PreIMO 2018

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

PREIMO 2018 A-M pol

Note Title 5/21/2018

A1. Determinare polinomi $p(x)$, $q(x)$ monici dello stesso grado t.c.

$$[p(x)]^2 - p(x^2) = q(x)$$

1. Casi di grado basso:

deg = 1: $(x+c)^2 - x^2 - c$ ha grado 1

$p(x) = x + c$

$$\cancel{x^2} + \underbrace{2xc} + c^2 - \cancel{x^2} - c \quad \text{ha grado } 1$$

monico $\Rightarrow$ $\boxed{c = 1/2}$

deg = 2, deg = 3... sembra che vada bene solo $x^n + 1/2$

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + O(x^{n-2})$$

$$[p(x)]^2 - p(x^2) = x^{2n} + \underbrace{2a_{n-1} x^{2n-1}} + O(x^{2n-2}) - x^{2n}$$

$= \text{grado } n$

grado troppo alto, dev'essere 0

Ora considero $p(x) = x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \dots$

considero i termini di grado $2n-2$ e superiori, e continuo...

Sia $p(x) = x^n + a_k x^k + O(x^{k-1})$ ⊕

dove $0 \leq k < n$ è il grado del successivo termine $\neq 0$, cioè $k = \max\{k < n : a_k \neq 0\}$

dove $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Ora
$$[p(x)]^2 - p(x^2) = x^{2n} + a_k x^{n+k} + O(x^{n+k-1})$$
$$- x^{2n} - \cancel{a_k x^{2k}}$$

$2k \leq n+k-1$ perché $k < n$

$2k < n+k$ perché $k < n$

ho un termine di grado $n+k$ che non si annulla

$\Rightarrow$ dev'essere $k=0$ o avrebbe grado troppo alto.

⊕ controllo i polinomi della forma $x^n + c$

A2: $n \geq 4$ $a_i, b_i \geq 0$ $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n > 0$

Trovare il max di

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i(a_i+b_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)} = \frac{\overset{A}{\sum a_i^2} + \overset{C}{\sum a_i b_i}}{\underset{B}{\sum b_i^2} + \underset{C}{\sum a_i b_i}}$$

Congettura: $a = (S, 0, 0, \dots 0)$

$b = \left(0, \frac{S}{n-1}, \frac{S}{n-1}, \dots \frac{S}{n-1}\right)$

$$\sum_i a_i b_i \leq \left(\sum_i a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_i b_i^2\right)^{1/2} \quad \text{e simili}$$

<u>non vanno bene</u> perché non preservano uguaglianza

"unsmoothing": sposto cose "contento" e vedo cose succede; ad es. dimostro che $f(x,y) \leq f(x+y,0)$

Altro fatterello utile: $\frac{A+C}{B+C}$ è compreso tra $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{C}=1$

in part., se $A>B$, $\frac{A+C}{B+C} < \frac{A}{B}$

(e il massimo sarà chiaramente con num > den)

e anzi, $\frac{A+C}{B+C}$ è decrescente in C

wlog. suppongo $b_1 = \min(b_i)$.

Confronto $(a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_n)$ con

$(a_1+a_2+\dots+a_n, 0, 0, \dots 0, b_1, b_2, \dots b_n)$

$$A = \sum a_i^2 \leq (a_1+a_2\dots+a_n)^2 + 0^2 + \dots + 0^2 = \hat{A} \qquad B = \hat{B}$$

$$C = \sum_i a_i b_i \geq \sum_i a_i b_1 = (a_1+\dots+a_n)b_1 + 0\cdot b_2 + \dots + 0\cdot b_n = \hat{C}$$

$$\frac{A+C}{B+C} \leq \frac{\hat{A}+C}{B+C} \leq \frac{\hat{A}+\hat{C}}{B+\hat{C}} = \frac{\hat{A}+\hat{C}}{\hat{B}+\hat{C}}$$

$\frac{A+c}{B+c}$ è decrescente in c

$\Rightarrow$ la nuova tupla è sempre migliore

A questo punto la mia funzione è

$$F(a_1+\dots+a_n, 0, 0, \dots 0, b_1 \dots b_n) = \frac{(a_1+\dots+a_n)^2 + (a_1+\dots+a_n)b_1}{(a_1+\dots+a_n)b_1 + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

