PREIMO 2018 – ALGEBRA POMERIGGIO

Note Title 5/21/2018

PROBLEMA 5 $f(f(y)+x^2+1)+2x = y+(f(x+1))^2$

$x=0$ $\quad f(\underbrace{f(y)}+1) = y+(f(1))^2 \Rightarrow f$ bigettiva

$f(\overbrace{f(z)+x^2+1}) +$ ecc.

Scelgo y, z con WLOG $f(y) \geq f(z)$

Trovo x t.c. $x^2 = f(y)-f(z)$: sostituisco e ottengo

$$y+(f(1))^2 = f(f(y)+1) = f(f(z)+x^2+1) = z-2x+(f(x+1))^2$$

quindi $\quad y-z = -(f(1))^2 - 2x + (f(x+1))^2$

Se $f(y)-f(z) = f(s)-f(t)$ allora $y-z = s-t$

Scelgo y, x qualsiasi. Per bigettività, trovo z t.c.

$$f(z) = f(x)+f(y)-f(0)$$

Allora ho $f(z)-f(y) = f(x)-f(0)$ da cui $z-y = x-0$

cioè $z = x+y$.

Quindi ho ottenuto $f(x+y) = f(x)+f(y)-f(0)$

A questo punto il testo si "spezza"

$$\underbrace{f(f(y)+x^2+1)}+2x = y+(f(x+1))^2$$

$$f(f(y))+f(x^2+1)-f(0)$$

Quindi ho $\quad f(f(y))-y = (f(x+1))^2 - 2x - f(x^2+1) + f(0)$

Chiamo d la costante a cui i due membri sono uguali e ho che

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)+f(y)-f(0) & (*) \\ f(f(y)) - y = d \\ (f(x+1))^2 - 2x - f(x^2+1) + f(0) = d & (**) \end{cases}$$

Chiamo $a = f(0)$
$b = f(1)$
$c = f(2)$

$(*)$ $x=y=1$ ottengo $f(2) = 2f(1) - f(0)$ $\quad c = 2b - a$

$(**)$ $x=0$ $\quad b^2 = b+d$

$x=1$ $\quad c^2 = c+d+2$

$x=-1$ $\quad a^2 = c+d-2$

RISOLVENDO uno riesce a trovare $\boxed{f(0)=0}$ $\quad f(1)=1 \quad d=0$.

$f(x+y) = f(x)+f(y) \implies f(-x) = -f(x)$

$(f(x+1))^2 = f(x^2+1) + 2x$ pure $(f(x)+1)^2 = f(x^2)+1+2x$

cioè $f(x)^2 + 2f(x) = f(x^2) + 2x$

in questa metto $-x$ al posto di x
e trovo $(f(x))^2 - 2f(x) = f(x^2) - 2x$

sottraendo trovo $4f(x) = 4x$
$f(x) = x$.

— o — o —

Idea di alternativa per ottenere la Cauchy:

$f(f(y)+1) = y + (f(1))^2$ la rimetto dentro al testo sostituendo $f(y)+1$ al posto di y nel testo:

$$f\left(\boxed{f(f(y)+1)} + x^2+1\right) + 2x = f(y)+1 + (f(x+1))^2$$

$$f\left(y + x^2 + 1 + (f(1))^2\right) = f(y)+1 + (f(x+1))^2 - 2x$$

metto $y = -1 - (f(1))^2$ e ho $f(x^2) = \boxed{(f(x+1))^2 - 2x} - (f(1))^2$

ottiene $f(y + x^2 + 1 + (f(1))^2) = f(y) + 1 + f(x^2) + (f(1))^2$

$$f(y + x^2 + c) = f(y) + f(x^2) + c$$

PROBLEMA 6

$$p(x)^3 - q(x)^2 = r(x) \qquad \deg r = 1$$

$$2 \deg q = 3 \deg p$$

$$3\, p(x)^2\, p'(x) - 2\, q(x)\, q'(x) = r'(x)$$

$$3 \underbrace{p(x)^3}_{r(x) + (q(x))^2} p'(x) - 2\, p(x)\, q(x)\, q'(x) = p(x)\, r'(x)$$

$$3\, r(x)\, p'(x) + 3 (q(x))^2 p'(x) - 2\, p(x)\, q(x)\, q'(x) = p(x)\, r'(x)$$

Guardo mod $q(x)$ e trovo $\quad 3\, r(x)\, p'(x) - p(x)\, r'(x) \equiv 0$

Segue che $\quad 3\, r(x)\, p'(x) = p(x)\, r'(x)$

$p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$

$r(x) = r_1 x + r_0$

il termine dominante è:

a sinistra $\quad 3 r_1\, a_n \cdot n\, x^n$

a destra $\quad a_n\, r_1\, x^n$

$\Rightarrow 3n = 1$

ASSURDO

Teo (Mason – Stothers) $\quad a(x) + b(x) + c(x) = 0 \qquad a, b, c$ a due a due coprimi

