÙ

$(4k)^h$ PERCHÉ OGNI NUMERO

DI QUESTA FORMA È PRODOTTO DI

$p_i^{\alpha_i} < 10^k$

RIEPILOGANDO:

$$\#\{n \leq 10^k\} \geq \frac{10^k}{9k}$$

$$\#\{p_1^{\alpha_1} \cdots p_h^{\alpha_h} < 10^k\} \leq (4k)^h$$

SE GLI n FOSSERO TUTTI DELLA FORMA

$p_1^{\alpha_1} \cdots p_h^{\alpha_h}$

$$\{n \leq 10^k\} \subseteq \{p_1^{\alpha_1} \cdots p_h^{\alpha_h} < 10^k\}$$

$$(4k)^h \geq \frac{10^k}{9k}$$

$$\updownarrow$$

$4^h \cdot 9 \cdot k^{h+1} \geq 10^k$ con h FISSATO.

PER k GRANDE LHS $\ll$ RHS (molto)

GLI ESPONENZIALI CRESCONO PIÙ VELOCEMENTE DEI POLINOMI.

7. Sia n un intero positivo e sia $m > n^{n-1}$.

Dimostrare che esistono primi distinti $p_1, p_2, \dots, p_n$ tali che $p_k \mid m + k$ $\forall 1 \le k \le n$.

Fissiamo un k:

$$m + k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_h^{\alpha_h}$$

Hope: un qualche $p_i^{\alpha_i}$ è $\ge n$.

Supponiamo il contrario:

$$n^{n-1} < m + k = \prod_{i=1}^{h} p_i^{\alpha_i} \le n^h$$

A noi piacerebbe $h \le n-1$

Quante possono essere le potenze di primo $\le n-1$?

Sicuramente, al più $n-1$.

Quindi $h \le n-1$ perché

$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_n^{\alpha_n}$ sono per ipotesi assurda potenze di primo distinte

$\leq n-1$.

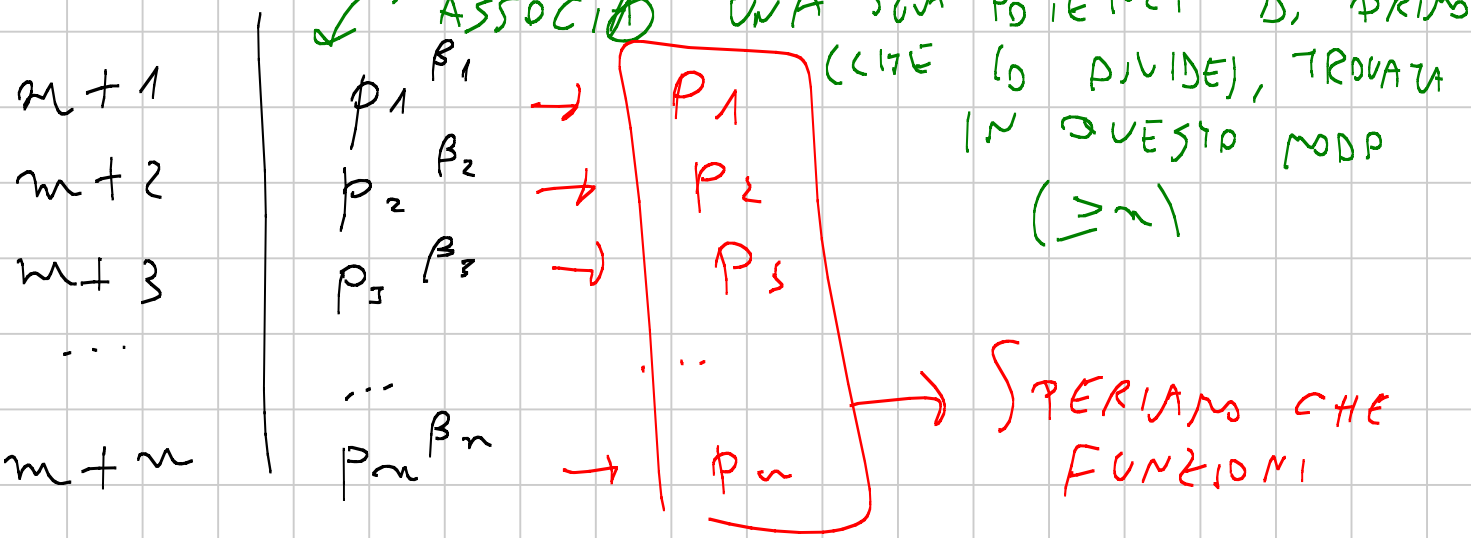
$$m^{n-1} < m+K \leq n^h \leq n^{n-1}$$

ASSURDO!