Ora rimpiazzo $b_2, \dots b_n$ con $\frac{b_2+\dots+b_n}{n-1}, \frac{b_2+\dots+b_n}{n-1}, \dots \frac{b_2+\dots+b_n}{n-1}$

$$\tilde{A} = \hat{A} \qquad \tilde{C} = \hat{C}$$

$$\tilde{B} = \left(\frac{b_2+\dots+b_n}{n-1}\right)^2 \cdot (n-1) + b_1^2 \leq b_2^2 + \dots + b_n^2 + b_1^2 = \hat{B}$$

(AM-QM)

$$\frac{\hat{A}+\hat{C}}{\hat{B}+\hat{C}} \leq \frac{\tilde{A}+\tilde{C}}{\tilde{B}+\tilde{C}} \qquad \text{perché } \tilde{B} \leq \hat{B}$$

$$\frac{b_2+\dots+b_n}{n-1} := S$$

$$f(a_1, \dots a_n; b_1, \dots b_n) \leq f(\overbrace{a_1+\dots+a_n}^{(n-1)S+b_1}, 0, 0, \dots 0; b_1, S, S, \dots S)$$

$$= \frac{[(n-1)S+b_1]^2 + b_1((n-1)S+b_1)}{b_1^2 + (n-1)S^2 + b_1((n-1)S+b_1)} = \frac{2b_1^2 + 3(n-1)Sb_1 + (n-1)^2S^2}{2b_1^2 + (n-1)Sb_1 + (n-1)S^2}$$

Ultimo rimpiazzo da fare: b_1 con 0

A questo punto potete fissare $S=1$ usando omogeneità e fare conti (derivata in b_1 ...) oppure:

Moltiplico e divido per $n-1$

$$=(n-1)\cdot\frac{2b_1^2+3(n-1)Sb_1+(n-1)^2S^2}{2(n-1)^2b_1^2+(n-1)^2Sb_1+(n-1)^2S^2}\overset{?}{\leq}(n-1)\cdot 1$$

che è ovvio perché denom. $\geq$ numer.:

$$2(n-1)^2b_1^2 \geq 2b_1^2$$

$$(n-1)^2Sb_1 \geq 3(n-1)Sb_1 \quad \longleftarrow \text{ qui sto usando } \boxed{n\geq 4}$$

$$(n-1)^2S^2 \geq (n-1)^2S^2 \qquad (\text{il caso } n=3 \text{ è diverso})$$

Mettendo insieme tutto:

$$f(a_1,\dots a_n;b_1,\dots b_n)\leq f(a_1+a_2+\dots+a_n,0,0\dots0;b_1+b_2+\dots+b_n)$$

$$\leq f(\overbrace{a_1+a_2+\dots+a_n}^{b_1+S(n-1)},0,\dots0;b_1,S,S,\dots S)$$

$$\leq f(S(n-1),0,\dots0;0,S,S,\dots S)=n-1$$

- tutte le tuple sono $\leq n-1$
- $\exists$ tuple che fa $n-1$

$\Rightarrow$ il max è $n-1$.

A3. Sia $g(x)$ polinomio di grado ≥ 2, con tutti i coefficienti positivi. Trovare $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ t.c.

$P(x,y)$: $f[f(x)+g(x)+2y] = f(x)+g(x)+2f(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^+$

(⚠ $\mathbb{R}^+$ non contiene lo 0)

Idea: $f(x+\text{qualcosa}) = f(x) + \text{qualcosa}$

Fisso la x:

$P(a,y)$: $f(f(a)+g(a)+2y) = f(a)+g(a)+2\cancel{f(y)}$

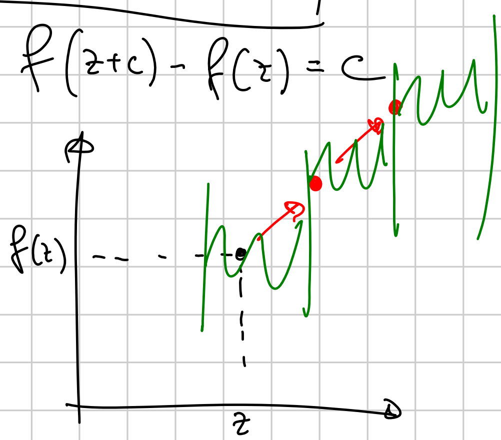
$P(b,y)$: $f(f(b)+g(b)+2y) = f(b)+g(b)+2\cancel{f(y)}$

sottraggo:

$$f(\underbrace{f(a)+g(a)+2y}_{z+\text{qualcosa}}) - f(\underbrace{f(b)+g(b)+2y}_{z}) = \underbrace{f(a)+g(a)-f(b)-g(b)}_{\text{qualcosa}}$$

$(*)$ $\boxed{f(z+c)-f(z)=c}$ se diamo $z := f(b)+g(b)+2y$, $\boxed{\forall z > f(b)+g(b)}$

$\Rightarrow$ $\forall z$ abbastanza grande $f(z+c)-f(z)=c$



Idea (ri-spammata): confronto $P(x+c,y)$ e $P(x,y)$:

$P(x+c,y)$: $f(f(x+c)+g(x+c)+2y) = f(x+c)+g(x+c)+2f(y)$

Per la $(*)$:
$$f\big(f(x)+c+g(x+c)+2y\big)=f(x)+c+g(x+c)+\cancel{2f(y)}$$

$$P(x,y): f\big(f(x)+g(x)+2y\big)=f(x)+g(x)+\cancel{2f(y)}$$

sottraggo:
$$\underbrace{f\big(f(x)+c+g(x+c)+2y\big)}_{f(z+\text{qualcosa})}-\underbrace{f\big(f(x)+g(x)+2y\big)}_{f(z)}=\underbrace{c+g(x+c)-g(x)}_{\text{qualcosa}}$$

con qualcosa $=\underbrace{g(x+c)-g(x)+c}_{c'}$

$$f(z+c')-f(z)=c' \quad \text{per ogni } z \text{ abbast. grande}$$

c' non dipende più da f!

Scegliendo tanti valori di x, ottengo tanti valori diversi di c'

$c'=g(x+c)-g(x)+c$ è un polinomio di grado $\deg(g)-1$

$\Rightarrow$ può assumere tutti i valori $[M,\infty)$ per un certo M

Se so $f(u)$, posso calcolare $f(v)$:

$$f(u)=f(u+18000M)-18000M=$$
$$=f\big(v+(u+18000M-v)\big)-18000M=$$

$$= f(v) + u + 18000M - v - 18000M =$$

$$= f(v) + u - v$$

$$\Rightarrow f(u) = f(v) + (u - v) \quad \text{per ogni } v$$

$\Rightarrow f$ è della forma $f(x) = x + a$

Posso sostituire e vedere quali vanno bene $\rightarrow$ finito!

A1. $a, b, c > 0$

$$\sum_{cyc} \frac{ab^2}{a^2 + 2b^2 + c^2} \leq \frac{a+b+c}{4}$$

Disug. ciclica non simmetrica

già $\underset{a+b+c=1}{\max} \underbrace{\sum ab^2}$ è non banale

Versione più semplice:

$$(*) \qquad ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \cdot \frac{1}{3}$$

- $ab^2 + bc^2 = b(ab + c^2) \leq b\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + c^2\right)$

$$2ab^2 + bc^2 = b(2ab + c^2) \leq b(a^2 + b^2 + c^2)$$

sommo ciclicamente:

$$(2ab^2 + bc^2) + (2bc^2 + ca^2) + (2ca^2 + ab^2) \leq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

(*) $3(ab^2+bc^2+ca^2) =$

Scritto "da soluz. ufficiale":

$\frac{2}{3}ab^2+\frac{1}{3}bc^2 \le b(a^2+b^2+c^2)$, sommo ciclicamente

$$\sum_{cyc} \frac{ab^2 + a(a^2+2b^2+c^2) - a(a^2+2b^2+c^2)}{a^2+2b^2+c^2} \overset{?}{\le} \frac{a+b+c}{4}$$

