PREIMO 2018 A-M pol

Note Title 5/21/2018

A1. Determinare polinomi $p(x)$, $q(x)$ monici dello stesso grado t.c.

$$[p(x)]^2 - p(x^2) = q(x)$$

1. Casi di grado basso:

deg = 1: $(x+c)^2 - x^2 - c$ ha grado 1

$p(x) = x + c$

$$\cancel{x^2} + \underbrace{2xc}_{\text{monico}} + c^2 - \cancel{x^2} - c \quad \text{ha grado } 1$$

monico $\Rightarrow$ $\boxed{c = 1/2}$

deg = 2, deg = 3 ... sembra che vada bene solo $x^n + 1/2$

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + O(x^{n-2})$$

$$[p(x)]^2 - p(x^2) = x^{2n} + 2a_{n-1} x^{2n-1} + O(x^{2n-2}) - x^{2n}$$

$= \text{grado } n$

grado troppo alto, dev'essere 0

Ora considero $p(x) = x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \dots$

considero i termini di grado $2n-2$ e superiori, e continuo...

Sia $p(x) = x^n + a_k x^k + O(x^{k-1})$ (+)

dove $0 \leq k < n$ è il grado del successivo termine $\neq 0$, cioè $k = \max\{k < n : a_k \neq 0\}$

dove $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Ora $[p(x)]^2 - p(x^2) = x^{2n} + a_k x^{n+k} + O(x^{n+k-1})$
$$- x^{2n} - \cancel{a_k x^{2k}}$$

$2k \leq n+k-1$ perché $k < n$

$2k < n+k$ perché $k < n$

Ho un termine di grado $n+k$ che non si annulla

$\Rightarrow$ dev'essere $k=0$ o avrebbe grado troppo alto.

(+) controllo i polinomi della forma $x^n + c$

A2: $n \geq 4$ $a_i, b_i \geq 0$ $a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n > 0$

Trovare il max di

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i(a_i+b_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)} = \frac{\overset{A}{\sum a_i^2} + \overset{C}{\sum a_i b_i}}{\underset{B}{\sum b_i^2} + \underset{C}{\sum a_i b_i}}$$

Congettura: $a = (S, 0, 0, \ldots 0)$

$b = \left(0, \frac{S}{n-1}, \frac{S}{n-1}, \ldots \frac{S}{n-1}\right)$

$$\sum_i a_i b_i \le \left(\sum_i a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_i b_i^2\right)^{1/2}$$ e simili

non vanno bene perché non preservano uguaglianza

"unsmoothing": sposto cose "contano" e vedo cose succede; ad es. dimostro che $f(x,y) \le f(x+y,0)$

Altro fatterello utile: $\dfrac{A+C}{B+C}$ è compreso tra $\dfrac{A}{B}$ e $\dfrac{C}{C}=1$

in part., se $A>B$, $\dfrac{A+C}{B+C} < \dfrac{A}{B}$

(e il massimo sarà chiaramente con num > den)

e anzi, $\dfrac{A+C}{B+C}$ è decrescente in C

Wlog. suppongo $b_1 = \min(b_i)$.

Confronto $(a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_n)$ con

$(a_1+a_2+\dots+a_n, 0, 0, \dots 0, b_1, b_2, \dots b_n)$

$$A = \sum_i a_i^2 \le (a_1+a_2 \dots + a_n)^2 + 0^2 + \dots + 0^2 = \hat{A} \qquad B = \hat{B}$$

$$C = \sum_i a_i b_i \ge \sum_i a_i b_1 = (a_1 + \dots + a_n) b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots + 0 \cdot b_n = \hat{C}$$

$$\frac{A+C}{B+C} \le \frac{\hat{A}+C}{B+C} \underset{\uparrow}{\le} \frac{\hat{A}+\hat{C}}{B+\hat{C}} = \frac{\hat{A}+\hat{C}}{\hat{B}+\hat{C}}$$

$\frac{A+C}{B+C}$ è decrescente in C

$\Rightarrow$ la nuova tupla è sempre migliore

A questo punto la mia funzione è

$$F(a_1+\dots+a_n,0,0,\dots 0, b_1\dots b_n) = \frac{(a_1+\dots+a_n)^2+(a_1+\dots+a_n)b_1}{(a_1+\dots+a_n)b_1+b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2}$$

