PreIMO 2017

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

PREIMO 2017 AM

Note Title 24/05/2017

A1. $$\boxed{(n-1)a_{n+1}=(n+1)a_n-2(n-1)}$$

$$(n-1)b_{n+1}=(n+1)b_n$$

$$b_{n+1}=\frac{n+1}{n-1}b_n=\frac{n+1}{n-1}\,\frac{n}{n-2}\cdot b_{n-1}\ldots$$

$$b_n=C\,n(n-1)$$

Divido per $(n+1)n(n-1)$

$$\frac{a_{n+1}}{n(n+1)}=\frac{a_n}{n(n-1)}-\boxed{\frac{2}{(n+1)n}}$$

$$\frac{2}{(n+1)n}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n(n+1)}-\frac{2}{n+1}=\frac{a_n}{n(n-1)}-\frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow\ \frac{a_n}{n(n-1)}-\frac{2}{n}=\text{costante}=C$$

$$\boxed{a_n=C\,n(n-1)+2(n-1)}\qquad a_2=2C+2$$

(Oppure: provo i polinomi di grado 2 ...)

$$Q_{1999} = C \cdot 1999 \cdot 1998 + 2 \cdot 1998 \equiv 0 \quad (2000)$$

$$= C \cdot (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) \equiv 0 \Rightarrow 2C \equiv 4 \quad (2000)$$

$$\overset{4}{\overset{\equiv}{\boxed{2C}}} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1) \equiv 0 \quad (2000)$$

$$\overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{n(n-1)}{\cancel{2}} + 2(n-1) \equiv 0 \quad (2000)$$

$$(2n+2)(n-1) \equiv 0 \quad (2000)$$

$$1000 \mid (n+1)(n-1)$$

$$\begin{cases} n \equiv \pm 1 & (125) \\ n \equiv \pm 1 & (4) \end{cases}$$

125 divide $n-1$ o $n+1$

2 divide uno tra $n-1$ e $n+1$ e 4 divide l'altro

$$n \equiv 249 \quad (1000)$$

A2 $$P(x)^3 + Q(x)^3 = x^{12} + 1$$

$$\big(P(x) + Q(x)\big)\big(P(x)^2 - P(x)Q(x) + Q(x)^2\big)$$

$$(x^{12}+1)(x^{12}-1)=x^{24}-1$$

un fattore per ogni ordine mod. 24

$$\Phi_k(x)=\prod_{\mathrm{ord}_{24}(i)=k}(x-\omega^i)$$

ω rad. primitiva

$$x^{24}-1=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ord } 1}}{(x-1)}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ord } 2}}{(x+1)}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ord } 3}}{(x^2+x+1)}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ord } 4}}{(x^2+1)}\cdots$$

In $x^{12}+1$ stanno ordine 8 e ordine 24

grado $\Phi(8)=4$ grado $\Phi(24)=8$

$$\underset{\uparrow}{(x^4+1)}\underset{\uparrow}{(x^8-x^4+1)}=x^{12}+1$$

irriducibili su $\mathbb{Q}[x]$

$$P(x)+Q(x)=\alpha(x^4+1) \quad \alpha(x^8-x^4+1) \quad \alpha(x^4+1)(x^8-x^4+1) \quad \alpha$$

$$P^2(x)-P(x)Q(x)+Q^2(x)=\frac{1}{\alpha}(x^8-x^4+1) \quad \frac{1}{\alpha}(x^4+1) \quad \frac{1}{\alpha}\,1 \quad \frac{1}{\alpha}(x^{12}+1)$$

E se

$P(x)$ ha grado 37, $Q(x)$ ha grado 37,

e tutto si cancella?

$$P(x)=\alpha x^d+\cdots$$

$$Q(x) = \beta x^d + \dots$$

$$P^2 - PQ + Q^2 = \underbrace{\alpha^2 x^{2d} - \alpha\beta x^{2d} + \beta^2 x^{2d}} + \dots O\left(x^{2d-1}\right)$$

$\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \neq 0$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$

$$P + Q = x^4 + 1$$

$$P^2 - PQ + Q^2 = x^8 - x^4 + 1$$

$$3PQ = (P+Q)^2 - \left(P^2 - PQ + Q^2\right) = \dots = 3x^4$$

$PQ = x^4$ $\qquad P = x^3 \quad Q = x$ non va bene

perché se no $P+Q$ ha grado troppo basso

Un fattore deve avere grado 4

$$P(x) = \alpha x^4 \qquad Q(x) = \frac{1}{\alpha}$$

$\alpha x^4 + \frac{1}{\alpha} = x^4 + 1$ sse $\alpha = 1$

soluzioni: $P(x) = x^4$, $Q(x) = 1$

$\qquad\qquad = 1 \qquad\quad = x^4$

A 3.

$$\sum_{h=0}^{n} a_h (-1)^h \binom{n}{h} = 0 \qquad (*)$$

Altra freccia: se $a_n = P(n)$ per un certo polinomio $P(x)$ di grado $d < m$, allora

$$\sum_{n=0}^{m} a_n (-1)^n \binom{m}{n} = 0$$

se P ha grado 0, allora $P(1) - P(0) = 0$

se P ha grado ≤ 1, allora $P(2) - 2P(1) + P(0) = 0$

se P ha grado ≤ 2, allora $P(3) - 3P(2) + 3P(1) - P(0) = 0$

⋮

valori assunti da $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ di grado $\deg P - 1$

$P(0) \quad P(1) \quad P(2) \quad P(3) \quad P(4) \quad P(5) \quad \ldots$

$P(1)-P(0) \quad P(2)-P(1) \quad P(3)-P(2) \quad P(4)-P(3) \quad \ldots$

$P(2) - \boxed{2}P(1) + P(0) \quad P(3) - \boxed{2}P(2) + P(1) \quad -$

$$\boxed{P(3) - \boxed{3}P(2) + \boxed{3}P(1) - P(0)}$$

---

supponiamo $(*)$ vera per $m \geq \overline{m}$

Sapendo

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_{\overline{m}-1}$

determino $a_{\overline{m}}$ dalla $(*)$ con $m = \overline{m}$

determino $a_{\bar m+1}$ dalla $(*)$ con $m = \bar m + 1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

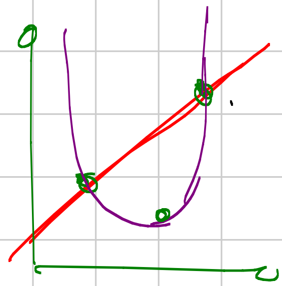
$\Rightarrow$ esiste una sola successione che soddisfa $(*)$ per $m \geq \bar m$ e la valori iniziali

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_{\bar m-1}$$

Prendo il polinomio di grado $\leq \bar m$ tale che

$$p(0) = a_0,\ p(1) = a_1, \dots\ p(\bar m - 1) = a_{\bar m-1}$$

(Interpolazione di Lagrange)



Allora i valori $b_n := p(n)$

soddisfano $\quad b_i = a_i$ per $i = 0, 1, \dots, \bar m - 1$

e $(*)$ per $m \geq \bar m$

$$\sum_{n=0}^{m} a_n (-1)^n \binom{m}{n} = 0 \qquad m > m_0$$

$$\sum_{m\geq 0} x^m \sum_{n=0}^{m} a_n (-1)^n \binom{m}{n} = P(x)$$

$$= \sum_{m\geq 0} \sum_{n=0}^{m} a_n (-1)^n x^m \binom{m}{n}$$

(Snake Oil)

$$= \sum_{n\geq 0} a_n (-1)^n \underbrace{\sum_{m\geq 0} x^m \binom{m}{n}}$$

$$\frac{x^{n-1}}{(1-x)^n} = \frac{1}{n!} D^n \frac{1}{(1-x)}$$

$$x P(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \left[- \frac{x}{1-x} \right]^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} a_n \left(\frac{x}{x-1} \right)^n = Q(x)$$

$$y = \frac{x}{x-1} \qquad x = \frac{y}{y-1}$$

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n y^n} = Q\left(\frac{y}{y-1}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{d} c_i \frac{y^i}{(y-1)^i}$$

$$= \sum_{i=0}^{d} c_i y (-1)^i \cdot \sum_{j \geq 0} y^j \binom{j}{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{d} \sum_{j \geq 0} c_i (-1)^i y^{j+1} \binom{j}{i}$$

$$= \boxed{\sum_{j \geq 0} y^{j+1} \underbrace{\sum_{i=0}^{d} c_i (-1)^i \binom{j}{i}}_{a(j)}}$$

$$a_n = a(j-1)$$

$\blacksquare$

Trovare α t.c. esiste $P(x)$ polinomio non nullo

$$\frac{P(1) + P(3) + \ldots + P(2n-1)}{n} = \alpha P(n) \qquad (\cancel{**})$$

Provo i casi piccoli: $d = \deg(P)$

$\boxed{d=0}$ P costante, $P = a$

$$\frac{na}{n} = \alpha a \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

con P poli. qualunque di grado 0

$\boxed{d=1}$ $P(n) = bn + a$

$$\frac{(\underbrace{1+3+5+\dots+(2n-1)}^{n^2})b + na}{n} = \alpha(bn+a)$$

vale per ogni a, b $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = 1}$

con P poli. qualunque di grado ≤ 1

$P(n) = cn^2 + bn + a$

$$\frac{(\boxed{1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2})c + n^2b + na}{n} = \alpha(cn^2 + bn + a)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{(2n)(2n+1)(4n+1)}{6} = \frac{1}{3}8n^3 + \dots$$

$$- 2^2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = -2^2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = -\frac{4}{3}n^3 + \dots$$

$$= \frac{4}{3}n^3 + \square n^2 + \square n$$

$$\frac{c\left(\frac{4}{3}n^{\cancel{3}\,2}+\square n^{\cancel{2}}+\square \cancel{n}\right)+bn^{\cancel{2}}+a\cancel{n}}{n}=\alpha\left(cn^2+bn+a\right)$$

$\Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{4}{3}}$ $\qquad \frac{4}{3}c=\alpha c \qquad \leftarrow$ (wlog $c=1$)

$\square c+b=\alpha b \leftarrow$ mi ricavo b

$\square c+a=\alpha a \leftarrow$ mi ricavo a

$\Rightarrow$ $\alpha=\frac{4}{3}$ va bene con P una certa famiglia di polinomi di grado 2, $P(n)=c\left(n^2+\square n+\square\right)$ $\forall c\in\mathbb{R}$

$$P(n)=zx^d+yx^{d-1}+\dots+bx+a$$

$$\frac{z\left(1^d+3^d+\dots+(2n-1)^d\right)+y\left(1^{d-1}+3^{d-1}+\dots+(2n-1)^{d-1}\right)+\dots+b(1+3+\dots+(2n-1))+an}{n}=$$

$$=P(n)$$

$$\left[\begin{aligned}&1^d+3^d+\dots+(2n-1)^d=\left(1^d+2^d+\dots+(2n)^d\right)-2^d\left(1^d+2^d+\dots+n^d\right)=\\&=\frac{1}{d+1}(2n)^{d+1}+O(n^d)-\left[2^d\cdot\frac{1}{d+1}n^{d+1}+O(n^d)\right]\\&=\boxed{\frac{2^d}{d+1}n^{d+1}}+O(n^d)\end{aligned}\right]$$

$$= \frac{z\left(\frac{2^d}{d+1}n^{d+1}+\dots\right)+y\left(\frac{2^{d-1}}{d}n^d+\dots\right)+\dots+bn^2+an}{n} = P(n)$$

$$z\frac{2^d}{d+1} = \alpha z \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{2^d}{d+1}} \quad \text{wlog } \boxed{z=1}$$

$$y\boxed{\frac{2^{d-1}}{d}} + \square z = \boxed{\alpha} y \qquad y = \boxed{\text{roba}}$$

$$x\boxed{\frac{2^{d-2}}{d-1}} + \square y + \square z = \boxed{\alpha} x \qquad x = \boxed{\text{roba}}$$

$$b + \square c + \dots + \square y + \square z = \alpha b \qquad b = \boxed{\text{roba}}$$

$$a + \square b + \square c + \dots + \square z = \alpha a \qquad a = \boxed{\text{roba}}$$

$\Rightarrow$ riesco effettivamente a trovare un polinomio che va bene per ogni grado d

⚠ riesco a risolverle perché

$$\frac{2^a}{a+1} \neq \frac{2^d}{d+1} \quad \text{per } a<d$$

(e $d \geq 2$, ma tanto il caso $d \leq 1$ l'ho fatto a mano)

$\Rightarrow$ gli unici α che vanno bene sono quelli della forma $\alpha = \frac{2^d}{d+1}$, e per ognuno di questi posso trovare un poly. di grado d

che funzione

2° parte: $\alpha=2 \Leftrightarrow d=3$

uso lo stesso metodo di $d=2$ per farlo

$$c(n^3-n) = P(n) \quad \text{va bene per } \alpha=2$$

$$P(1)+P(3)+\dots+P(2n-1)=n\alpha P(n)$$

$$P(1)+P(3)+\dots+P(2n-1)+P(2n+1)=(n+1)\alpha P(n+1)$$

$$\Rightarrow P(2n+1)=(n+1)\alpha P(n+1)-n\alpha P(n) \quad (***)$$

$$P(n)=\underbrace{zn^d+yn^{d-1}+}\,O(n^{d-1})$$

$$z(2n)^d+O(n^{d-1})=\alpha\left(\cancel{zn^{d+1}}+zdn^d+zn^d+\cancel{yn^d}-\cancel{zn^{d+1}}-\cancel{yn^d}+O(n^{d-1})\right)$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{2^d}{d+1} \quad (\text{confrontando coeff. di } n^d)$$

---

nel caso $\alpha=2$, $d=3$:

$$P(2n+1)=2\left[(n+1)P(n+1)-nP(n)\right]$$

vera come identità tra polinomi in n

$\boxed{n=-1} \Rightarrow P(-1) = 2P(-1) \Rightarrow P(-1)=0$

$\boxed{n=0} \Rightarrow P(1) = 2P(1) \Rightarrow P(1)=0$

Mi dice che i polinomi che cerco per $\alpha=2$, $d=3$ sono della forma

$$p(n) = d(n+1)(n-1)\underbrace{(\boxed{q}n+\boxed{r})}_{q=1,\ r=0}$$

ALGEBRA PREIMO 2017. POMERIGGIO

Note Title 24/05/2017

$\boxed{A5}$ $a,b,c>0$ $a+b+c=3$

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2}\geq\sum_{cyc}a^2$$

Omogeneizzo? $\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a^2}-a^2\right)=\sum\frac{1-a^4}{a^2}=3^{-4}\sum\frac{(a+b+c)^4-(3a)^4}{a^2}$

Posso tentare Bunching + Schur facendo tutti i conti.