$=a$

$$\sum_{cyc} a - \frac{a(a^2+b^2+c^2)}{a^2+2b^2+c^2} \overset{?}{\le} \frac{a+b+c}{4}$$

$$\sum_{cyc} \frac{a(a^2+b^2+c^2)}{a^2+2b^2+c^2} \overset{?}{\ge} \frac{3}{4}(a+b+c)$$

$$\sum_{cyc} \frac{a}{a^2+2b^2+c^2} \overset{?}{\ge} \frac{3(a+b+c)}{4(a^2+b^2+c^2)}$$

Devo trovare un modo di gestire il denominatore:

$$a^2+2b^2+c^2 = (a^2+b^2+c^2)+b^2 \ge 2\sqrt{(a^2+b^2+c^2)\,b^2},$$

$$\sum_{cyc} \frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2} \le \sum_{cyc} \frac{ab^2}{2\sqrt{(a^2+b^2+c^2)b^2}} \overset{\text{HOPE}}{\le} \frac{a+b+c}{4}$$

NON PUÒ FUNZIONARE PERCHÉ NON RISPETTA COND. UGUAGLIANZA:

se $a=b=c$, vale l'uguaglianza in LHS $\le$ RHS ma non in $LHS \leq CHS$

Aggiusto: infilo coefficienti in modo che valga l'uguaglianza quando $a=b=c$

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + b^2 \geq 4\sqrt[4]{b^2 \cdot \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3}$$

$$= 4\sqrt{b} \cdot \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{3/4}$$

$$LHS \leq \sum_{cyc} \frac{a\cancel{b^2}^{3/2}}{\cancel{4}\cancel{\sqrt{b}}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{3/4}} \overset{?}{\leq} \frac{a+b+c}{\cancel{4}}$$

$$\sum ab^{3/2} \overset{HOPE}{\leq} (a+b+c)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{3/4}$$

$$ab^{3/2}+bc^{3/2} = b\left(\underset{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{\underset{\uparrow}{a\sqrt{b}}} + c^{3/2}\right) \leq b\left(\frac{2a^{3/2}+b^{3/2}}{3} + c^{3/2}\right)$$

$$ab^{3/2}+\frac{2}{3}bc^{3/2} = b\left(a\sqrt{b}+c^{3/2}\right) \leq b\left(\frac{2a^{3/2}+b^{3/2}+2c^{3/2}}{3}\right)$$

(BUNCHING)

$$\leq \frac{5}{3}b \cdot \left(\frac{a^{3/2}+b^{3/2}+c^{3/2}}{3}\right)$$

sommo ciclicamente:

$$\frac{5}{3}\sum_{cyc} ab^{3/2} \leq \frac{5}{3}(a+b+c)\left(\frac{a^{3/2}+b^{3/2}+c^{3/2}}{3}\right)$$

$$\leq \frac{5}{3}(a+b+c)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{3/4}$$

MEDIE

SCEGLIERE COEFF PER AVERE COND. UGUAGLIANZA OPPORTUNE: "POINT OF INCIDENCE"

ALTRA SOLUZIONE:

$$\sum_{cyc} \frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2}$$

SPEZZO IL DEN. NELLA SOMMA DI DUE:

$$\frac{1}{a^2+2b^2+c^2} \leq \frac{\alpha}{a^2+b^2+c^2} + \frac{\beta}{b^2}$$

$$\sum \frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2} \leq \alpha \sum \frac{ab^2}{a^2+b^2+c^2} + \beta \sum \frac{ab^2}{b^2}$$

$$\leq \alpha \cdot \frac{a+b+c}{3} + \beta(a+b+c)$$

$$\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad 4xy \leq (x+y)^2$$

+ sistema coefficienti per avere uguaglianza

PREIMO 2018 - ALGEBRA POMERIGGIO

Note Title 5/21/2018

PROBLEMA 5 $f(f(y)+x^2+1)+2x=y+(f(x+1))^2$

$x=0$ $\quad f(f(y)+1)=y+(f(1))^2 \Rightarrow f$ bigettiva

$f(f(z)+x^2+1)+$ ecc.