Allora $\max\{\deg a, \deg b, \deg c\} \leq \deg(\underbrace{\mathrm{rad}(abc)}) - 1$

il polinomio abc tolti i fattori irriducibili ripetuti

Nel nostro caso $\quad \underset{2 \deg q}{\overset{}{\deg q^2}} \leq \deg(\mathrm{rad}(p^3 q^2 r)) - 1 \leq$

$$\leq \deg(pqr) - 1 = \deg p + \deg q + \deg r - 1$$

$\Rightarrow \deg q \leq \deg p$

PROBLEMA 7

$a, b, c > 0$

$$\sum_{cyc} \sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-ab)}{2}} \leq \sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{a+b} \leq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\sum_{cyc} \frac{1}{a+b}\right)$$

$$\sum \frac{a^2+b^2}{a+b} \leq \frac{\left(\sum a^2+b^2\right)\left(\sum \frac{1}{a+b}\right)}{3}$$

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \leq \frac{a^2+c^2}{b+c}$$

Chebyshev

$$\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-ab)}{2}} \leq \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

$$\iff (a^2+b^2-ab)(a+b)^4 \leq 2(a^2+b^2)^3$$

$$\iff (a-b)^4(a^2+b^2+ab) \geq 0$$

Soluzione alternativa

$$\sum \sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} \leq \frac{2}{3}\left(\sum a^2\right)\left(\sum \frac{1}{a+b}\right)$$

Uso AM-GM su LHS : $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}(a^2-ab+b^2)} \leq \frac{\frac{a^2+b^2}{2}+a^2-ab+b^2}{2}$

Sostituisco e resta da mostrare $\sum \sqrt{\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}} \leq \frac{2}{3}\left(\sum a^2\right)\left(\sum \frac{1}{a+b}\right)$

Uso AM-HM su RHS : $\sum \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{\sum(a+b)} = \frac{9}{2}\,\frac{1}{\sum a}$

Voglio mostrare che $\sum \sqrt{\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}} \leq 3\,\frac{\sum a^2}{\sum a}$

NON SO
SE FUNZIONA ...
SORRY

$$\sum \sqrt[4]{\frac{(a^2-ab+b^2)(a^2+b^2)}{2}} \leq \frac{2}{3}\left(\sum a^2\right)\left(\sum \frac{1}{a+b}\right)$$

IDEA 1: LAVORO SU LHS E CERCO DI RENDERLO SIMILE A RHS

IDEA 2: IL CONTRARIO

$$\sum \sqrt{\frac{(a^2-ab+b^2)(a^2+b^2)}{2}} \leq \frac{1}{3}\left(\sum a^2+b^2\right)\left(\sum \frac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}\right)$$

$$\left(\sum \text{cose}\right)^2 \overset{\text{CS}}{\leq} \text{RHS} \quad \text{NON FUNZIONA}$$

$$\sum (a^2+b^2)\left(\frac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}\right) \overset{\text{CHEBYSHËV}}{\leq} \text{RHS}$$

$$\sqrt[4]{\frac{(a^2-ab+b^2)(a^2+b^2)}{2}}$$

$$\sum \sqrt{\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}} \leq 3 \frac{\sum a^2}{\sum a}$$

Uso AM-QM on LHS: $\sum \sqrt{\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}} \leq \sqrt{3} \sqrt{\sum \frac{3a^2-2ab+3b^2}{4}}$

Quindi resta da mostrare che $\sqrt{\sum 3a^2 - \sum ab} \leq \sqrt{6} \frac{\sum a^2}{\sum a}$

Ora elevo al quadrato e faccio il conto. Per comodità $\sum a^2 = A$, $\sum ab = B$

$$(3A-B)\left(\sum a\right)^2 \overset{?}{\leq} 6A^2$$

$$(3A-B)(A+2B) \leq 6A^2$$

$$5AB - 2B^2 \leq 3A^2$$

Noi sappiamo che $A \geq B$

Diciamo $A = B + h$

$$5B(B+h) - 2B^2 \leq 3(B+h)^2$$

$$5B^2 + 5Bh - 2B^2 \leq 3B^2 + 6Bh + 3h^2$$ che è vera.