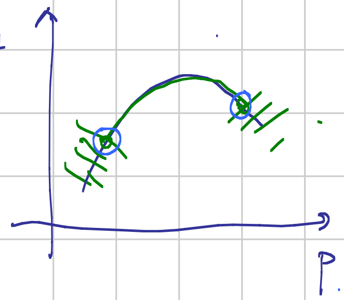
$$\boxed{3^{-4}\frac{1}{a^2b^2c^2}}\sum_{cyc}\left[(a+b+c)^4-(3a)^4\right]b^2c^2\geq 0$$

$$f(a,b,c)=g(s,q,p)=g_1(s,q)+g_2(s,q)p+\underbrace{g_3(s,q)}_{2}\underbrace{p^2}_{6}$$

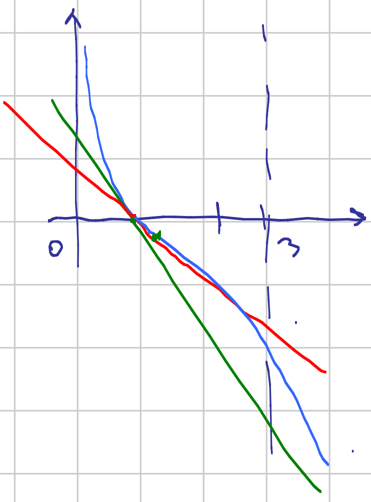
$s=a+b+c$

$q=ab+bc+c$

$p=abc$



$f(x)=\frac{1}{x^2}-x^2$ $\sum_{cyc}f(a)\geq 0$



Se fosse convessa: $\frac{1}{3}\sum_c f(a)\geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=f(1)$
$=0$

$f'(x)=-2x^{-3}-2x$

$f''(x)=6x^{-4}-2$ $f''(x_0)=0$ $x_0=\sqrt[4]{3}$
$\approx 1{,}3$

Se fosse $f(x)\geq r(x)$ per $x\in[0,3]$ e $r(1)=0$

$$\sum_a f(a)\geq\sum_a r(a)=\sum_a(ma+q)=m(a+b+c)+3q=3r(1)=0$$

$r(x) = 4-4x \quad r(3) = -8 \quad f(3) = \frac{1}{9} - 9 < r(3)$

Se $a, b, c <$ punto di intersezione, ok, altrimenti a maggiore

$r\left(\frac{7}{3}\right) = 4 - 4 \cdot \frac{7}{3} = -\frac{16}{3} \qquad f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{9}{49} - \frac{49}{9} = \frac{81-49^2}{49 \cdot 9}$

$\frac{81}{49} - 49 \overset{?}{\gtrless} -48 \qquad f\left(\frac{7}{3}\right) > r\left(\frac{7}{3}\right)$

$a > \frac{7}{3}$ almeno uno tra b e c è $< \frac{1}{3} \qquad b \leq \frac{1}{3}$

$f(b) \geq 9 - \frac{1}{9} \qquad f(a) \geq \frac{1}{9} - 9$

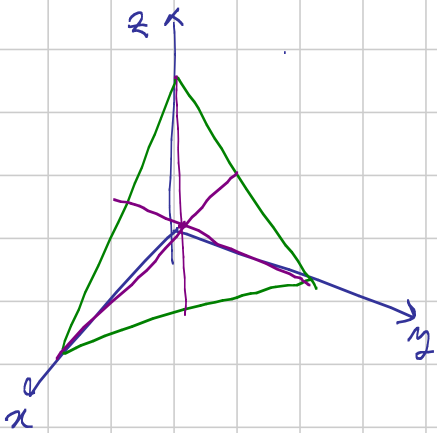
Modo 2: Convex - concave

vincolo somma $x+y+z = c$

f t.c. f'' cambia se a volta sola

$(f')^{-1}$ al più 2 controimmagini per ogni punto

Allora i punti stazionari di $f(x)+f(y)+f(z)$ sono tali per cui almeno due tra x, y, z sono uguali



Va controllato il bordo e $x = y$

$2f(x) + f(3-2x) \overset{?}{\geq} 0$

derivo $2f'(x) - 2f'(3-2x)\big|_{x=1} = 0$.

derivo $2f''(x) + 4f''(3-2x)$

$\frac{3}{x^4} - 2 + \frac{6}{(3-2x)^4} - 4 > 0 \quad \forall x$

non banale

$$\sum \frac{1}{a^2} \geq \sum a^2 \qquad\qquad \sum_c \quad \sum_s$$

$$\sum a^2 b^2 \geq \sum a^4 b^2 c^2$$

$$(a+b+c)^4 = \sum_c a^4 + 6 \sum_c a^2 b^2 + 12 \sum_c a^2 bc + 4 \sum_s a^3 b$$

$$2[6,2,0] + 13[4,2,2] + 6[4,4,0] + 20[3,3,2]$$
$$+ 24[4,3,1] + 8[5,3,0] + 8[5,2,1] \overset{?}{\geq} 81[4,2,2]$$

$$[6,2,0] + 4[5,3,0] + 4[5,2,1] + \underline{3[4,4,0]}$$
$$+ \underline{12[4,3,1]} + 10[3,3,2] \overset{?}{\geq} 34[4,2,2]$$

$$\sum_s a^3 b^3 c^2 + \sum_s a^5 b^1 c^2$$
$$\geq 2 \sum_s a^4 b^2 c^2$$

$$\sum_s a^6 b^2 + 2 \sum_s a^3 b^3 c^2$$
$$\geq 3 \sum_s a^4 b^{8/3} c^{4/3}$$
$$\geq 3 \sum_s a^4 b^2 c^2$$

$\boxed{A6}$ $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$f(x)+f(y) \le \frac{f(x+y)}{2}$ $\qquad \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \ge \frac{f(x+y)}{x+y}$

$g(x) := \frac{f(x)}{x}$ $\qquad \frac{x}{x+y} g(x) + \frac{y}{x+y} g(y) \le \frac{1}{2} g(x+y)$ $\qquad g(x)+g(y) \ge g(x+y)$

$\frac{x}{x+y} g(x) + \frac{y}{x+y} g(y) \le \frac{1}{2} g(x+y) \le \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2} g(y)$

$\frac{x-y}{x+y}\left(g(x)-g(y)\right) \le 0$ $\qquad \boxed{g \text{ non crescente}}$

$x=y$ $\qquad 2g(x) = g(2x)$ $\qquad g(2^n x) = 2^n g(x)$ $\qquad n \in \mathbb{Z}$

siccome è non crescente, $g(x) \le 0$

$\mathbb{N} \ni y = \sum_{i \in A} 2^i$ $\qquad A \subseteq \{0,1,2,\dots,n\} = S$ $\qquad \bar{y} = \sum_{i \in \bar{A}} 2^i + 1$

$2^{n+1} g(1) = g(2^{n+1}) = g(y+\bar{y}) \le g(y) + g(\bar{y}) = g\left(\sum_A 2^i\right) + g\left(\sum_{\bar{A}} 2^i + 1\right) \le \sum_A 2^i g(1) + \dots = y g(1) + \bar{y} g(1) = 2^{n+1} g(1)$

$\sum_A g(2^i)$ $\qquad \sum_{\bar{A}} g(2^i) + g(1)$

$g(y) = y g(1)$

$y > 0$ qualsiasi $\quad y = \sum_A 2^i$ $\qquad A \subseteq \{\dots,-3,-2,-1,0,1,\dots,n\} = S$

$y_m = \sum_{\substack{i \in A \\ i \ge m}} 2^i$ $\qquad \bar{y}_m = \sum_{\substack{i \in \bar{A} \\ i \ge m}} 2^i + 2^m$ $\qquad y_m + \bar{y}_m = 2^{n+1}$ $\qquad y_m \le y \le y_m + 2^m$

$2^{n+1} g(1) = \dots = g(y_m + \bar{y}_m) \le \dots \le y_m g(1) + \bar{y}_m g(1) \le 2^{n+1} g(1)$

$g(y_m) = y_m g(1)$

$(y+2^m) g(1) \le (y_m + 2^m) g(1) = g(y_m + 2^m) \le g(y) \le g(y_m) = y_m g(1) \le (y - 2^m) g(1)$

$|g(y) - y g(1)| \le 2^m g(1)$ $\quad \forall m$ $\qquad m \to -\infty$

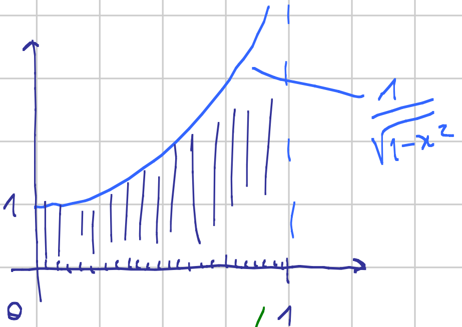
$\boxed{A7}$ $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1 \qquad x_k > 0$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{1-\left(\sum_{i<k} x_i\right)^2}}$$

$$x_k = \frac{1}{n} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

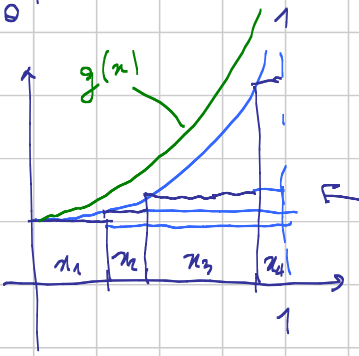
$\downarrow$

per $n \to \infty$ tende a $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad f^{-1}(y) = \sqrt{1-\frac{1}{y^2}}$$

$$E = \sum_{k=1}^{n} x_k f\left(\sum_{i<k} x_i\right)$$



$\leftarrow$ area rettangoli $= E$

$$g^{-1}(y) = 1 - \frac{1}{y^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x}} = g(x)$$

$z_k := 1 - \sum_{i<k} x_i \qquad z_1 = 1 \dots z_2 = 1 - x_1 \dots z_n = x_n \qquad z_{n+1} = 0$

$x_k = z_k - z_{k+1}$

$$E = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k+1}) \frac{1}{\sqrt{z_k}} = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k+1}) \sum_{m=1}^{k-1} \left(\frac{1}{\sqrt{z_{m+1}}} - \frac{1}{\sqrt{z_m}}\right) + 1 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k+1})}_{1}$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{z_{m+1}}} - \frac{1}{\sqrt{z_m}}\right) \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} (z_k - z_{k+1})}_{z_{m+1} \le \sqrt{z_m}\sqrt{z_{m+1}}} + 1$$

$$\le \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sqrt{z_m} - \sqrt{z_{m+1}}\right) + 1 = 1 - \sqrt{x_m} + 1 = 2 - \sqrt{x_m} < 2$$

$\boxed{A8}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

(a) $f(x)\le M \quad \forall x$

(b) $\forall x,y\in\mathbb{R}$

$$f(xf(y))+yf(x)=xf(y)+f(xy)$$

$x=0 \qquad 0=yf(0)$

$f(0)=0$

$y=1 \quad f(xf(1))=xf(1)$

$f(1)=0$ oppure illimitato

$x=1 \qquad f(f(y))+0=f(y)+f(y)=2f(y)$

$f(\dots f(f(y))\dots)=2^n f(y) \qquad \Rightarrow f(y)\le 0 \quad \forall y$

simmetrizzo $\quad f(xf(y))+f(yf(x))=2f(xy)$

$x\ne 0 \quad x,\frac{1}{x} \qquad f(xf(\tfrac{1}{x}))+f(\tfrac{1}{x}f(x))=0$ nulli entrambi

$\quad\ \ \underset{0}{\parallel} \qquad\qquad \underset{0}{\parallel}$

$x\ne 0 \Rightarrow f\left(\frac{f(x)}{x}\right)=0$

se y è t.c. $f(y)=0 \qquad \boxed{0+yf(x)=0+f(xy)}$

$\boxed{f\equiv 0}$ è soluz $\qquad$ se uso $x: f(x)<0$

$\Rightarrow f(y)=0 \Rightarrow y\ge 0$

$\frac{f(x)}{x}\ge 0$

$$\frac{f(x)^2}{x}=f(f(x))=2f(x)$$

$f(x)=0,\ 2x$

$\forall x: f(x)\ne 0 \quad \Rightarrow f(x)=2x \qquad \Rightarrow x\le 0 \qquad \Rightarrow f\equiv 0$ sui positivi

$x : f(x) = 0 \Rightarrow x \geq 0 \qquad \forall x < 0 \quad f(x) = 2x$

Verifico !!!

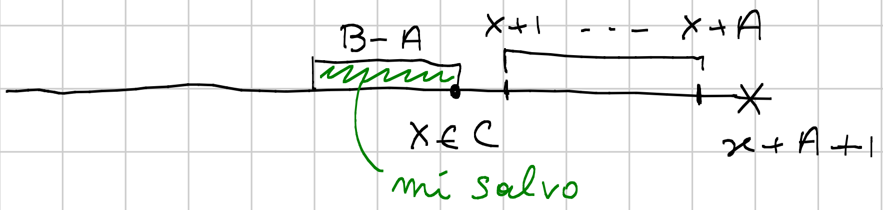
Due soluzioni : $f(x) = 0$

$f(x) = \min(0, 2x)$

Pre IMO 2017 – COMBINATORIA Mattina

Note Title 25/05/2017

C1

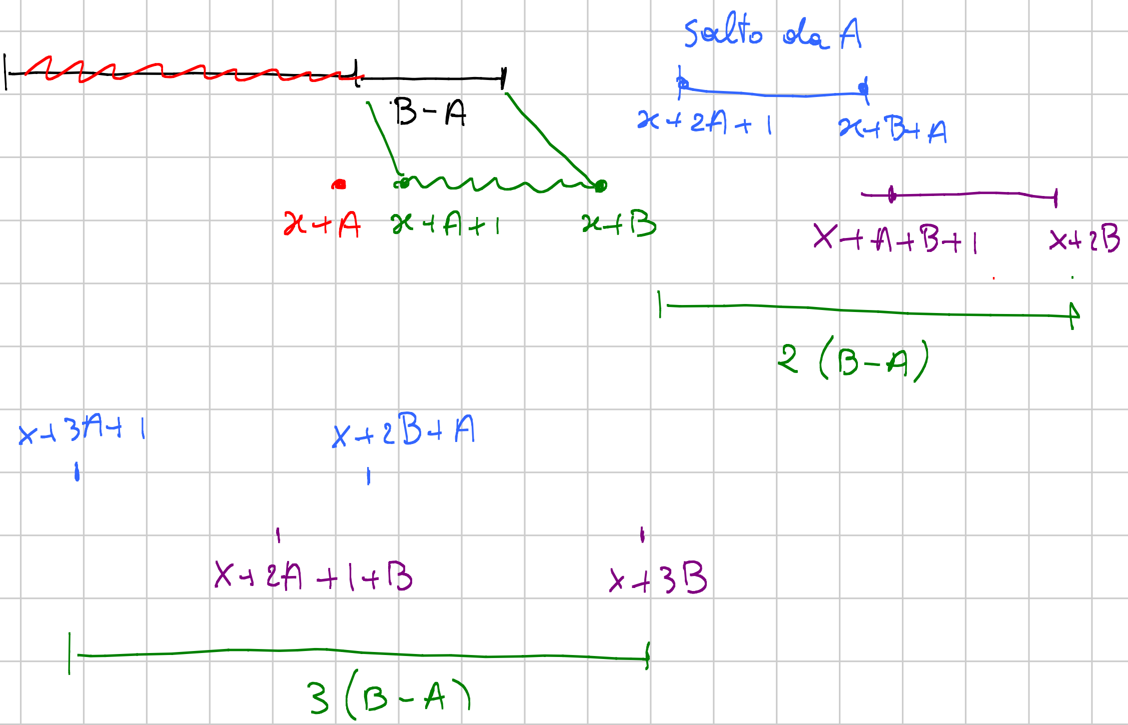


$x + B \le y + 1$

↑ è almeno $x + A + F$

Condizione: $F > B - A$

Abbiamo appena fatto un salto:



Intervalli raggiungibili: $[x + kA + 1,\ x + kB]$

Gap fra due intervalli: $(k+1)A - kB + 1$

Se questo è ≤ 1, l'intervallo k-esimo e il $(k+1)$-esimo si attaccano

Il minimo k per cui succede è

$$(k+1)A \leq kB$$

$$A \leq k(B-A)$$

$$k \geq \left\lceil \frac{A}{B-A} \right\rceil$$

Mi salvo al prossimo salto se

$$\underbrace{x + \left\lceil \frac{A}{B-A} \right\rceil A + 1}_{\substack{\text{primo punto}\\ \text{a dx del quale}\\ \text{posso visitare}\\ \text{tutto}}} \leq \underbrace{y - (B-A) + 1}_{\substack{\text{inizio del}\\ \text{prossimo}\\ \text{intervallo di}\\ \text{salvezza}}}$$

vorrei

$$y - x \geq \left\lceil \frac{A}{B-A} \right\rceil A + (B-A)$$

$$\| \qquad\qquad \geq$$

$$A+F \quad \text{impongo questa.}$$

Questo dimostra che $F = \left\lceil \frac{A}{B-A} \right\rceil A + (B-2A)$

basta. Bisogna mostrare che $F-1$ non funziona

* prendo tutti i buchi di lunghezza $F-1$

* $mA + nB \overset{?}{=} m'A + n'B$

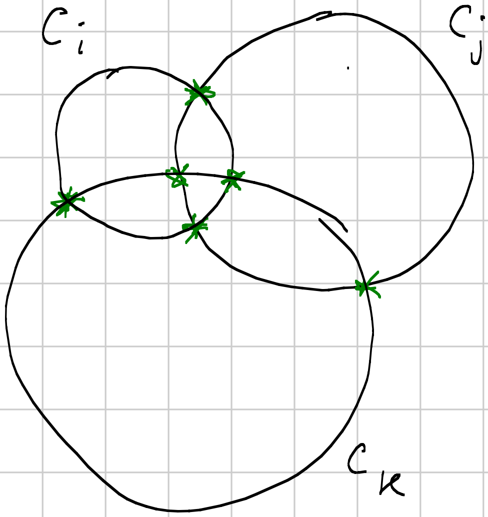
- caso $(A, B) = 1$
- $(m - m')A = (n' - n)B$

$$\Rightarrow n' - n \equiv 0 \ (A)$$

$$|n' - n| \geq A$$

$\ast$ Ad ogni buco si perde almeno una casella.

C2



Invece di scegliere una moneta scelgo

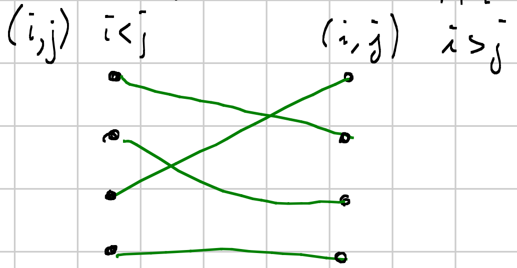
- una coppia di indici $\subseteq \{1, \dots, n\}$
- un ordinamento di questa coppia,

ovvero una coppia ordinata (i,j) in $\{1, \dots, n\}$.

Se uno dei due gioca (i,j), le mosse valide sono (k,l) non ancora giocate e tali che $\{k,l\} \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{i,j\}$

$n = 3$ è immediato (e vince A).

$\boxed{n \geq 4}$ Hope: magari vince B stabilendo cosa giocare semplicemente in funzione dell'ultima mossa di A.



Vorremmo: una bigezione tra le coppie ordinate e loro stesse tale che $(i,j) \longleftrightarrow (k,\ell)$

$\Rightarrow \{i,j\} \cap \{k,\ell\} = \emptyset$

LEMMA DEI MATRIMONI $B = \{r_1, \dots, r_n\}$

e $G = \{g_1, \dots, g_n\}$

Ogni r_i è associato ad un sottoinsieme delle G "che gli piacciono"

Vogliamo associare ad ogni r_i una g_j che gli piace, in modo che ragazzi diversi sposino ragazze diverse.

CONDIZIONE: comunque scelti k degli r_i esistono ALMENO k g_j che piacciono ad ALMENO uno di loro

---

Nel nostro caso, $B = \{ (i,j) \quad i<j \}$

$G = \{ (i,j) \quad i>j \}$

Siano $\underset{(i_1,j_1)}{\overset{}{r_1}}, \dots, \underset{(i_k,j_k)}{r_k} \in B$.

$r_1 = (i_1,j_1), \dots, r_k = (i_k,j_k)$

Caso 1: non ci sono 2 elementi i, j tali che ogni coppia contiene i o contiene j.

Ogni coppia in G va bene, perché non è possibile che abbia un elemento in comune con ognuno dei ragazzi.

Caso 2: tutti gli r sono del tipo $(1, j_k)$

Le ragazze che vanno bene sono $\binom{n-1}{2}$

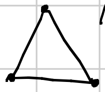
Vorremmo $\binom{n-1}{2} \geq \underbrace{\# \text{ragazzi}}_{\text{al più } n-1}$

Basta $\frac{(n-1)(n-2)}{2} \geq (n-1)$ OK per $n \geq 4$

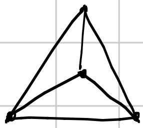
Caso 3: i ragazzi sono del tipo $(1, j_k)$ e $(2, j'_k)$. Quindi l'unica cosa che può succedere è che siano $(1,2)$; $(2,3)$; $(3,1)$.

Chiaramente almeno 3 ragazze vanno bene.
$((3,4); (4,1); (2,4))$

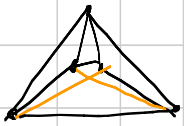
$\boxed{C3}$



$n=3$
max #NT $=3$

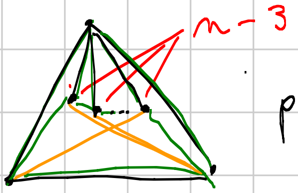


$n=4$ max $=6$



$n=5$ max $\doteq 8$

... in generale



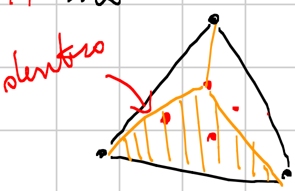
per n HOPE
max $= 2n-2$?!

Quindi so $\max(n) \geq 2n-2$.

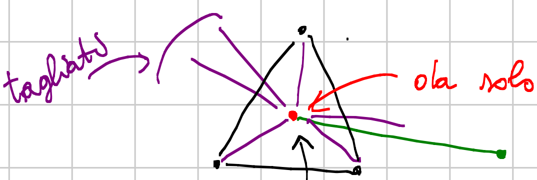
Voglio dimostrarlo. Prendo una configurazione da $\boxed{n \geq 5}$. (mi serve il passo base per $n=3,4$)

→ se la configurazione è un poligono convesso allora ha #NT $\leq n$.

ALTRIMENTI ho



ma anche (induttivamente)



Voglio togliere LUI.

→ se lui crea al più 2 non tagliati (al più 2 dei sono NT) cancello e ottengo che

$$\#NT \text{ nella conf. da } n \leq 2 + \max(n-1)$$
$$= 2 + 2(n-2)$$
$$= 2n - 2 \quad \checkmark$$

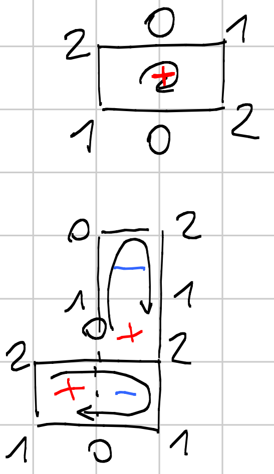
→ se tutti i / interni al triangolo sono NT. Togliendo il pto ho

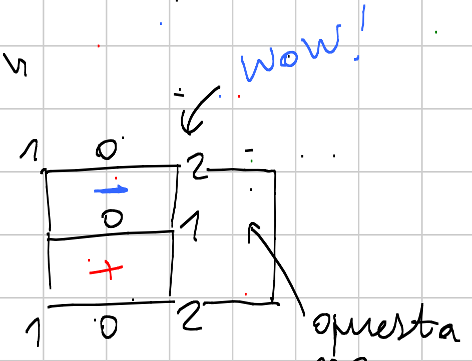
$$\#NT \text{ nella conf} \leq 3 + \max(n-1) - 1 \quad \checkmark$$

creato dal pto extra fuori nel caso in questione

→ ho dimostrato $\max(n) \leq 2n-2$. □

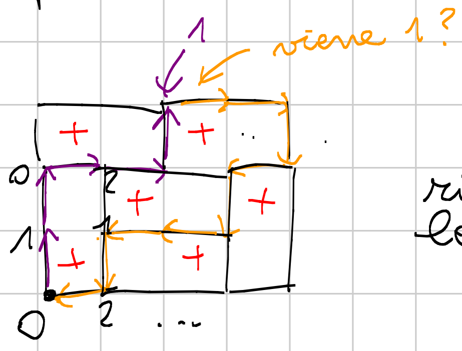
$\boxed{C4}$ coloro "mod 3"





questa non può essere colorata "bene" :(

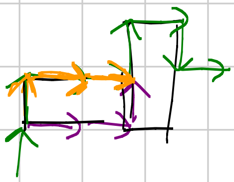
* la scacchiera si colora in + e − ("a scacchiera") e si assegnano così i "poli" alle tessere-calamita.



riempio secondo le calamite.

HOPE: lungo un percorso chiuso la somma dei "segni" che incontro è 0.

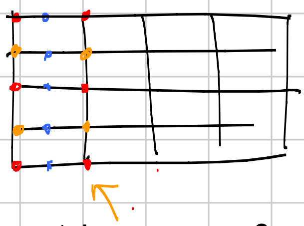
Facile per induzione sul # tessere dentro il percorso (ne tolgo una al bordo)



quindi posso sostituire → con → e togliere una tessera.

IDEA ALTERNATIVA:

* ogni tassellazione si raggiunge da



tramite una sequenza di "flip".

* coloro "bene" la tassellazione "facile"

* do una "ricetta" per aggiustare il colore quando flippo senza modificare i colori sul bordo (e mantenendo lo stesso tipo di colorazione).

PreIMO 2017 - COMBINATORIA Pomeriggio

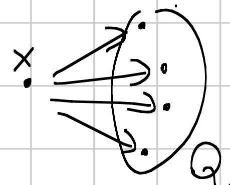
Note Title 25/05/2017

$\boxed{C5}$

$A, B \quad A\cap B=\emptyset$ t.c. "$A \Rrightarrow B$"

→ quante quadruple? $\binom{60}{4} = \frac{60\cdot 59\cdot 58\cdot 57}{24}$

→ dico che $x\in V(G)$ copre una quadrupla Q se



TESI: posso trovare 4 elementi di $V(G)$ che coprano la quadrupla B; scelgo questi come A.

Come lo dimostro? Pigeonhole.

→ $x\in V(G)$ copre $\binom{d_{out}(x)}{4}$ quadruple.

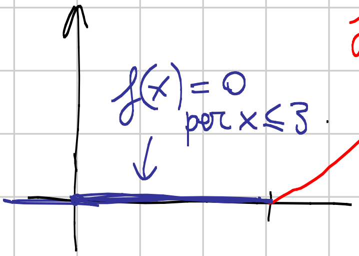
Ma $\frac{\sum_{x\in V(G)} \binom{d_{out}(x)}{4}}{\binom{60}{4}} \overset{?}{>} 3$, quindi la tesi.

SÌ!

So che $\sum_{x\in V(G)} d_{out}(x) = |E(G)| = \binom{60}{2}$

Applico Jensen su questa funzione:

$f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$ per $x>3$



$$\frac{*}{60} = \frac{\sum_{x\in V(G)} f(d_{out}(x))}{60\binom{60}{4}} \geq \frac{f\left(\frac{\overbrace{\sum d_{out}(x)}^{\binom{60}{2}}}{60}\right)}{\binom{60}{4}} = $$

$$> \frac{3}{60} \to \text{ok!}$$

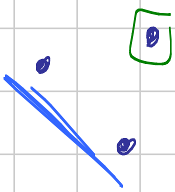
$\square$

C6 Alberto difende un ordinamento *

Barbara cerca di scoprirlo

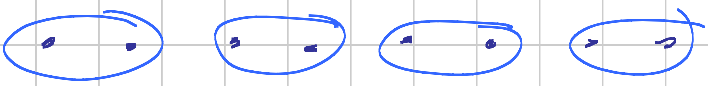
* 20 oggetti

Sol: Si inizia con la difesa



scegliere delle coppie fortunate ~~da difendere~~ ad ogni costo

Per esempio scelgo le coppie in questo modo



quindi: $\forall$ richiesta di Barbara
saranno coinvolte almeno 2 coppie
quindi posso sempre evitare di rompere
le coppie

Abbiamo $|I'| \leq 10$

Per l'altro bound devo cercare delle informazioni

B chiede tutte le terne

Caso 1: $\forall$ coppia, la so ordinare
e quindi so tutto!

Caso 2: $\exists$ coppia (a,b) "fortunata" (di cui non
so dire l'ordine)

$\Rightarrow \forall x \neq a,b$ vale che

$$\begin{matrix} x > a \\ x > b \end{matrix} \quad \vee \quad \begin{matrix} x < a \\ x < b \end{matrix}$$

$$\underbrace{\text{più piccoli}}_{*} \leq a,b \leq \underbrace{\text{più grandi}}_{*}$$

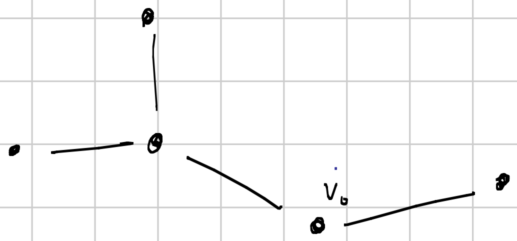
* queste situazioni sono uguali a quella
generale, ma con meno oggetti

Formalmente "Per induzione su n, se ho n oggetti, ne scopro $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ in ordine".

Oppure faccio veramente induzione su $2n$ oggetti, scopro l'ordinamento di $|n-1|$ ~~tra gli~~ altri $2n-2$ (ip. ind.) e aggiungo "a" tra

Quindi $|I'| \geq 10$

C7 C'è un albero

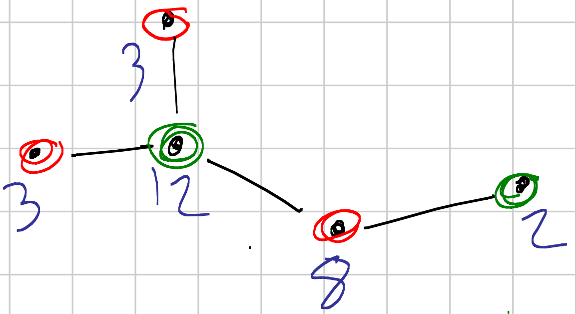


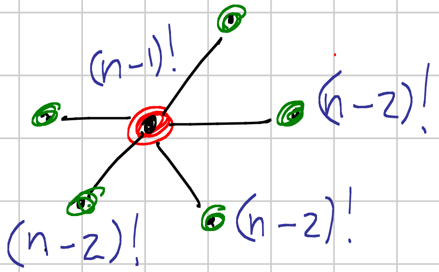
$\forall$ vertice v conto le enumerazioni decrescenti che partono da lui. Sia $f(v)$

Ip: $2016 \mid f(v) \quad \forall v \in V \setminus \{v_0\}$

Tesi: $2016 \mid f(v_0)$.