Ora rimpiazzo $b_2,\dots b_n$ con $\frac{b_2+\dots+b_n}{n-1}, \frac{b_2+\dots+b_n}{n-1}, \dots \frac{b_2+\dots+b_n}{n-1}$

$$\tilde{A}=\hat{A} \quad \tilde{C}=\hat{C}$$

$$\tilde{B}=\left(\frac{b_2+\dots+b_n}{n-1}\right)^2\cdot(n-1)+b_1^2 \leq b_2^2+\dots+b_n^2+b_1^2 = \hat{B}$$

(AM-QM)

$$\frac{\hat{A}+\hat{C}}{\hat{B}+\hat{C}} \leq \frac{\tilde{A}+\tilde{C}}{\tilde{B}+\tilde{C}} \quad \text{perché } \tilde{B}\leq\hat{B}$$

$$\frac{b_2+\dots+b_n}{n-1} := S$$

$$f(a_1,\dots a_n; b_1,\dots b_n) \leq f(\overbrace{a_1+\dots+a_n}^{(n-1)S+b_1}, 0,0,\dots 0; b_1, S, S,\dots S)$$

$$= \frac{[(n-1)S+b_1]^2+b_1((n-1)S+b_1)}{b_1^2+(n-1)S^2+b_1((n-1)S+b_1)} = \frac{2b_1^2+3(n-1)Sb_1+(n-1)^2S^2}{2b_1^2+(n-1)Sb_1+(n-1)S^2}$$

Ultimo rimpiazzo da fare: b_1 con 0

A questo punto potete fissare $S=1$ usando omogeneità e fare conti (derivata in b_1 ...) oppure:

Moltiplico e divido per $n-1$

$$=(n-1)\cdot\frac{2b_1^2+3(n-1)Sb_1^2+(n-1)^2S^2}{2(n-1)^2b_1^2+(n-1)^2Sb_1^2+(n-1)^2S^2} \overset{?}{\leq} (n-1)\cdot 1$$

che è ovvio perché denom. $\geq$ numer.:

$$2(n-1)^2b_1^2 \geq 2b_1^2$$

$$(n-1)^2Sb_1^2 \geq 3(n-1)Sb_1^2 \leftarrow \text{qui sto usando } \boxed{n\geq 4}$$

$$(n-1)^2S^2 \geq (n-1)^2S^2 \qquad \text{(il caso } n=3 \text{ è diverso)}$$

Mettendo insieme tutto:

$$f(a_1,\dots a_n; b_1,\dots b_n) \leq f(a_1+a_2+\dots+a_n, 0, 0\dots 0; b_1+b_2+\dots+b_n)$$

$$\leq f(\cancel{a_1+a_2+\dots+a_n}^{\,b_1+S(n-1)}, 0, \dots 0; b_1, S, S, \dots S)$$

$$\leq f(S(n-1), 0, \dots 0; 0, S, S, \dots S) = n-1$$

- tutte le tuple sono $\leq n-1$
- $\exists$ tuple che fa $n-1$

$\Rightarrow$ il max è $n-1$.

A3. Sia $g(x)$ polinomio di grado ≥ 2, con tutti i coefficienti positivi. Trovare $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ t.c.

$P(x,y)$: $f[f(x)+g(x)+2y] = f(x)+g(x)+2f(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^+$

(⚠ $\mathbb{R}^+$ non contiene lo 0.)