HOPE: ✓

ESISTE UNA POTENZA DI PRIMO $\geq n$ CHE DIVIDE $m+K$.

ASSOCIAMO UNA SUA POTENZA DI PRIMO (CHE LO DIVIDE), TROVATA IN QUESTO MODO ($\geq n$)



SICURAMENTE $p_K \mid m+K$.

MAGARI NON SONO DISTINTI.

SUPPONIAMO $p_i = p_j = p$ PER $1 \leq i \neq j \leq n$

$p^{\beta_i} \mid m+i$ $\quad$ $p^{\beta_i} \geq n$

$p^{\beta_j} \mid m+j$ $\quad$ $p^{\beta_j} \geq n$

SIA $\beta = \min\{\beta_i, \beta_j\}$

$\rightarrow$ $p^\beta \mid m+i$ $\qquad$ $p^\beta \mid m+j$

$$p^\beta \geq n$$

$\rightarrow$ $p^\beta \mid j-i$.

SE $j \neq i$, $\quad |j-i| \leq n-1$

MA ALLORA $\quad p^\beta \mid j-i \rightarrow$

$p^\beta \leq n-1$ $\quad$ ASSURDO.

---

6 b DIAMO UNA STIMA ESPLICITA DI p_n.

$p_n \leq 1000 + 50 \cdot n \log_{10} n$

COME DIMOSTRARLO?

INDUZIONE

- n_1 ✓

- INDUTTIVO $\quad p_n \leq 1000 + 50\, n \log_{10} n$

LO MINORIAMO CON $\sim$

QUANTITÀ DA AGGIUNGERE $\leq 50 \log_{10}(n)$

VORREMMO $a_{n+1} \leq 1000 + 50\,(n+1)\log_{10}(n+1)$

SU $c(n)$ SAPPIAMO: $c(n) \leq 9 \cdot \log_{10}(10 \cdot n)$

$\log_{10}(10 \cdot n) \geq$ # CIFRE DI n

a_{n+1}

$a_n + c(a_n) \leq a_n + 9 \cdot \log_{10}(10 \cdot a_n) \leq$

$\leq 1000 + 50\, n \log_{10} n + 9 \cdot$

$\log_{10}(10000 + 500\, n \log_{10} n)$

10

$11 \cdot n$

$50 \cdot \log_{10} n$

$(10000 + 500\, n \log_{10} n)^9 \stackrel{?}{\leq} n^{50}$

10

FATE A CASA LE 5 7 / 11 E

COMUNQUE:

$a_n \leq c + d \cdot n \cdot \log_{10} n$

FATTO POTENTE:

SE HO UN INSIEME $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$

DI INTERI POSITIVI TALE CHE

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{a_i} \longrightarrow +\infty$$

ALLORA I DIVISORI PRIMI AL VARIARE DEGLI a_n SONO INFINITI.

SUPPONIAMO CHE I PRIMI $p_1, \dots, p_n$ SIANO FINITI.

FORMA: $p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = 0}^{+\infty} \frac{1}{\left(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}\right)} =$$

(OGNI α_i TRA 0 E $+\infty$)

$$= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_1^i}\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_2^i}\right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^i}\right) =$$

OGNI $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_h^{\alpha_h}$ PUÒ ESSERE SCRITTO IN UN E UN SOLO MODO

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \qquad \text{PER } 0 < x < 1$$

$$= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_h}}\right) < +\infty$$

↳ È UN NUMERO FINITO

CI BASTA $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(c + d \cdot n \log_{10} n)} \geq$$

$$\frac{1}{d} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log_{10} n}$$

CONDENSAZIONE DI CAUCHY

VERSIONE AD HOC:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \iff \sum_{n=1}^{+\infty} 10^n \cdot a_{(10^n)} = +\infty$$

a_n DEVE ESSERE DECRESCENTE E POSITIVA

$$\frac{1}{d} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n}{10^n \cdot \log_{10}(10^n)} \stackrel{?}{=} +\infty$$

$$\frac{1}{d} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

(CAUCHY DI NUOVO)

$$\frac{1}{d} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n}{10^n}(1) = +\infty$$