Sol:





$$(n-1)! = (n-2)! + (n-2)! + \dots + (n-2)!$$

$$f(\text{centrale}) = \sum_{\text{foglia}} f(\text{foglia})$$

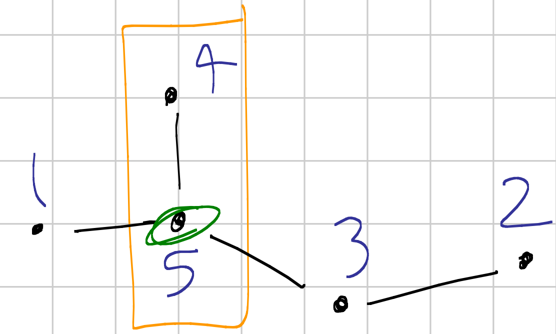
Claim: bipartiziono l'albero e voglio

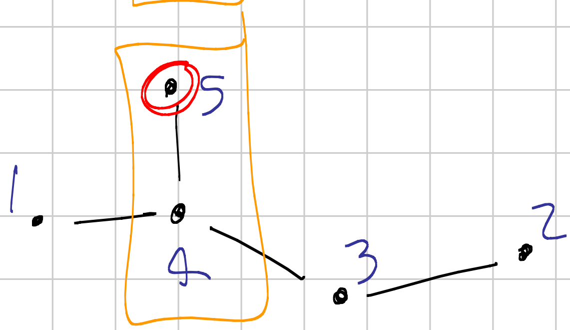
$$\sum_{\text{rossi}} f(v) = \sum_{\text{verdi}} f(v)$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$\Big|$ {enumerazioni decr. che hanno radice in un rosso} $\Big|$ $\qquad$ " verde

esibisco una bigezione tra i 2 insiemi

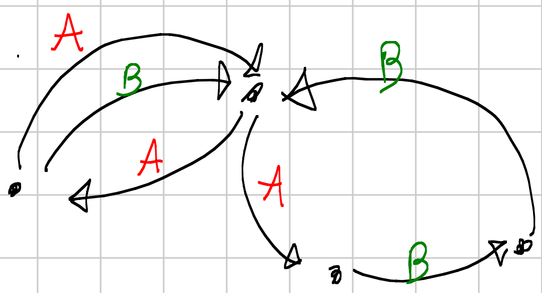




gli altri stanno fermi e non fanno danni

C 8

C'è un grafo orientato ed etichettato

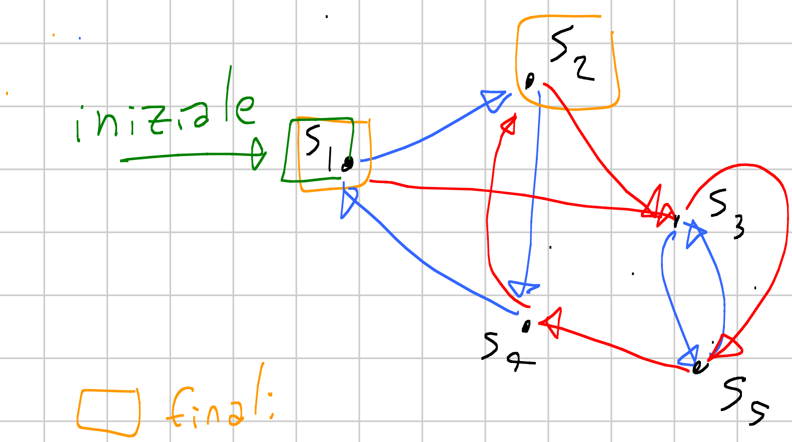


Ip: tutte le parole lunghe 2^n sono implementabili

Th: tutte le parole finite sono implementabili

Automi a stati finiti e Pumping Lemma

Def: ASF è un grafo di "stati" in cui



- c'è uno stato iniziale
- ci sono degli stati finali

C'è anche Σ un alfabeto

$\square$ finali

$\Sigma = \{A, B\}$

· e una "funzione di transizione"

$$F : S \times \Sigma \longrightarrow S$$
$$(s, \ell) \longmapsto \tilde{s}$$

Data una parola con lettere $\subseteq \Sigma$
posso camminare lungo il grafo di stati

Thm (Pumping Lemma):

Supponiamo che ci sia ω una parola di lunghezza $> |S|$ accettata dall'ASF,

allora $\omega = x\,y\,z$ dove x, y, z sono parole

y non è la parola nulla
e xy ha lunghezza $\leq |S|+1$

e anche la famiglia di parole $x\,y^n\,z$
è accettata dall'ASF $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Dim: Per pigeonhole, entro la $|S|+1$-esima lettera vedo 2 volte uno stesso stato s'
quindi divido ω in questo modo

$$\omega = X \, Y \, Z$$

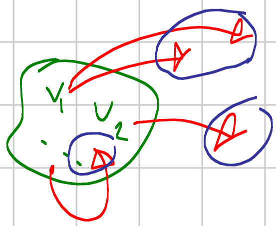
s' s'

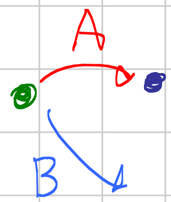
ora tutte le stringhe $xy\ldots yz$ sono accettate.

Sol del C8.a

Oss: il 2^n mi ricorda i sottoinsiemi dei vertici

Costruisco un nuovo grafo: i vertici sono i sottoinsiemi di quella di partenza e pongo questi archi.





Oss: c'è lo stato iniziale (tutto) e $\forall$ stato c'è esattamente una freccia con la A e una con la B

L'ipotesi diventa questa: per ogni parola di lunghezza 2^n, finisco in un vertice $\neq \emptyset$

1° modo: mostro la tesi per induzione sulla lunghezza della parola e seguo un ragionamento come prima.

2° modo: Definisco l'ASF con il grafo di prima dove {tutto} è lo stato iniziale, $\emptyset$ è l'unico stato non finale

ora una parola lunga $k+1$ si spezza in 3 parti e posso levare quella intermedia per ottenerne una valida.

3° modo: Per assurdo ...

C8.b Qui il grafo è non diretto ma la lunghezza che conosco è solo $2n$.

Sol:

Oss. non è vero che

$\_\_\omega\_\_AA$ è una delle più corte implementabili, altrimenti

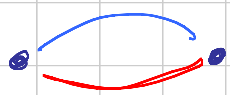
ωA lo è, torno indietro

al penultimo vertice e ottengo ωAA

Oss: neanche $\omega ABBA$ è una delle più corte non implementabili

Spero che saper fare $ABAB\ldots AB$ mi basti per fare tutto.

Oss: esistono dei grafi facili con i quali implemento tutto:



Se ho un sottografo per cui da ogni suo vertice, rimango dentro con passi del tipo A o B, allora implemento tutte le parole.

Ora prendiamo la parola $(AB)^n = \underbrace{AB\ldots AB}_{n \text{ volte}}$

adesso osservo che vedo 3 volte (almeno) lo stesso vertice (pigeonhole)

$AB|AB\,A|B \ldots\ldots AB|AB$

3 volte lo stesso

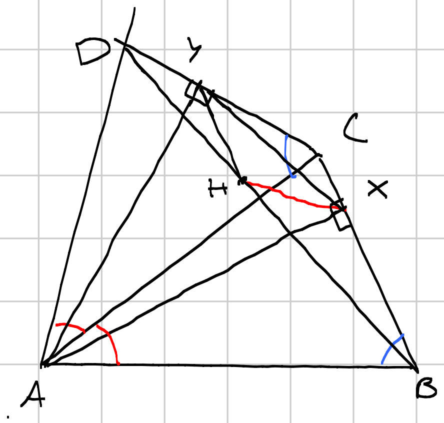
c'è una sottostringa pari

ora voglio mostrare che i vertici visitati qui formano un grafo del tipo detto

infatti ognuno dei vertici vede una A e una B compreso quello iniziale (e finale).

PreIMO17 - Geometria - Mattina

Note Title 22/05/2017



Hp: $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$

$\widehat{CBA} = \widehat{DCA}$

$\triangle ABC \sim \triangle ACD$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{CX}{XB} = \dfrac{DY}{YC}}$

$AX \perp BC$

r perp per Y ad AX $\quad r \parallel BC$

$H = BD \cap r$: Talete con r e BC

$\dfrac{DH}{HB} = \dfrac{DY}{YC} = \dfrac{CX}{XB} \Rightarrow HX \parallel DC \Rightarrow HX \perp AY$

$\Rightarrow H$ è ortocentro di AXY

---

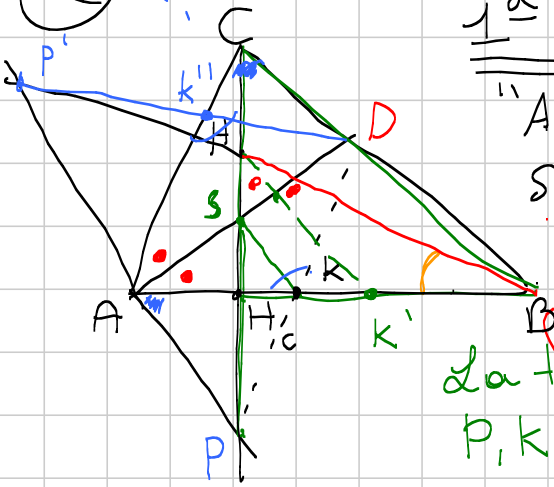
(2) Th $HK \perp AD$

1^a sol.

"Al contrario"

Sia K' l'intersezione della perpendicolare ad AD per H con AB

La tesi è vera sse P, K', D allineati.



Per dimostrare una cosa del genere...
Menelao su CH_cB
Scriviamo i rapporti

$\frac{CP}{PH_c} = ?$

$\frac{CP}{\sin(\alpha+\gamma)} \underset{\text{seni}}{\overset{ACP}{=}} \frac{AP}{\cos\alpha}$

$\frac{PH_c}{\sin\gamma} \underset{\text{seni}}{\overset{APH_c}{=}} AP$

$\Longrightarrow \frac{CP}{PH_c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma\cos\alpha}$

$\frac{BD}{DC} \overset{\text{th bisettrice}}{=} \frac{AB}{AC} \underset{\text{seni}}{=} \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$

$\frac{H_cK'}{K'B} \underset{\text{bisettrice}}{=} \frac{HH_c}{HB} = \cos\alpha$

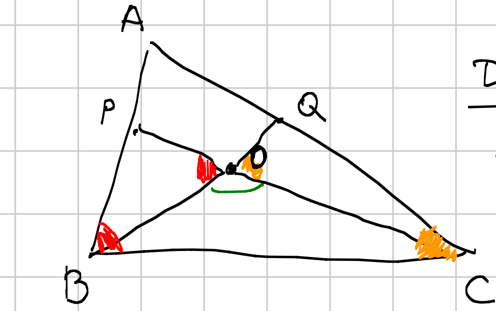
Osservo $H_cHK' = \cdot = \frac{\alpha}{2}$. Poiché $H_c\hat{H}B = \alpha$
allora $K'HB = \cdot = \frac{\alpha}{2}$

Infine $\frac{CP}{PH_c} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{H_cK'}{K'B} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \cdot \cos\alpha = 1$ ☒

Idea 2 $\quad HK \perp AD \Longleftrightarrow H$ ortocentro di $ASK \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow SK \parallel BC \Longleftrightarrow \frac{PK}{PD} = \frac{PS}{PC}$ ... ☒

Idea 3 Simmetrizzare la configurazione!
Sia P' intersezione di BH con AP
Sia $K'' := P'D \cap AC$.
Per Pappo $K''HK$ allineati
Voglio che $K''K \perp AD$ e per farlo
basta che $A\hat{K''}D = A\hat{K}D$ ← Angoli + potenze ☒

Problema 3



Th: Simmetrica di BC wrt PQ tange $\odot APQ$

Dim.

$APOQ$ è ciclico? sì.

$$\left.\begin{aligned} B\hat{O}C &= 2\alpha \\ P\hat{O}B &= \beta \\ Q\hat{O}C &= \gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow P\hat{O}Q = \pi - \alpha$$

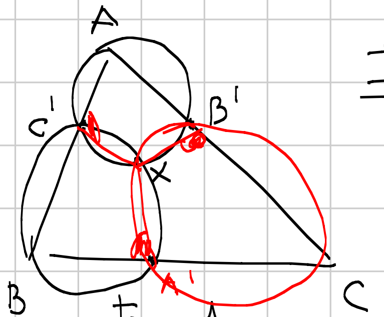
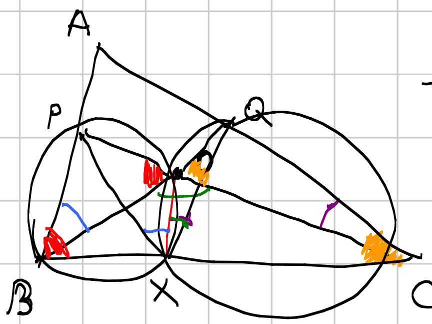


Fig. 1

Idea: Completare il disegno di Miquel

Se ho Fig. 1, allora $\odot BC'X$ e $\odot B'CX$ si intersecano su BC.

Dim. sul disegno costruendo $A' = (\odot BC'X \cap BC) \setminus \{B\}$



Idea 2 Faccio una simmetria rispetto a PQ.

Domanda: Dove va $\odot APQ$?

Risposta: Va in $\odot PXQ$

Perché?: Questa cosa è vera se e solo se $P\hat{X}Q = P\hat{A}Q$.

$$P\hat{X}Q = P\hat{X}O + O\hat{X}Q = P\hat{B}O + O\hat{C}Q = \pi/2 - \gamma + \pi/2 - \beta = \alpha$$

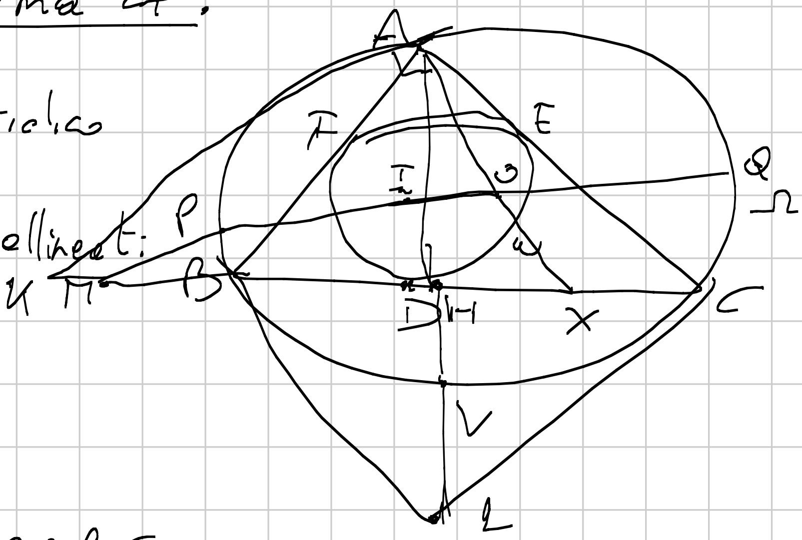
Fine Th $\Leftrightarrow$ BX tange $\odot PXQ$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B\hat{X}P = X\hat{Q}P$

Calcoliamoli: $B\hat{X}P = B\hat{O}P = \beta$

$$X\hat{Q}P = X\hat{Q}O + O\hat{Q}P = X\hat{C}O + O\hat{A}P = \pi/2 - \alpha + \pi/2 - \gamma = \beta. \blacksquare$$

Problema 4:



$PQHX$ ciclico
$\Updownarrow$
A, D, L allineati

$M = PQ \cap BC$

$MP \cdot MQ = MB \cdot MC$ perché $BCQP$ ciclico

$MP \cdot MQ = MX \cdot MH \iff HXQP$ ciclico

$HXQP$ ciclico $\iff MB \cdot MC = MX \cdot MH$

$\odot ABC$ e $\odot AXH \implies M \in$ asse radicale

se M e N soddisfano, allora $M, N, A \in$ asse radicale

$\implies$ allineati, assurdo!