Idea: $f(x+\text{qualcosa}) = f(x) + \text{qualcosa}$ ←

Fisso la x:

$P(a,y)$: $f(f(a)+g(a)+2y) = f(a)+g(a)+2\cancel{f(y)}$

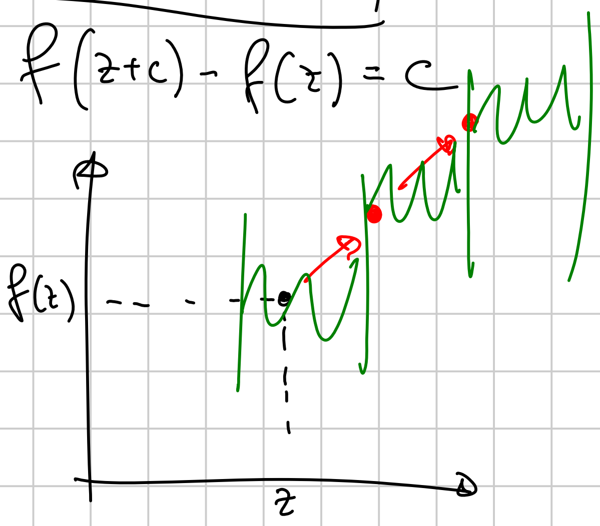
$P(b,y)$: $f(f(b)+g(b)+2y) = f(b)+g(b)+2\cancel{f(y)}$

sottraggo:

$$f(\underbrace{f(a)+g(a)+2y}_{z+\text{qualcosa}}) - f(\underbrace{f(b)+g(b)+2y}_{z}) = \underbrace{f(a)+g(a)-f(b)-g(b)}_{\text{qualcosa}}$$

(*) $\boxed{f(z+c)-f(z)=c}$ se diciamo $z := f(b)+g(b)+2y$, $\boxed{\forall z > f(b)+g(b)}$

$\Rightarrow$ $\forall z$ abbastanza grande $f(z+c)-f(z)=c$



Idea (ri-spammato): confronto $P(x+c,y)$ e $P(x,y)$:

$P(x+c,y)$: $f(f(x+c)+g(x+c)+2y) = f(x+c)+g(x+c)+2f(y)$

Per le (*): $$f(f(x)+c+g(x+c)+2y)=f(x)+c+g(x+c)+\cancel{2f(y)}$$

$$P(x,y): f(f(x)+g(x)+2y)=f(x)+g(x)+\cancel{2f(y)}$$

sottraggo:

$$\underbrace{f(f(x)+c+g(x+c)+2y)}_{f(z+\text{qualcosa})}-\underbrace{f(f(x)+g(x)+2y)}_{f(z)}=\underbrace{c+g(x+c)-g(x)}_{\text{qualcosa}}$$

con qualcosa $= \underbrace{g(x+c)-g(x)+c}_{c'}$

$$f(z+c')-f(z)=c' \quad \text{per ogni } z \text{ abbast. grande}$$

c' non dipende più da f!

Scegliendo tanti valori di x, ottengo tanti valori diversi di c'

$c'=g(x+c)-g(x)+c$ è un polinomio di grado $\deg(g)-1$

$\Rightarrow$ può assumere tutti i valori $[M,\infty)$ per un certo M

Se so $f(u)$, posso calcolare $f(v)$:

$$f(u)=f(u+18000M)-18000M=$$

$$=f(v+(u+18000M-v))-18000M=$$

$= f(v) + u + 18000M - v - \cancel{18000}M =$

$= f(v) + u - v$

$\Rightarrow f(u) = f(v) + (u - v)$ per ogni v

$\Rightarrow f$ è della forma $f(x) = x + a$

Posso sostituire e vedere quali vanno bene $\to$ finito!

~~A1~~ A2. $a, b, c > 0$

$$\sum_{cyc} \frac{ab^2}{a^2 + 2b^2 + c^2} \leq \frac{a+b+c}{4}$$

Disug. ciclica non simmetrica

già $\max_{a+b+c=1} \underbrace{\sum ab^2}$ è non banale

Versione più semplice:

$$(*) \quad ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \cdot \frac{1}{3}$$

$$\bullet\ ab^2 + bc^2 = b(ab + c^2) \leq b\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + c^2\right)$$

$$2ab^2 + bc^2 = b(2ab + c^2) \leq b(a^2 + b^2 + c^2)$$

sommo ciclicamente:

$$(2ab^2 + bc^2) + (2bc^2 + ca^2) + (2ca^2 + ab^2) \leq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

(*) $\quad 3(ab^2+bc^2+ca^2) \quad =$

Scritto "la soluz. ufficiale":