Scelgo y,z con WLOG $f(y)\geq f(z)$

Trovo x t.c. $x^2=f(y)-f(z)$: sostituisco e ottengo

$$y+(f(1))^2=f(f(y)+1)=f(f(z)+x^2+1)=z-2x+(f(x+1))^2$$

quindi $\quad y-z=-(f(1))^2-2x+(f(x+1))^2$

Se $f(y)-f(z)=f(s)-f(t)$ allora $y-z=s-t$

Scelgo y,x qualsiasi. Per bigettività, trovo z t.c.
$f(z)=f(x)+f(y)-f(0)$

Allora ho $f(z)-f(y)=f(x)-f(0)$ da cui $z-y=x-0$
cioè $z=x+y$.

Quindi ho dimostrato $f(x+y)=f(x)+f(y)-f(0)$

A questo punto il testo si "spezza"

$$\underbrace{f(f(y)+x^2+1)}_{f(f(y))+f(x^2+1)-f(0)}+2x=y+(f(x+1))^2$$

Quindi ho $\quad f(f(y))-y=(f(x+1))^2-2x-f(x^2+1)+f(0)$

Chiamo d la costante a cui i due membri sono uguali e ho che

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0) & (*) \\ f(f(y)) - y = d \\ (f(x+1))^2 - 2x - f(x^2+1) + f(0) = d & (**) \end{cases}$$

Chiamo $a = f(0)$
$b = f(1)$
$c = f(2)$

$(*)$ $x = y = 1$ ottengo $f(2) = 2f(1) - f(0)$ $\quad c = 2b - a$

$(**)$ $x = 0$ $\quad b^2 = b + d$

$x = 1$ $\quad c^2 = c + d + 2$

$x = -1$ $\quad a^2 = c + d - 2$

RISOLVENDO uno riesce a trovare $\boxed{f(0) = 0}$ $\quad f(1) = 1 \quad d = 0$.

$f(x+y) = f(x) + f(y) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

$(f(x+1))^2 = f(x^2+1) + 2x$ $\quad$ [illegible] $(f(x)+1)^2 = f(x^2) + 1 + 2x$

cioè $\quad f(x)^2 + 2f(x) = f(x^2) + 2x$

in questa metto $-x$ al posto di x
e trovo $(f(x))^2 - 2f(x) = f(x^2) - 2x$

sottraendo trovo $4f(x) = 4x$
$f(x) = x$.

— o — o —

Idea di alternativa per ottenere la Cauchy:

$f(f(y)+1) = y + (f(1))^2$ $\quad$ la rimetto dentro al testo sostituendo $f(y)+1$ al posto di y nel testo:

$$f(\boxed{f(f(y)+1)} + x^2 + 1) + 2x = f(y) + 1 + (f(x+1))^2$$

$$f(y + x^2 + 1 + (f(1))^2) = f(y) + 1 + (f(x+1))^2 - 2x$$

metto $y = -1-(f(1))^2$ e ho $f(x^2) = \boxed{(f(x+1))^2 - 2x} - (f(1))^2$

ottiene $f(y+x^2+1+(f(1))^2) = f(y)+1+f(x^2)+(f(1))^2$

$$f(y+x^2+c) = f(y)+f(x^2)+c$$

PROBLEMA 6

$$p(x)^3 - q(x)^2 = r(x) \qquad \deg r = 1$$

$$3\,p(x)^2\,p'(x) - 2\,q(x)\,q'(x) = r'(x) \qquad 2\deg q = 3\deg p$$

$$3\,\underbrace{p(x)^3}_{\substack{\shortparallel \\ r(x)+(q(x))^2}}\,p'(x) - 2\,p(x)\,q(x)\,q'(x) = p(x)\,r'(x)$$

$$3\,r(x)\,p'(x) + 3\,(q(x))^2\,p'(x) - 2\,p(x)\,q(x)\,q'(x) = p(x)\,r'(x)$$

Guardo mod $q(x)$ e trovo $3\,r(x)\,p'(x) - p(x)\,r'(x) \equiv 0$

Segue che $3\,r(x)\,p'(x) = p(x)\,r'(x)$

$p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ il termine dominante è:

$r(x) = r_1 x + r_0$ a sinistra $3 r_1 a_n \cdot n\, x^n$; a destra $a_n r_1 x^n$ $\Rightarrow 3n = 1$ ASSURDO