Sia $K = AA \cap BC$

vogliamo dimostrare che $KB \cdot KC = KX \cdot KH$

$\iff KX \cdot KH = KA^2 (= KB \cdot KC)$

$\iff AK$ tange $\odot AXH$

$K\hat{A}X = \pi/2$ e $AFX = \pi/2$ perché AH altezza

Dunque segue la tangenza.

Tesi: A, D, L allineati $\iff K, I, O$ allineati

Dim 1

$K \overset{?}{=} Pol_\Omega(AL) \iff AL = Pol_\Omega(K)$

$A \in Pol_\Omega(K)$ in quanto AK tange Ω

$L \in Pol_\Omega(K) \iff K \in Pol_\Omega(L) = BC$ vero

Abbiamo dimostrato che $K = Pol_\Omega(AL)$
$\Rightarrow KO \perp AL$

$(\Rightarrow)$ Sia V $AD L \cap \Omega$
$ABVC$ armonico poiché AL simmediana
$(B, C, A, V) = -1$

Def: $(A, B, C, D) = \dfrac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}}$

Proiettando da A lungo BC si ottiene che
$(B, C, K, D) = -1$

$K' := EF \cap BC$ dove E, F punti di tangenza di ω con AC e AB risp..
$(B, C, K', D) = -1$ (lasciata al lettore)

Data l'iniettiva della funzione birapporto fissati tre punti si ha che $K \equiv K'$.
Allora $K \in EF$.
$K \in Pol_\omega(AD) \Leftrightarrow A, D \in Pol_\omega(K)$
$D \in Pol_\omega(K)$ banalmente poiché $KD \equiv BC$ tange ω
$A \in Pol_\omega(K) \Leftrightarrow K \in Pol_\omega(A) = EF$ poiché AE e AF tangono ω.
$AD = Pol_\omega(K) \Rightarrow KI \perp AD$
avevamo che $KO \perp AL$ e $AD \equiv AL$.
Segue che K, O, I allineati.

$(\Leftarrow)$ $KO \perp AL \Rightarrow KI \perp AL$.
$V = AL \cap \Omega$

$(B, C, A, V) = -1 \overset{\text{da } A}{\Longrightarrow} (AB, AC, AK, AL) = -1$

Supponiamo per assurdo che K non sia il polo di AL rispetto ad ω. Sia $K' = Pol_\omega(AL)$.

$K'I \perp AL$, I centro di ω.

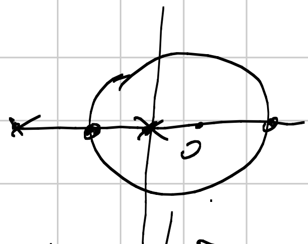
$\Rightarrow K' \in KI$.

Ora verifichiamo che $K' \in EF$.

$EF = Pol_\omega(A)$. Però $A \in Pol_\omega(K') \Rightarrow K' \in Pol_\omega(A)$

$\Rightarrow K' \in EF$

Allora $(AF, AE, AK', AL) = -1$



Sempre per l'iniettività della funzione birapporto fissati 3 argomenti, si ha $AK' \equiv AK \Rightarrow K' \equiv K$

$\Rightarrow K = Pol_\omega(AL) \Leftrightarrow AL = Pol_\omega(K)$

KD tange ω $D \in Pol_\omega(K)$

$D \in AL \Rightarrow A, D, L$ allineati. ∎

Dim 2:

Coordinate baricentriche con riferimento ABC

$BC = a \quad AC = b \quad AB = c \qquad \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2} = S_A$ e cyc

$D = (0, a+b-c, a+c-b)$

$a^2 z + c^2 x = 0 \quad$ e $\quad a^2 y + b^2 x = 0$

$\Rightarrow L = (-a^2, b^2, c^2)$

$AK: b^2 z + c^2 y = 0 \qquad BC: x = 0$

$K := AK \cap BC \qquad K = (0, b^2, -c^2)$

$I = (a, b, c) \qquad O = (a^2 S_A, b^2 S_B, c^2 S_C)$

A, D, C allineati $\iff \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+b-c & a+c-b \\ -a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = 0$

$\iff c^2(a+b-c) = b^2(a+c-b)$

$\iff (b-c)(b^2+c^2-ac-ab) = 0 \overset{b\neq c}{\iff} b^2+c^2 = ab+ac$

O, I, K allineati $\iff \det\begin{pmatrix} 0 & b^2 & -c^2 \\ a & b & c \\ a^2S_A & b^2S_B & c^2S_C \end{pmatrix} = 0$

$\iff a^2b^2cS_A - ab^2c^2S_B - ab^2c^2S_C + a^2bc^2S_A = 0$

$\iff abS_A - bcS_B - bcS_C + acS_A = 0$

$\overset{S_B+S_C=a^2}{\iff} bS_A + cS_A = abc$

$\iff (b+c)(b^2+c^2-a^2) = 2abc$

$\iff b^3+c^3+b^2c+bc^2-a^2b-a^2c-2abc = 0$

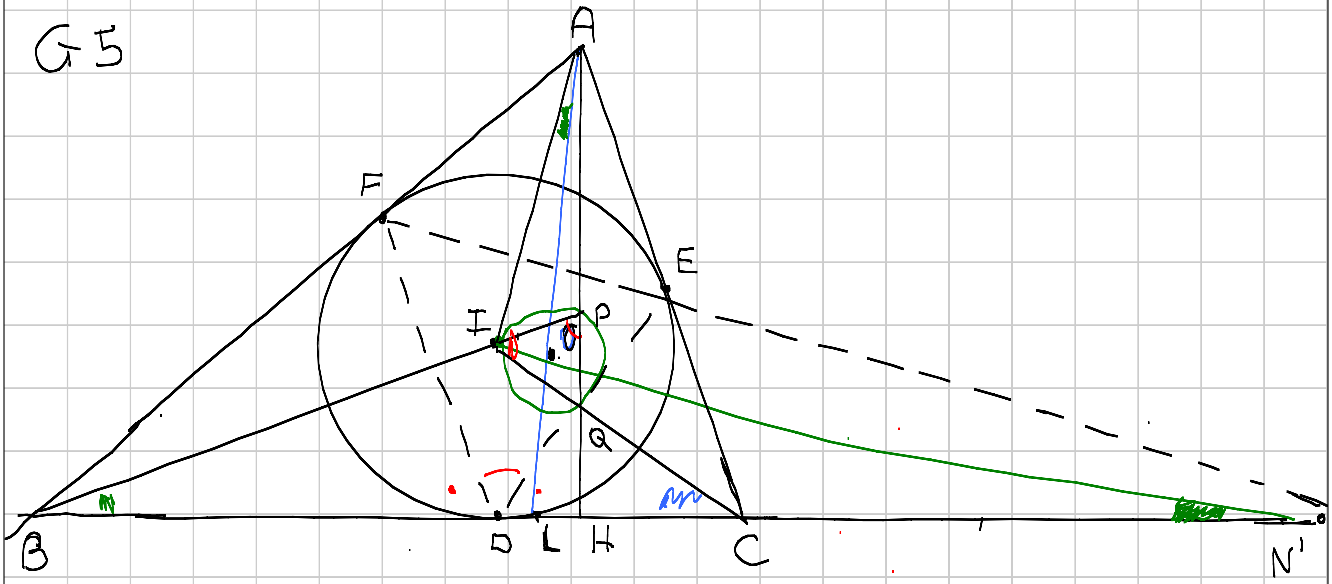
$\iff (b^2+c^2-ab-ac)(a+b+c) = 0$

$\overset{a+b+c>0}{\iff} b^2+c^2 = ab+ac \iff A, D, C$ allineati $\blacksquare$

PreIMO 2017 - Geometria Pomeriggio

Note Title 5/22/2017

G5

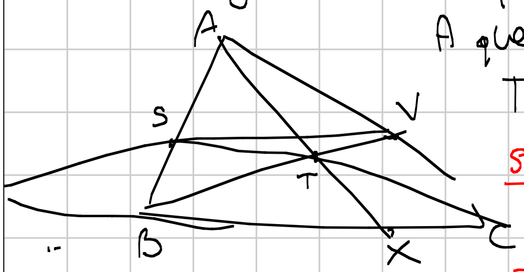


Th Preso $N \in BC$ t.c. A, I, L, N ciclico, allora vale $\frac{BD}{DC} = \frac{BN}{NC}$ (*)

Dim (*) $\iff (B, C; D, N) = -1$. Chi è $N \in BC$ t.c. valga (*)? Risposta: N sarà $EF \cap BC$.

A questo punto sia $N' := EF \cap BC$.

Th $\iff A, I, L, N'$ ciclici $\leftarrow$ [STEP 1]



STEP 2 Chi sono gli angoli di IPQ?

$P\hat{I}Q = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$

$I\hat{P}Q = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$

$P\hat{Q}I = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$

Noto che $F\hat{D}E = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$ e analoghe $\Rightarrow$

$\Rightarrow I\hat{P}Q \sim D\hat{E}F$ [STEP 2]

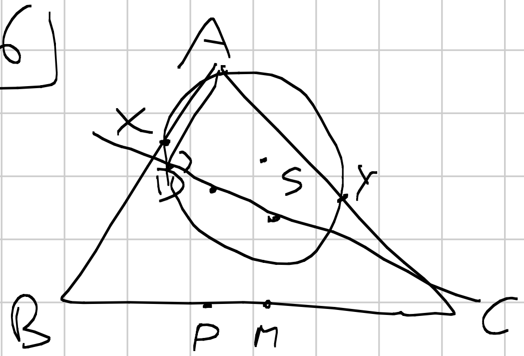
AI tange $\odot IPQ \iff A\hat{I}P = I\hat{Q}P$. [STEP 3]

μ_a $A\hat{I}P = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = I\hat{Q}P$.

Come procede la dim? STEP 1, STEP 2 $\wedge$ STEP 3

Conclusione: STEP 2 $\wedge$ STEP 3 $\xRightarrow{\text{simili}}$ $I\hat{A}O = I\hat{N'}D \Rightarrow A, I, L, N'$ ciclico $\xRightarrow{\text{STEP 1}}$ Th.

Problema 6



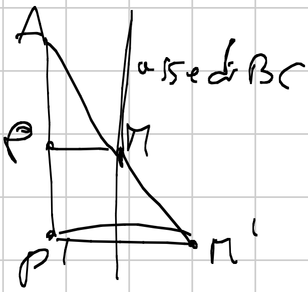
Omotetia di centro A e fattore 2

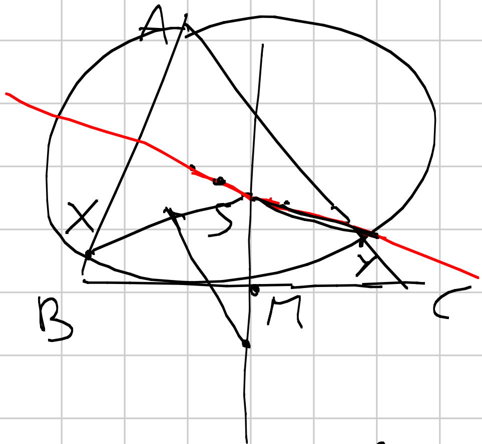
$S \mapsto S' \in OH$

$X \mapsto X' = 2X - A$ $\quad$ Y analogo

l'asse di PM $\mapsto$ asse di BC

$M \mapsto 2M - A$





Complessi con $\odot ABC$ circonferenza unitaria

$$\frac{z-o}{\bar z - \bar o} = \frac{h-o}{\bar h - \bar o} \qquad O = 0 \quad h = a+b+c$$

$$\bar a = \frac{1}{a} \quad \text{e cyc}$$

$$OH: \frac{z}{\bar z} = \frac{\sum a}{\sum \frac{1}{a}} \qquad OH: \bar z = z \cdot \frac{\sum ab}{abc \sum a}$$

$\bar{s} = s\dfrac{\sum ab}{abc\sum a} \qquad \bar{s}\, abc\sum a = s\sum ab$

T pt medio AX $\qquad ST \perp AB$

$\dfrac{s-t}{\bar{s}-\bar{t}} = -\dfrac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = ab \qquad s-t = ab\bar{s} - ab\bar{t} \quad (1)$

$T \in AB \qquad \dfrac{a-t}{\bar{a}-\bar{t}} = \dfrac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -ab$

$a - t = -b + ab\bar{t} \qquad ab\bar{t} = a + b - t \quad (2)$

$(1)+(2) \Rightarrow x = 2t - a = b + s - ab\bar{s}$

Analogamente $\quad y = c + s - ac\bar{s}$

Tesi $\Leftrightarrow$ asse XS $\cap$ asse BC simm in b e c.

asse BC passa per M e O

$\dfrac{z-0}{\bar{z}-\bar{0}} = \dfrac{m-0}{\bar{m}-\bar{0}} \qquad m = \dfrac{b+c}{2}$

asse BC: $\dfrac{z}{\bar{z}} = bc \qquad z = \bar{z}bc$

asse SX : $(z-x)(\bar{z}-\bar{x}) = (z-s)(\bar{z}-\bar{s})$

$z(\bar{s}-\bar{x}) + \bar{z}(s-x) = s\bar{s} - x\bar{x}$

$\bar{z}\,(ab\bar{s} - b) + z\left(\dfrac{s}{ab} - \dfrac{1}{b}\right) = s\bar{s} - (b + s - ab\bar{s})\left(\dfrac{1}{b} + \bar{s} - \dfrac{s}{ab}\right)$

$\bar{z}(ab\bar{s} - b) + z\left(\dfrac{s}{ab} - \dfrac{1}{b}\right) = -1 - b\bar{s} - \dfrac{s}{b} + \dfrac{s}{a} + a\bar{s} - s\bar{s}$
$\qquad + ab\bar{s}^2 + \dfrac{s^2}{ab}$

Moltiplico per $abc^2(\sum a)^2$ e volendolo intersecare con OM uso $\bar{z}bc = z$.