PROBLEMA 8

$$f(f(x)+f(y)+f(z)) = f(f(x)-f(y)) + f(f(z)+2xy) + 2f(z(x-y))$$

Testo (x,y,z) − Testo (y,x,z)

$$\left[f(f(x)-f(y)) - f(f(y)-f(x))\right] + 2\left[f(z(x-y)) - f(z(y-x))\right] = 0$$

$$z=0 \implies f(f(x)-f(y)) = f(f(y)-f(x))$$

$$\implies f(z(x-y)) = f(z(y-x)) \implies f(-x)=f(x)$$

Testo (x,y,z) − Testo $(x,-y,z)$

$$\left[f(f(z)+2xy) - f(f(z)-2xy)\right] + 2\left[f(z(x-y)) - f(z(x+y))\right] = 0$$

$$z=0 \qquad f(f(0)+2xy) = f(f(0)-2xy)$$

$$f(f(0)+x) = f(f(0)-x)$$

$$f(f(0)-x) = f(x-f(0))$$

$$f(x+2f(0)) = f(x)$$

Testo (x,x,z) $\quad f(f(z)+2f(x)) = f(0) + f(f(z)+2x^2) + 2f(0)$

$$x=0 \qquad \underbrace{f(f(z)+2f(0))}_{f(f(z))} = 3f(0) + f(f(z)) \implies f(0)=0$$

$$f(f(z)+2f(x)) = f(f(z)+2x^2)$$

Proviamo a vedere che succede se $f(a)=f(b)$

Testo (x,y,a) − Testo (x,y,b)

$$f(a(x-y)) = f(b(x-y))$$

Quindi $f(a)=f(b) \implies f(\lambda a) = f(\lambda b) \quad \forall \lambda$.

Supponiamo $f(x)=f(x')$ $\quad f(y)=f(y')$

Provo a scrivere Testo (x,y,z) − Testo (x',y',z)

Viene $\left[f(f(z)+2xy)-f(f(z)+2x'y')\right]+2\left[f(z(x-y))-f(z(x'-y'))\right]=0$

Impongo "a forza" che valga $f(z)+2xy=f(z)+2x'y'$

Se $f(a)=f(b)$ scelgo λ,μ e metto $x=\lambda a$ $y=\mu b$

$x'=\lambda b$ $y'=\mu a$

metto $z=1$; resta $f(\lambda a-\mu b)=f(\lambda b-\mu a)$

$\forall u,v$ riesco a risolvere $\begin{cases}\lambda a-\mu b=u\\ \lambda b-\mu a=v\end{cases}$

$\det = a^2-b^2$

Se $a^2-b^2\neq 0 \Rightarrow \forall u,v$ trovo $\lambda,\mu \Rightarrow f(u)=f(v)$

Quindi $f(a)=f(b) \Rightarrow a=\pm b$

$$f(f(z)+2f(x))=f(f(z)+2x^2)$$

Fisso x e faccio 2 casi: se $\exists z$ t.c. viene col $+$

e allora ho $f(x)=x^2$

se no $\forall z$ vale col $-$

$\forall z$ $f(z)+2f(x)=-f(z)-2x^2$

$\Rightarrow f$ costante.

$f(a)=f(b) \Rightarrow f(\lambda a)=f(\lambda b)$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

$x:=\lambda b$, $k:=\frac{a}{b}$ $\rightsquigarrow$ $f\left(\frac{a}{b}\cdot\lambda b\right)=f(\lambda b)$

$f(kx)=f(x)$ $\forall x$

testo (kx, ky, z) $\rightsquigarrow$ $f(2k^2xy+f(z))=\underbrace{f(2xy+f(z))}_{f(2k^2xy+k^2f(z))}$

$s := 2k^2xy + f(z) \rightsquigarrow f(s) = f(s + \underbrace{(k^2-1)f(z)}_{t})$

Escludiamo la periodicità

$f(x+t) = f(x)$

testo $(x, y, z+t) \rightsquigarrow f(\underbrace{z(x-y)}_{\alpha}) = f((z+t)(x-y))$

$f(\alpha) = f(\alpha + \text{qualcosa})$