Teo (Mason – Stothers) $a(x) + b(x) + c(x) = 0$ a, b, c a due a due coprimi

Allora $\max\{\deg a, \deg b, \deg c\} \le \deg(\underbrace{\mathrm{rad}(abc)}) - 1$

il polinomio abc tolti i fattori irriducibili ripetuti

Nel nostro caso $\underset{2\deg q}{\underset{=}{\deg q^2}} \le \deg(\mathrm{rad}(p^3 q^2 r)) - 1 \le$

$\le \deg(pqr) - 1 = \deg p + \deg q + \deg r - 1$

$\Rightarrow \deg q \le \deg p$

PROBLEMA 7

$a, b, c > 0$

$$\sum_{cyc} \sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-ab)}{2}} \le \sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{a+b} \le \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\sum_{cyc} \frac{1}{a+b}\right)$$

$$\sum \frac{a^2+b^2}{a+b} \le \frac{\left(\sum a^2+b^2\right)\left(\sum \frac{1}{a+b}\right)}{3}$$

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \le \frac{a^2+c^2}{b+c}$$

Chebyshev

$$\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-ab)}{2}} \le \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

$$\iff (a^2+b^2-ab)(a+b)^4 \le 2(a^2+b^2)^3$$

$$\iff (a-b)^4(a^2+b^2+ab) \geq 0$$

Soluzione alternativa

$$\sum \sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} \leq \frac{2}{3}\left(\sum a^2\right)\left(\sum \frac{1}{a+b}\right)$$

Uso AM-GM su LHS: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}(a^2-ab+b^2)} \leq \frac{\frac{a^2+b^2}{2}+a^2-ab+b^2}{2}$

Sostituisco e resta da mostrare $\sum \sqrt{\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}} \leq \frac{2}{3}\left(\sum a^2\right)\left(\sum \frac{1}{a+b}\right)$

Uso AM-HM su RHS: $\sum \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{\sum(a+b)} = \frac{9}{2}\frac{1}{\sum a}$

Voglio mostrare che $\sum \sqrt{\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}} \leq 3\frac{\sum a^2}{\sum a}$

NON SO
SE FUNZIONA ...
SORRY

$$\sum \sqrt[4]{\frac{(a^2-ab+b^2)(a^2+b^2)}{2}} \leq \frac{2}{3}\left(\sum a^2\right)\left(\sum \frac{1}{a+b}\right)$$

IDEA 1: LAVORO SU LHS E CERCO DI RENDERLO SIMILE A RHS

IDEA 2: IL CONTRARIO!

$$\sum \sqrt{\frac{(a^2-ab+b^2)(a^2+b^2)}{2}} \leq \frac{1}{3}\left(\sum a^2+b^2\right)\left(\sum \frac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}\right)$$

$$\left(\sum \text{cose}\right)^2 \overset{CS}{\leq} RHS \quad \text{NON FUNZIONA}$$

$$\sum (a^2+b^2)\left(\frac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}\right) \overset{\text{CHEBYSHËV}}{\leq} RHS$$

$$\geq \sqrt[4]{\frac{(a^2-ab+b^2)(a^2+b^2)}{2}}$$

$$\sum \sqrt{\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}} \le 3\,\frac{\sum a^2}{\sum a}$$

Uso AM-QM on LHS: $\displaystyle\sum \sqrt{\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}} \le \sqrt{3}\sqrt{\sum \frac{3a^2-2ab+3b^2}{4}}$

Quindi resta da mostrare che $\displaystyle\sqrt{\sum 3a^2 - \sum ab} \le \sqrt{6}\,\frac{\sum a^2}{\sum a}$

Ora elevo al quadrato e faccio il conto. Per comodità $\sum a^2 = A$, $\sum ab = B$

$$(3A-B)\left(\sum a\right)^2 \overset{?}{\le} 6A^2$$

$$(3A-B)(A+2B) \le 6A^2$$

$$5AB-2B^2 \le 3A^2$$

Noi sappiamo che $A \geq B$. Diciamo $A = B+h$

$$5B(B+h)-2B^2 \le 3(B+h)^2$$

$$5B^2+5Bh-2B^2 \le 3B^2+6Bh+3h^2$$ che è vera.