$z\left(-abc(\sum a)^2 + sa\sum a\sum ab\right) + z\,(s-a)\left(c^2(\sum a)^2\right) =$

$= -abc^2(\sum a)^2 - bc(\sum a)(\sum ab)s - sac^2(\sum a)^2 +$

$$+ac\sum' a\sum' ab\, S + Sbc^2\left(\sum' a\right)^2 + S^2\left(\sum' ab\right)^2 + c^2\left(\sum' a\right)^2 S^2 +$$
$$- S^2 c\sum a\sum' ab$$

$$z\left[S\left(\sum' a\right)\left[a\sum' ab + c^2\sum' a\right] - \left(\sum' a\right)\left(abc\sum' a + ac^2\sum' a\right)\right]$$

$$a\sum' ab + c^2\sum' a = (b+c)(a^2+ac+c^2)$$

$$z(b+c)\sum' a\left[S(a^2+ac+c^2) - \left(\sum a\right)ac\right]$$

$$\left(\sum' ab\right)^2 + c^2\left(\sum' a\right)^2 - c\sum a\sum ab = (a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)$$

$$-bc\sum' a\sum' ab - ac^2\left(\sum' a\right)^2 + ac\sum' a\sum' ab + bc^2\left(\sum' a\right)^2 =$$
$$= \left(\sum' a\right)(a-b)\left(c\sum' ab - c^2\sum' a\right) = c\left(\sum' a\right)(a-b)(ab - c^2)$$

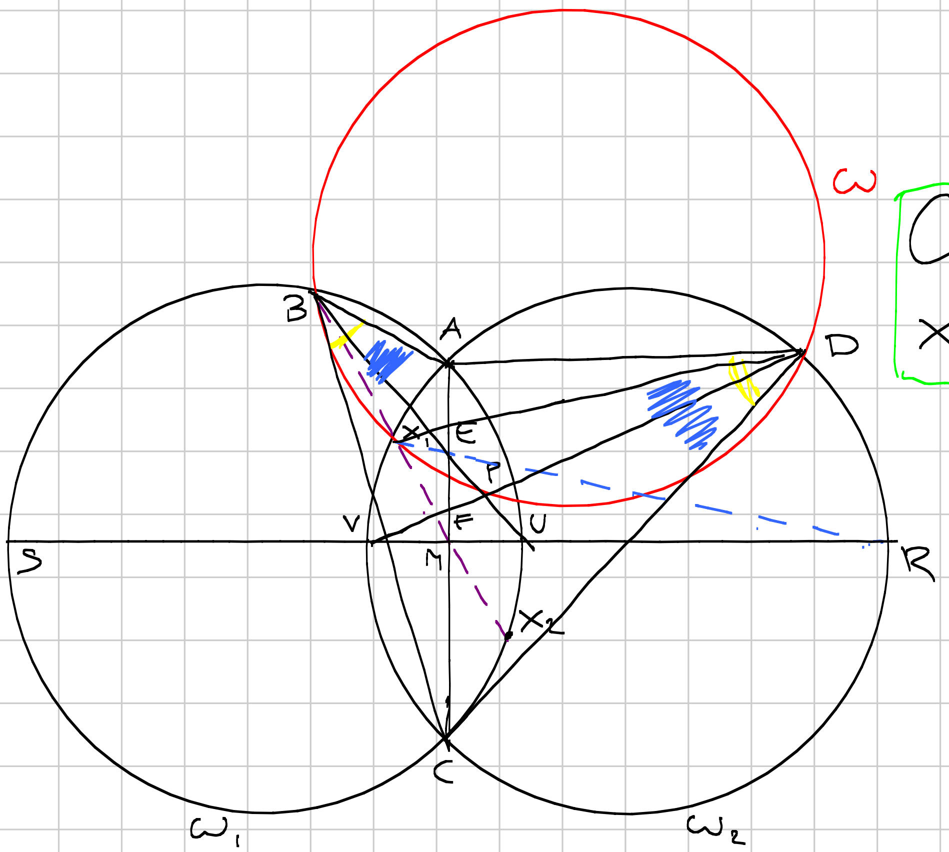
$$z \text{ sym} \overset{\text{in } b \text{ e } c}{\iff} z(b+c)\sum' a \text{ sym}$$

$$\underbrace{S^2(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)}_{0} + \underbrace{S\,\underline{\quad} + \underline{\quad}}_{bc\sum' a\left(S(a^2+ac+c^2) - ac\sum' a\right)} \quad \left|\ \frac{S(a^2+ac+c^2) - ac\sum' a}{S(b^2+bc+c^2)}\right.$$

$$z(b+c)\sum' a = S(b^2+bc+c^2) + bc\sum' a$$

Simmetrica $\Rightarrow$ Tesi!

Note Title 5/22/2017



Claim:
$X \in \odot(\triangle ADC)$

Supponiamo vero il Claim.

$X_2 = BM \cap \odot(ABC)$ $(\neq B)$

BM e' mediana in $\triangle ABC$

$$\frac{AM}{\sin\varphi} = \frac{BM}{\sin\widehat{BAC}}$$

$$\boxed{\frac{AM}{BM} = \frac{\sin\varphi}{\sin\widehat{BAC}}} \qquad \boxed{\frac{CM}{BM} = \frac{\sin\theta}{\sin\widehat{ACB}}}$$

$AM = CM$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} = \frac{\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{BC}{AB} \qquad \frac{AX_2}{CX_2} = \frac{BC}{AB} \qquad \begin{array}{l} AX_1 = CX_2 \\ CX_1 = AX_2 \end{array}$$

$$\frac{AX_1}{CX_1} = \frac{AB}{BC} \qquad \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} \quad (\text{T d bisettrice})$$

Dimostriamo il claim

Definiamo $X_1 = \omega \cap \omega_1$

TS: B, X_1, M allineati

$\Longleftrightarrow$ (Simmetria centrale in M)

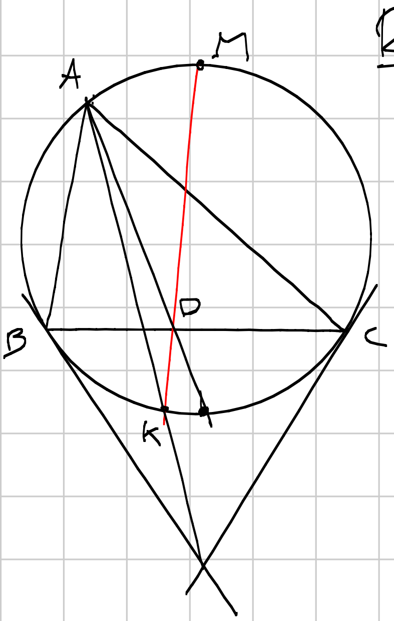
$$\widehat{ABX_1} = \widehat{X_1DC}$$

$$\widehat{BPD} = 2\pi - \alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2} = 2\pi - \alpha - \beta$$

$$\|$$

$$\widehat{BX_1D}$$

$$\widehat{X_1BA} + \cancel{\alpha} + \underbrace{\widehat{ADX_1}}_{\cancel{\beta} - \widehat{X_1DC}} + \underbrace{\widehat{BX_1D}}_{\cancel{2\pi} - \cancel{\alpha} - \cancel{\beta}} = \cancel{2\pi}$$

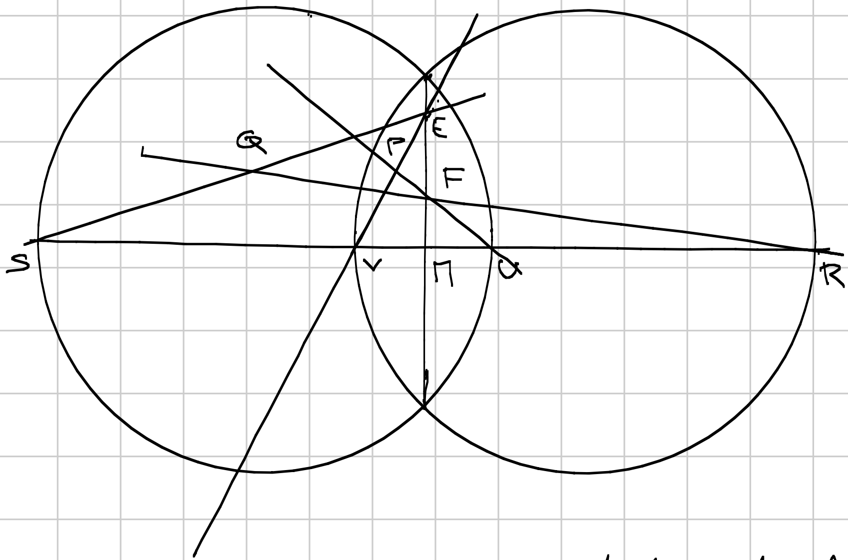


Ricordo

$$\frac{AB}{AC} = \boxed{\frac{BK}{KC} = \frac{BD}{DC}}$$

TA bisettrice di $\widehat{BKC}$

$\Rightarrow$ Tesi



$E = A_1 \quad V = A_2 \quad S = A_3 \quad A_1A_2 \cap A_4A_5 = P$

$F = A_4 \quad U = A_5 \quad R = A_6 \quad A_2A_3 \cap A_5A_6 = \,?$

$A_3A_4 \cap A_6A_1 = Q$

$C: xy = \alpha$ $\boxed{\lim_{\alpha \to 0}}$ $\alpha > 0$

r_1 $x = x_U \cap C$ P_1 $P_1P_2 \parallel P_3P_4$

$x = x_V \cap C$ P_2

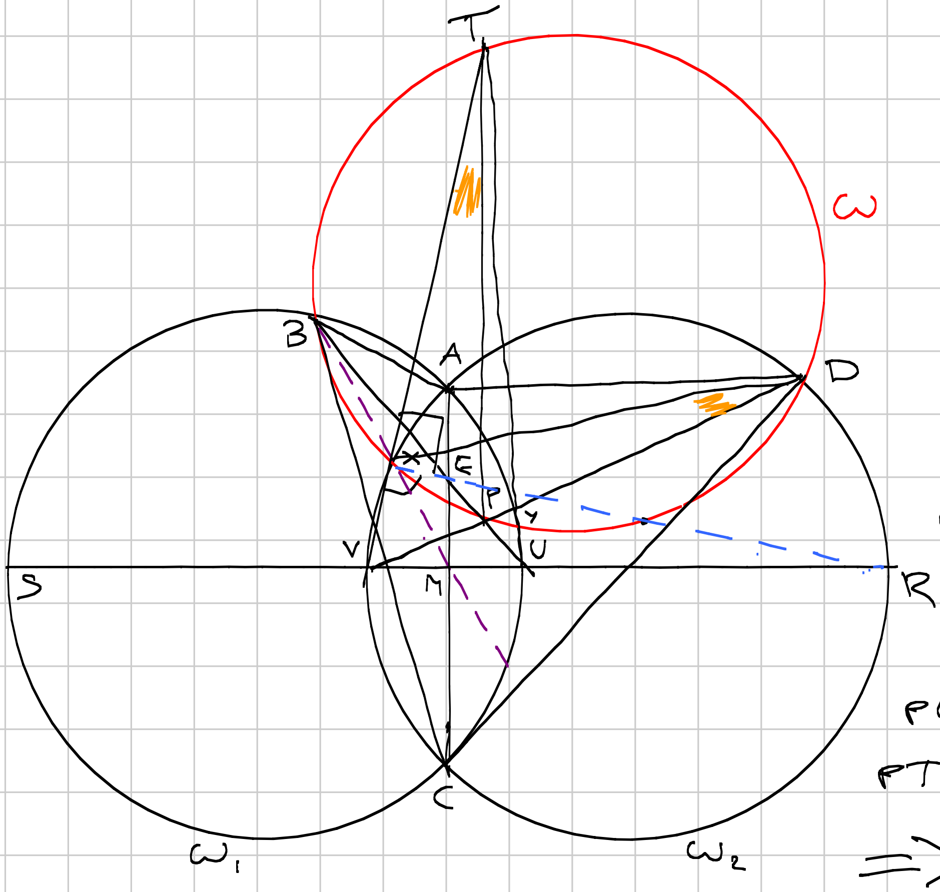
$x = x_R \cap C$ P_3

$x = x_S \cap C$ P_4

$\forall \alpha > 0$ $P_1P_2 \cap P_3P_4 \in r_\infty$

"Per continuità"

$\alpha = 0 \Rightarrow RS \cap UV \in r_\infty$



$TX \perp XE$

$TY \perp YF$

Q è il diametralmente opposto di T in ω.

$PQ \perp PT$

$PT \parallel AC$

$\Rightarrow$ Tesi.

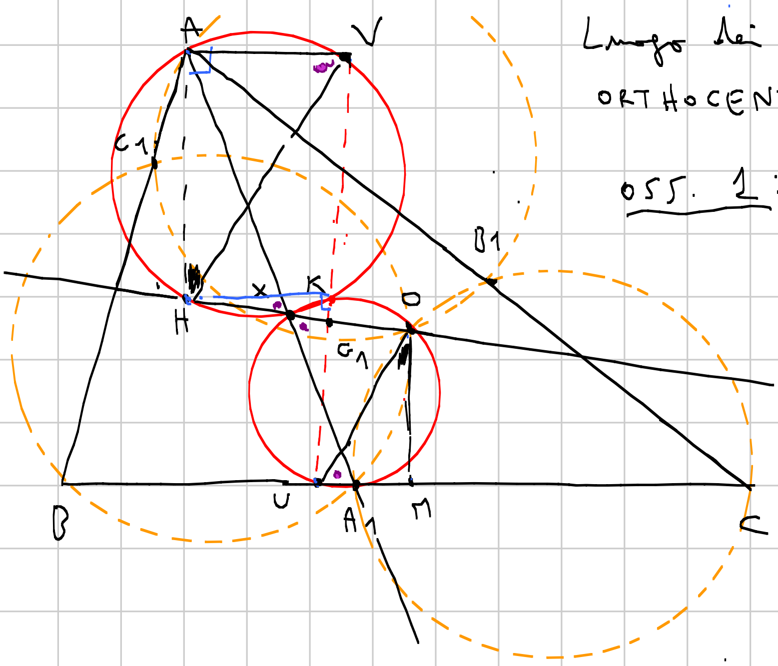
r parallela ad AC per P

$T = VX \cap r$

$\widehat{PTX} = 90 - \widehat{XUM} = \widehat{XRU} = \widehat{XDV}$

$\Rightarrow T \in \omega$.