$\frac{2}{3}ab^2+\frac{1}{3}bc^2 \leq b(a^2+b^2+c^2)$, sommo ciclicamente

---

$$\sum_{cyc} \frac{ab^2+\underbrace{a(a^2+2b^2+c^2)}_{}-a(a^2+2b^2+c^2)}{a^2+2b^2+c^2} \overset{?}{\leq} \frac{a+b+c}{4}$$

$= a$

$$\sum_{cyc} a - \frac{a(a^2+b^2+c^2)}{a^2+2b^2+c^2} \overset{?}{\leq} \frac{a+b+c}{4}$$

$$\sum_{cyc} \frac{a(a^2+b^2+c^2)}{a^2+2b^2+c^2} \overset{?}{\geq} \frac{3}{4}(a+b+c)$$

$$\sum_{cyc} \frac{a}{a^2+2b^2+c^2} \overset{?}{\geq} \frac{3\,(a+b+c)}{4\,(a^2+b^2+c^2)}$$

Devo trovare un modo di gestire il denominatore:

$$a^2+2b^2+c^2 = (a^2+b^2+c^2)+b^2 \geq 2\sqrt{(a^2+b^2+c^2)\,b^2}$$

$$\sum_{cyc} \frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2} \leq \sum_{cyc} \frac{ab^2}{2\sqrt{(a^2+b^2+c^2)b^2}} \overset{\text{HOPE}}{\leq} \frac{a+b+c}{4}$$

NON PUÒ FUNZIONARE PERCHÉ NON RISPETTA COND. UGUAGLIANZA:

se $a=b=c$, vale l'uguaglianza in LHS $\leq$ RHS ma non in $LHS \leq CHS$

Aggiusto: infilo coefficienti in modo che valga l'uguaglianza quando $a=b=c$

$$a^2+2b^2+c^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+b^2 \geq 4\sqrt[4]{b^2\cdot\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3}$$

$$=4\sqrt{b}\cdot\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{3/4}$$

$$LHS \leq \sum_{cyc}\frac{ab^{\cancel{2}\,3/2}}{\cancel{4}\cancel{\sqrt{b}}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{3/4}} \overset{?}{\leq} \frac{a+b+c}{\cancel{4}}$$

$$\sum ab^{3/2} \overset{HOPE}{\leq} (a+b+c)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{3/4}$$

$$ab^{3/2}+bc^{3/2}=b\left(\underset{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{a\sqrt{b}}+c^{3/2}\right)\leq b\left(\frac{2a^{3/2}+b^{3/2}}{3}+c^{3/2}\right)$$

$$ab^{3/2}+\frac{2}{3}bc^{3/2}=b\left(a\sqrt{b}+c^{3/2}\right)\leq b\left(\frac{2a^{3/2}+b^{3/2}+2c^{3/2}}{3}\right)$$

(BUNCHING)

$$\leq \frac{5}{3}b\cdot\left(\frac{a^{3/2}+b^{3/2}+c^{3/2}}{3}\right)$$

sommo ciclicamente:

$$\frac{5}{3}\sum_{cyc} ab^{3/2} \leq \frac{5}{3}\cdot(a+b+c)\left(\frac{a^{3/2}+b^{3/2}+c^{3/2}}{3}\right)$$

$$\underset{\text{MEDIE}}{\leq} \frac{5}{3}(a+b+c)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{3/4}$$

SCEGLIERE COEFF PER AVERE COND. UGUAGLIANZA OPPORTUNE: "POINT OF INCIDENCE"

ALTRA SOLUZIONE:

$$\sum_{cyc} \frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2}$$

SPEZZO IL DEN. NELLA SOMMA DI DUE:

$$\frac{1}{a^2+2b^2+c^2} \leq \frac{\alpha}{a^2+b^2+c^2} + \frac{\beta}{b^2}$$

$$\sum \frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2} \leq \alpha \sum \frac{ab^2}{a^2+b^2+c^2} + \beta \sum \frac{ab^2}{b^2}$$

$$\leq \alpha \cdot \frac{a+b+c}{3} + \beta(a+b+c)$$

$$\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad 4xy \leq (x+y)^2$$

+ sistema coefficienti per avere uguaglianza