8)



Luogo dei centri di similitudine

ORTHOCENTROIDAL CIRCLE

<u>OSS. 1</u>: il pt. di miquel di A_1, B_1, C_1 risp. ad ABC è O (il circocentro di ABC) e O è l'ortocentro di $A_1B_1C_1$

H ortoc. di ABC

Sia $X = OH \cap AA_1$; allora $K = \odot(OXA_1) \cap \odot(HXA)$ $(\neq X)$

Se V è l'intersezione di $\odot(AHX)$ con la parallela a BC per A e U è la seconda intersezione di $\odot(OXA_1)$ con BC $\Rightarrow$ U, K, V sono allineati

$\angle(VK, KX) + \angle(XK, KU) = \angle(AV, AA_1) + \angle(AA_1, AU) = 0$

Inoltre $\angle(AVH) = \angle(AXH) = \angle(A_1XO) = \angle(A_1VO)$

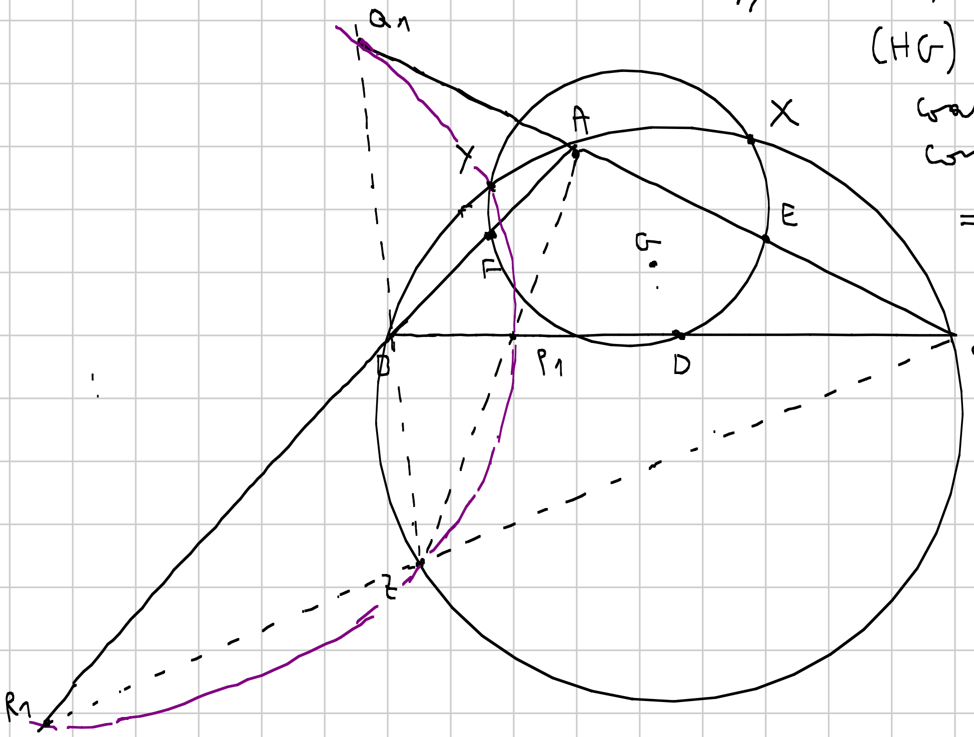
$\Rightarrow VH \parallel UO \Rightarrow \dfrac{OG_1}{HG_1} = \dfrac{OU}{VH} = \dfrac{OM}{AH}$ (perché $\hat{AVH} \simeq \hat{MUO}$)

$= \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow G_1$ è il baricentro di ABC e $H\hat{K}G_1 = H\hat{A}V = 90°$

<u>OSS</u>: il luogo è tutto il cerchio (HG)

Ora H, G sono i centri di similitudine di $\odot(ABC)$, $\odot(DEF)$ $\Rightarrow$ (HG) è coassiale con essi $\Rightarrow$ passa per X, Y



per quanto detto prima esistono P_1, Q_1, R_1 su AB, BC, CA tali che $P_1\hat{Q}_1R_1 = A\hat{B}C$ e il loro centro di similitudine sia Y.

$Y \in \odot(ABC) \Rightarrow Y \in \odot(P_1Q_1R_1)$

Se $Z = \odot(ABC) \cap \odot(P_1Q_1R_1)$ $(\neq Y)$ allora

$\angle(ZP_1, ZY) = \widehat{P_1Y}$ in $\odot(P_1Q_1R_1) =$

$= \widehat{AY}$ in $\odot(ABC) = \angle(ZA, ZY)$

$\Rightarrow Z, P_1, A$ allineati e analoghe

$\Rightarrow \angle(ZXY) = \angle(ZAY)$

$= \angle(P_1AY) = \angle(OHY)$

$= \angle(GXY)$

$\Rightarrow Z, G, X$ sono allineati

$\Rightarrow$ TS.

PREIMO 2017 – TDN MATTINO

Note Title 23/05/2017

$\boxed{N1}$ $n = 2^k!$

$\sigma(n)$ = somma dei divisori (positivi) di n

σ è una funzione moltiplicativa.

$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ se $(a,b)=1$

$a = p^k \quad b = q^h$

$\sigma(a) = 1 + p + \ldots + p^k$

$\sigma(b) = 1 + q + \ldots + q^h$

$\sigma(a)\sigma(b) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{h} p^i q^j = \sigma(ab).$

Potenza di un primo che divide un fattoriale.

$n! = p^\alpha \cdot m \qquad (m,p)=1$

$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots$

$n! = 2^k! = 2^\alpha m$

$\alpha = \left[\frac{2^k}{2}\right] + \left[\frac{2^k}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{2^k}{2^k}\right]$

$= 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 1 = 2^k - 1.$

$2^k! = 2^{2^k-1} \cdot m$

$$\sigma(2^{k!}) = \sigma\left(2^{2^k-1}\right)\cdot\sigma(m)$$
$$= \left(2^{2^k}-1\right)\sigma(m).$$

$$p \mid 2^{2^{k-1}}+1 \mid 2^{2^k}-1 \mid \sigma(n)$$

$$2^{2^{k-1}} \equiv -1 \pmod p$$

$$2^{2^k} \equiv 1 \pmod p$$

$$\mathrm{ord}_p 2 = 2^k \qquad p \equiv 1 \pmod{2^k}$$
$$\Rightarrow p > 2^k.$$

$\boxed{N3}$ $\quad n = p(p^2-p-1) = q(2q+3)$

p, q primi. Quali n sono possibili?

$p = q$: $\quad p^2-p-1 = 2p+3$

$(p-4)(p+1) = p^2-3p-4 = 0 \qquad p = 4 \quad \boxed{NO}$

$p \neq q \quad p \mid 2q+3 \qquad 2q+3 = kp, \quad k \in \mathbb{Z}$

Sostituendo si ottiene $\quad p^2-p-1 = kq$

Moltiplico la prima per k : $\quad 2kq + 3k = k^2p.$

" " seconda per 2 : $\quad 2p^2-2p-2 = 2kq$

$$2p^2-2p-2 = k^2p-3k$$

$$\boxed{2p^2 - (k^2+2)p + 3k - 2 = 0}$$

$$\Delta = k^4 + 4k^2 - 24k + 20$$

$\Delta > (k^2)^2$ se $4k^2 - 24k + 20 > 0$

$4(k-1)(k-5) > 0$

ok se $k > 5$.

$\Delta < (k^2+2)^2$ se $-24k + 16 < 0$

$k > \frac{2}{3}$.

Se $k > 5$ l'unica possibilità è

$\Delta = (k^2+1)^2$

Sostituendo si ottiene

$2k^2 - 24k + 19 = 0$ no sol. intera

$k = 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, 5$ k dispari

$k=1$ $2p^2 - 3p + 1 = 0$ $(2p-1)(p-1) = 0$

no sol. numeri primi.

$k = 3$ $2p^2 - 11p + 7 = 0$ no sol. intere

$k = 5$ $2p^2 - 27p + 13 = 0$ $\begin{cases} p = 13 \\ p = \frac{1}{2} \ \text{No} \end{cases}$

$n = p(p^2 - p - 1) = 2015$.

N 2 Oss. Siccome in notazione decimale le cifre di posto $\geq n$ sono divisibili per 10^n, si possono ignorare.

$$\underbrace{\dots a_n}_{\text{buttiamo via}} a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv 0 \mod 5^n$$

$$a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv 0 \mod 5^n$$

Quindi possiamo cercare una soluzione con <u>esattamente</u> n cifre

Per induzione: $s_1 = 5$ per $n = 1$

$$s_{n+1} = \boxed{d}\, s_n = s_n + d \cdot 10^n$$

- d cifra dispari
- $s_n + d \cdot 10^n \equiv 0 \quad (5^{n+1})$

$$\overset{\displaystyle s_n}{\Vert}$$

$$5^n (q_n + d \cdot 2^n) \equiv 0 \quad (5^{n+1})$$

$$\Longleftrightarrow \quad q_n + d \cdot 2^n \equiv 0 \quad (5)$$

$$\Longleftrightarrow \quad d \equiv -q_n \cdot (2^n)^{-1} \quad (\mathrm{mod}\ 5)$$

Scelgo $d \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ nella giusta classe di resto

Alternativa Aggiustare le cifre una alla volta

$$5^2 = 25$$

$$\begin{array}{r} 250 \\ \hline 275 \end{array}$$

Parto da 5^n. Se tutte le sue cifre sono dispari, ok. Altrimenti scelgo k minimo per cui la cifra in posizione k e' pari.

Sommo $5^n \cdot 10^k$, ottengo un numero multiplo di 5^n in cui tutte le cifre fino a k compreso sono dispari.
Itero la costruzione finché $k > n$
Elimino tutte le cifre a sinistra della n-esima

N4 $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$

Se $p(x) = -a_i$ deve avere una soluzione intera, deve esistere n t.c. $a_i = -p(n)$

Considero quindi l'eqz. $p(x) - p(n) = 0$

$$(x-n)\left(x^2 + nx + n^2 + a(x+n) + b\right) = 0$$

Questa ha 3 soluzioni intere $\Longleftrightarrow$

$$\Delta = (n+a)^2 - 4(n^2 + an + b)$$

e' un quadrato.

Per semplicita' proviamo a prendere $a = 0$.

$$-4b - 3n^2 = \square$$

Proviamo anche a considerare solo n pari e (necess.) $b < 0$

Voglio b tale che per "tanti" valori di n

$$b - 3n^2 \text{ sia un quadrato}$$

Questo e' equivalente a: per ogni K esiste b che si scrive come $3n^2 + t^2$ in almeno K modi diversi.

Oss. • $t^2+3n^2 = |t+\sqrt{-3}\,n|^2$

$z = t+\sqrt{-3}\,n \qquad |z|^2 = z\bar{z} = (t+\sqrt{-3}n)(t-\sqrt{-3}n)$
$= t^2+3n^2$

• $\overbrace{(t_1+\sqrt{-3}\,n_1)}^{z_1}\overbrace{(t_2+\sqrt{-3}\,n_2)}^{z_2} =$

$= \underbrace{(t_1t_2-3n_1n_2)+\sqrt{-3}\,(t_1n_2+n_1t_2)}_{z}$

$$(t_1^2+3n_1^2)(t_2^2+3n_2^2) = \left[(t_1t_2-3n_1n_2)^2+3\,(t_1n_2+n_1t_2)^2\right]$$

Alla luce dell'Osservazione, per trovare un b buono prendo un numero che si scriva come t^2+3n^2 e prendo una potenza di questo.

norma ($z\bar{z}$)

$7 = 2^2+3\cdot 1^2 = N(2+\sqrt{-3})$

$7^{2m} = N\left((2+\sqrt{-3})^{2m}\right)$

$7^{2m} = N(7^m)$

$7^{2m} = N\left((2+\sqrt{-3})^{2m-2}\right)\cdot N(7)$

$7^{2m} = N\left((2+\sqrt{-3})^{2m-2s}\right)\cdot N(7^s)$

Se voglio scrivere 7^{2m} come $\square + 3\square$?
$t^2 + 3n^2$

$$t = 7^s \frac{(2+\sqrt{-3})^{2m-2s} + (2-\sqrt{-3})^{2m-2s}}{2}$$

$$n = 7^s \frac{(2+\sqrt{-3})^{2m-2s} - (2-\sqrt{-3})^{2m-2s}}{2\sqrt{-3}}$$

Resta da dimostrare che, fissato m e facendo variare s, ottengo tutte rappr. di

$$7^{2m} = t^2 + 3n^2$$

distinte.

Speriamo che $\dfrac{(2+\sqrt{-3})^{2m-2s} + (2-\sqrt{-3})^{2m-2s}}{2}$ non abbia fattori 7.

Questa è una soluz. della succ. per ricorrenza

$$a_{k+1} = 4a_k - 7a_{k-1}$$

$$(x - (2+\sqrt{-3}))(x - (2-\sqrt{-3})) = x^2 - 4x + 7$$

Per induzione, se $7 \nmid a_k$ allora $7 \nmid a_{k+1}$.

Ma $a_0 = 1$, quindi $7 \nmid a_k$ $\forall k$.
$a_1 = 2$

N3 - bis

$$p(p^2-p-1) = q(2q+3)$$

$p = q$ come prima

$2q+3 = Kp$

$p^2 - p - 1 = Kq$

$$2q+3 \equiv 0 \ (p) \qquad q \equiv -\frac{3}{2} \ (p)$$

$$-1 \equiv Kq \ (p)$$
$$\equiv -\frac{3}{2}K \ (p) \Rightarrow K \equiv \frac{2}{3} \ (p)$$

$$3K - 2 = ep \qquad K = \frac{ep+2}{3} \geq p/3$$

$$2q+3 \geq p^2/3 \qquad q \text{ "}\geq\text{" } p^2/6$$

$$p^2 - p - 1 = Kq \geq p/3 \cdot p^2/6 = p^3/18$$

si controllano i primi ≤ 13

(in realtà $K = \frac{p+2}{3}$)

PREIMO 2017 - TdN Pomeriggio

Note Title 23/05/2017

N5

$$|m^k - n!| \le n$$

massimo di $\frac{n}{m}$

$n=2$, $m=1$, $k=1$ va bene $\frac{n}{m}=2$

CLAIM: 2 è davvero il max!

x assurdo ho (k, m, n) con $n > 2m$

$h = |m^k - n!|$, $h \le n \Rightarrow h | n!$

$$m^k = n! \pm h = h\left(\frac{n!}{h} \pm 1\right)$$

$m \cdot 2m \mid n!$ $\quad m^2 | n!$

$$\frac{n!}{h} = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots (h-1)(h+1) \cdots n$$

$$m \mid \frac{n!}{h}$$

$$\left(m, \frac{n!}{h} \pm 1\right) = 1$$

$\Downarrow$

$$\frac{n!}{h} \pm 1 = 1, -1$$

$\frac{n!}{4} = 1, 2$ Bisogna fare i casi $n = 1, 2, 3$

——— o ——— o ———

N8 $p(x) = x^3 + x$

vogliamo sapere quando $p(x) \equiv p(y)$ (q)

$x^3 + x \equiv y^3 + y$

$(x-y)(x^2 + y^2 + xy + 1) \equiv 0$ (q)

$x^2 + xy + y^2 + 1 \equiv 0$ (q) $(*)$

se fissiamo y, le "soluzioni"

$$x_{1,2} \equiv \frac{-y \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

se $\exists\, a$ t.c. $\Delta \equiv a^2$ (q) $\sqrt{\Delta} \equiv a$ (q)

se Δ non é r.q. l'equazione non ha sol.

$$\left(\frac{n}{q}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } q \mid n \\ 1 & \text{se } n \text{ é r.q.} \\ -1 & \text{se } n \text{ NON é r.q.} \end{cases}$$

le soluzioni di una quadratica mod q

sono $1 + \left(\frac{\Delta}{q}\right)$

$$\Delta = y^2 - 4(y^2+1) = -3y^2 - 4$$

Fatto noto 1 (criterio di Eulero)

$$\left(\frac{n}{q}\right) \equiv n^{\frac{q-1}{2}} \quad (q)$$

"dim." $n^{q-1} = 1$ $\quad \left(n^{\frac{q-1}{2}}+1\right)\left(n^{\frac{q-1}{2}}-1\right) \equiv 0 \ (q)$

$$a^{\frac{q-1}{2}} - 1 \equiv 0$$

Fatto noto 2

$$f(x) = a_{p-2}x^{p-2} + \dots + a_0$$

(dove a_i può essere tutto mod q)

$$\sum_{i=0}^{q-1} f(i) \equiv 0 \ (q)$$

Lemma

$$\sum_{i=0}^{q-1} \left(\frac{a i^2 + b}{q}\right) \equiv -\left(\frac{a}{q}\right) \quad (q)$$

dim:

$$\sum \left(\frac{a i^2 + b}{q}\right) \overset{1}{\equiv} \sum (a i^2 + b)^{\frac{q-1}{2}} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=0}^{q-1} \left(a^{\frac{q-1}{2}} i^{q-1} + \sum_{j=3}^{q} c_j i^{q-j} \right) \equiv$$

$$\equiv a^{\frac{q-1}{2}} \cdot \sum_{i=1}^{q-1} 1 + \underset{\overset{\downarrow 2}{}}{0}$$

$$\equiv -\left(\frac{a}{q}\right)$$

$$\left(\frac{\Delta}{q}\right) = \left(\frac{-3y^2-4}{q}\right)$$

$$\sum_{y=0}^{q-1} \left(\frac{\Delta}{q}\right) \equiv -\left(\frac{-3}{q}\right) \quad (q)$$

$$-q < \quad < q \qquad \Rightarrow \sum_{y=0}^{q-3} \left(\frac{\Delta}{q}\right) = -\left(\frac{-3}{q}\right)$$

proviamo $\left(\frac{-3}{q}\right) = 1$

$$\left(\frac{-3}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{3}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{3}\right)(-1)^{\frac{3-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

Reciprocità quadratica

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

$$\left(\frac{q}{3}\right)(-1)^{q-1} = \left(\frac{q}{3}\right) = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$q \equiv 1 \ (3)$$

scegliendo $q \equiv 1 \ (3)$

$$\sum_{y=0}^{q-1}\left(\frac{\Delta}{q}\right) = -1$$

$$-3y^2 - 4 \equiv 0 \ (q) \qquad -3 \equiv a^2 \ (q)$$

$$y^2 \equiv \frac{4}{a^2} \ (q) \qquad y \equiv \pm\frac{2}{a} \ (q)$$

$\left(\frac{\Delta}{q}\right) = 0$ per esattamente 2 valori di y

$$a \cdot 1 + b \cdot (-1) = -1$$
$$a + b = q - 2$$

$$\Rightarrow b = \frac{q-1}{2} \qquad a = \frac{q-3}{2}$$

per tutti gli y t.c. $\left(\frac{\Delta(y)}{q}\right) = -1$ $\qquad f(x) \equiv f(y)\ (q)$

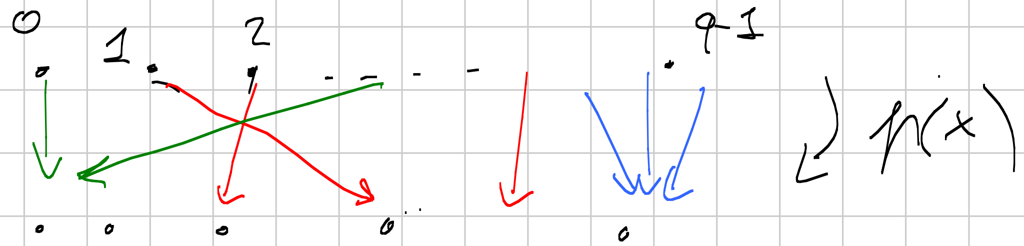
$$\Updownarrow$$

$$x \equiv y\ (q)$$

quindi f prende già $\frac{q-1}{2}$ valori DISTINTI

$y_0,\ q-y_0$ per cui $\left(\frac{\Delta(y_0)}{q}\right) = 0$

$\downarrow$ ho altri 2 valori nell'immagine di f



— gli y t.c. $\left(\frac{\Delta(y)}{q}\right) = -1$

— $= 0$ (cioè ho 2 frecce in arrivo)

almeno

$\frac{q-1}{2} + 2$ valori DISTINTI raggiunti da f

Evitiamo la Rec. Quadratica

$q \equiv 1 \ (3) \iff x^3 - 1 \equiv 0 \ (q)$ ha 3 soluzioni.

$\iff x^2 + x + 1 \equiv 0 \ (q)$ ha 2 soluz. mod q

$\iff \Delta = -3$ e' un quadrato modulo q

Contare le soluzioni di $x^2 + xy + y^2 \equiv -1 \ (q)$

Sia $q \equiv 1 \ (3)$. Allora $\exists\, \omega : \omega^2 + \omega + 1 \equiv 0 \ (q)$

$$x^2 + xy + y^2 \equiv \underbrace{(x - \omega y)}_{A}\underbrace{(x - \omega^2 y)}_{B} \equiv -1 \ (q)$$

$$AB \equiv -1 \ (q)$$

$$x = \frac{\omega A - B}{\omega - 1}$$

$$\{\text{soluz. di } x^2 + xy + y^2 \equiv -1 \ (q)\} \stackrel{\sim}{\longleftrightarrow} \underbrace{\{\text{soluz. di } AB \equiv -1\}}_{q-1}$$

$\boxed{N\ 6}$ SIA $c(n)$ LA SOMMA DELLE CIFRE DI n. SIA $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + c(a_n)$. SI MOSTRI CHE ESISTONO INFINITI PRIMI p CHE DIVIDONO QUALCHE a_n.

---

a_n CRESCE "LENTAMENTE"

I NUMERI CON DEI DIVISORI PRIMI FISSATI SONO "POCHI".

PER ASSURDO: I PRIMI CHE COMPAIONO TRA I DIVISORI DI $a_1, a_2, \dots$ SONO $p_1, p_2, p_3, \dots, p_h$

COME DIRE CHE GLI a_n SONO TANTI.

QUANTI SONO GLI $a_n \leq 10^k$?

$$a_{n+1} - a_n = c(a_n)$$

SE $a_n \leq 10^k \xrightarrow{?} c(a_n) = ?$

$$c(a_n) \leq 9 \cdot k$$

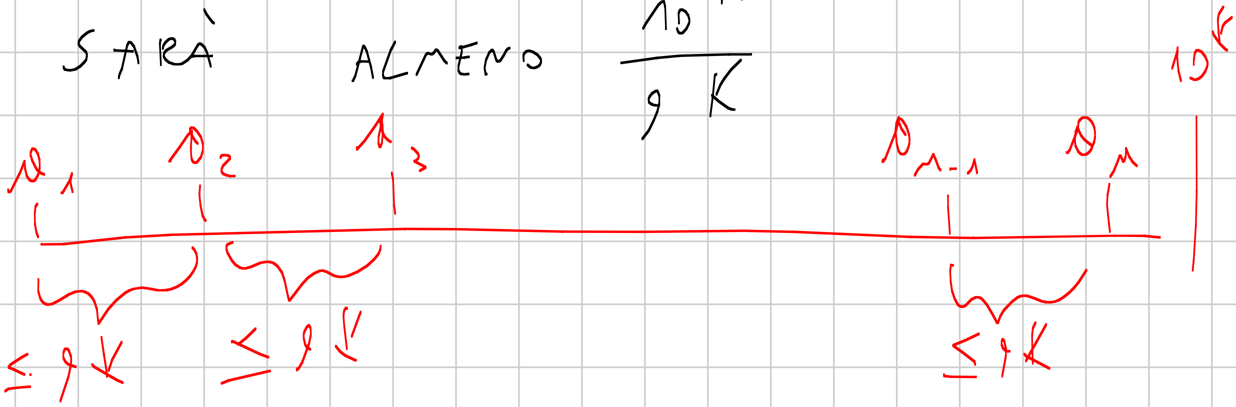
IL MAX DI $c(x)$ CON $x < 10^k$ È $9k$.

VISTO CHE SE $a_n < 10^k$ ALLORA

$0 < a_{n+1} - a_n < 9k$

IL NUMERO DI a_n MINORI DI 10^k

SARÀ ALMENO $\dfrac{10^k}{9k}$



II STIMA (SUI $p_1, \dots, p_h$)

CI CHIEDIAMO QUANTI SIANO I NUMERI

DELLA FORMA $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_h^{\alpha_h} < 10^k$

STIMA PARZIALE

$h = 1$

QUANTI SONO I NUMERI DELLA FORMA

$p_1^{\alpha_1}$ CON p_1 FISSATI MINORI

$N \mid 10^k$!

10^k

$1 \quad p_1 \quad p_1^2 \quad p_1^3 \quad \dots \quad p_1^\beta \mid p_1^{\beta+1}$

$$p_1^\beta < 10^k$$
$$\Downarrow$$
$$2^\beta < 10^k$$
$$\Updownarrow$$
$$16^{\beta/4} < 10^k$$
$$\Downarrow$$
$$10^{\beta/4} < 10^k$$
$$\Updownarrow$$
$$\beta < 4k$$

SONO AL PIÙ $4k$

(OSS.: C'È ANCHE LO ZERO MA $\beta < 4k$ STRETTO)

QUINDI I NUMERI DELLA FORMA $p_i^{a_i}$ CON p_i FISSATO SONO $\leq 4k$

I NUMERI DELLA FORMA

$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_h^{\alpha_h}$ SONO AL PIÙ $(4k)^h$ PERCHÉ OGNI NUMERO

DI QUESTA FORMA È PRODOTTO DI
$p_i^{\alpha_i} < 10^k$

RIEPILOGANDO:

$$\#\{a_n < 10^k\} \geq \frac{10^k}{9k}$$

$$\#\{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_h^{\alpha_h} < 10^k\} \leq (4k)^h$$

SE GLI a_n FOSSERO TUTTI DELLA FORMA
$p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_h^{\alpha_h}$

$$\{a_n < 10^k\} \subseteq \{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_h^{\alpha_h} < 10^k\}$$

$$(4k)^h \geq \frac{10^k}{9k}$$

$$\Updownarrow$$

$$4^h \cdot 9 \cdot k^{h+1} \geq 10^k$$ CON h FISSATO.

PER k GRANDE LHS $\lll$ RHS

GLI ESPONENZIALI CRESCONO MOLTO PIÙ VELOCEMENTE DEI POLINOMI.

7. Sia n un intero positivo e sia $m > n^{n-1}$.

Dimostrare che esistono primi distinti $p_1, p_2, \dots, p_n$ tali che $p_k \mid m + k$ $\forall\, 1 \leq k \leq n$.

Fissiamo un k:

$$m + k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_h^{\alpha_h}$$

Hope: un qualche $p_i^{\alpha_i}$ è $\geq n$.

Supponiamo il contrario:

$$n^{n-1} < m + k = \prod_{i=1}^{h} p_i^{\alpha_i} \leq n^h$$

A noi piacerebbe $h \leq n-1$

Quante possono essere le potenze di primo $\leq n-1$?

Sicuramente, al più $n-1$.

Quindi $h \leq n-1$ perché

$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_h^{\alpha_h}$ sono per ipotesi assurda potenze di primo distinte

$\leq n-1.$

$$m^{n-1} < m+k \leq n^h \leq n^{n-1}$$

ASSURDO!

HOPE: ✓

ESISTE UNA POTENZA DI PRIMO $\geq n$ CHE DIVIDE $m+k$.

ASSOCIO UNA SUA POTENZA DI PRIMO (CHE LO DIVIDE), TROVATA IN QUESTO MODO ($\geq n$)

$$\begin{array}{l|ll}
m+1 & p_1^{\beta_1} & \rightarrow p_1 \\
m+2 & p_2^{\beta_2} & \rightarrow p_2 \\
m+3 & p_3^{\beta_3} & \rightarrow p_3 \\
\dots & \dots & \dots \\
m+n & p_n^{\beta_n} & \rightarrow p_n
\end{array}$$

SPERIAMO CHE FUNZIONI

SICURAMENTE $p_k \mid m+k$.

MAGARI NON SONO DISTINTI.

SUPPONIAMO $p_i = p_j = p$ PER $1 \leq i \neq j \leq n$

$$p^{\beta_i} \mid m+i \qquad p^{\beta_i} \geq n$$

$$p^{\beta_j} \mid m+j \qquad p^{\beta_j} \geq n$$

SIA $\beta = \min\{\beta_i, \beta_j\}$

$\to \quad p^{\beta} \mid m+i \qquad p^{\beta} \mid m+j$

$$p^{\beta} \geq n$$

$\to \quad p^{\beta} \mid j-i\,.$

SE $j \neq i$, $\quad |j-i| \leq n-1$

MA ALLORA $\quad p^{\beta} \mid j-i \quad \to$

$p^{\beta} \leq n-1 \qquad$ ASSURDO.

$\boxed{6b}$ DIAMO UNA STIMA ESPLICITA DI s_n.

$$s_n \leq \cancel{1000}\,1 + 50 \cdot n \log_{10} n$$

COME DIMOSTRARLO?

INDUZIONE

- $s_1 \quad \checkmark$

- INDUTTIVO $\quad s_n \leq \cancel{1000}\,1 + 50\, n \log_{10} n$

LO MINORIAMO CON n

QUANTITÀ DA AGGIUNGERE $\leq 50 \log_{10}(n)$

VORREMMO $a_{n+1} \le \cancel{1000}\ 1 + 50\,(n+1)\log_{10}(n+1)$

SU $c(n)$ SAPPIAMO: $\log_{10}(10 \cdot n) \ge$ # CIFRE DI n

$$c(n) \le 9 \cdot \log_{10}(10 \cdot n)$$

$$\overset{a_{n+1}}{\overset{\|}{a_n}} + c(a_n) \le a_n + 9 \cdot \log_{10}(10 \cdot a_n) \le$$

$$\le \overset{1}{\cancel{1000}} + 50\, n \log_{10} n + 9 \cdot$$

$$\underbrace{\log_{10}\left(\underset{10}{\cancel{10000}} + 500\, n \log_{10} n\right)}_{11 \cdot n}$$

$$50 \cdot \log_{10} n$$

$$\boxed{\left(\overset{10}{\cancel{10000}} + 500\, n \log_{10} n\right)^9 \overset{?}{\le} n^{50}}$$

FATE A CASA LE STIME

COMUNQUE:

$$a_n \le c + d \cdot n \cdot \log_{10} n$$

FATTO POTENTE:

SE HO UN INSIEME $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ DI INTERI POSITIVI TALE CHE $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{a_i} \to +\infty$ ALLORA I DIVISORI PRIMI AL VARIARE DEGLI a_n SONO INFINITI.

SUPPONIAMO CHE I PRIMI $p_1, \dots, p_h$ SIANO FINITI.

FORMA: $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_h^{\alpha_h}$

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h = 0}^{+\infty} \frac{1}{\left(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_h^{\alpha_h}\right)} =$$

(OGNI α_i TRA 0 E $+\infty$)

$$= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_1^{\,i}}\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_2^{\,i}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_h^{\,i}}\right) =$$

OGNI $p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$ PUÒ ESSERE SCRITTO IN UN E UN SOLO MODO

$$1+x+x^2+\ldots = \frac{1}{1-x} \quad \text{PER } 0<x<1$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} < +\infty$$

È UN NUMERO FINITO

CI BASTA $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\cancel{c}+d \cdot n \log_{10} n)} \geq$$

$$\frac{1}{d} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log_{10} n}$$

CONDENSAZIONE DI CAUCHY

VERSIONE AD HOC:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \iff \sum_{n=1}^{+\infty} 10^n \cdot a_{(10^n)} = +\infty$$

a_n DEVE ESSERE DECRESCENTE E POSITIVA

$$\frac{1}{d} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{10^n}}{\cancel{10^n} \cdot \log_{10}(10^n)} \overset{?}{=} +\infty$$

$$\frac{1}{d} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

CAUCHY DI NUOVO

$$\frac{1}{d} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{10^n}}{\cancel{10^n}} (1) = +\infty$$