PROBLEMA 8 $\qquad f(f(x)+f(y)+f(z)) = f(f(x)-f(y)) + f(f(z)+2xy) + 2f(z(x-y))$

Testo (x,y,z) – Testo (y,x,z)

$$\left[f(f(x)-f(y)) - f(f(y)-f(x))\right] + 2\left[f(z(x-y)) - f(z(y-x))\right] = 0$$

$$z=0 \implies f(f(x)-f(y)) = f(f(y)-f(x))$$

$$\implies f(z(x-y)) = f(z(y-x)) \implies f(-x)=f(x)$$

Testo (x,y,z) – Testo $(x,-y,z)$

$$\left[f(f(z)+2xy) - f(f(z)-2xy)\right] + 2\left[f(z(x-y)) - f(z(x+y))\right] = 0$$

$$z=0 \qquad f(f(0)+2xy) = f(f(0)-2xy)$$

$$f(f(0)+x) = f(f(0)-x)$$

$$f(f(0)-x) = f(x-f(0))$$

$$f(x+2f(0)) = f(x)$$

Testo(x,x,z) $\quad f(f(z)+2f(x)) = f(0) + f(f(z)+2x^2) + 2f(0)$

$$x=0 \qquad \underset{\underset{\displaystyle f(f(z))}{\parallel}}{f(f(z)+2f(0))} = 3f(0) + f(f(z)) \implies f(0)=0$$

$$f(f(z)+2f(x)) = f(f(z)+2x^2)$$

Proviamo a vedere che succede se $f(a)=f(b)$

Testo(x,y,a) – Testo(x,y,b)

$$f(a(x-y)) = f(b(x-y))$$

Quindi $f(a)=f(b) \implies f(\lambda a) = f(\lambda b) \quad \forall\lambda$.

Supponiamo $f(x)=f(x')$ $\quad f(y)=f(y')$

Provo a scrivere Testo (x,y,z) – Testo (x',y',z)

Viene $\left[f(f(z)+2xy)-f(f(z)+2x'y')\right]+2\left[f(z(x-y))-f(z(x'-y'))\right]=0$

Imponendo "forzo" che valga $f(z)+2xy=f(z)+2x'y'$

Se $f(a)=f(b)$ scelgo λ,μ e metto $x=\lambda a$ $y=\mu b$

$x'=\lambda b$ $y'=\mu a$

metto $z=1$: resta $f(\lambda a-\mu b)=f(\lambda b-\mu a)$

$\forall u,v$ riesco a risolvere $\begin{cases}\lambda a-\mu b=u\\ \lambda b-\mu a=v\end{cases}$

$\det = a^2-b^2$

Se $a^2-b^2\neq 0 \Rightarrow \forall u,v$ trovo $\lambda,\mu \Rightarrow f(u)=f(v)$

Quindi $f(a)=f(b) \Rightarrow a=\pm b$

$$f(f(z)+2f(x))=f(f(z)+2x^2)$$

Fisso x e faccio 2 casi : se $\exists z$ t.c. viene col $+$

e allora ho $f(x)=x^2$

se no $\forall z$ vale col $-$

$\forall z$ $f(z)+2f(x)=-f(z)-2x^2$

$\Rightarrow f$ costante.

$f(a)=f(b) \Rightarrow f(\lambda a)=f(\lambda b)$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

$x:=\lambda b$, $K:=\frac{a}{b}$ $\rightsquigarrow$ $f\left(\frac{a}{b}\cdot\lambda b\right)=f(\lambda b)$

$f(Kx)=f(x)$ $\forall x$

testo (Kx, Ky, z) $\rightsquigarrow$ $f(2K^2xy+f(z))=\underbrace{f(2xy+f(z))}_{f(2K^2xy+K^2f(z))}$

$$s := 2k^2xy + f(z) \rightsquigarrow f(s) = f(s + \underbrace{(k^2-1)f(z)}_{t})$$

Escludiamo la periodicità

$$f(x+t) = f(x)$$

testo $(x, y, z+t) \rightsquigarrow f(\underbrace{z(x-y)}_{\alpha}) = f((z+t)(x-y))$

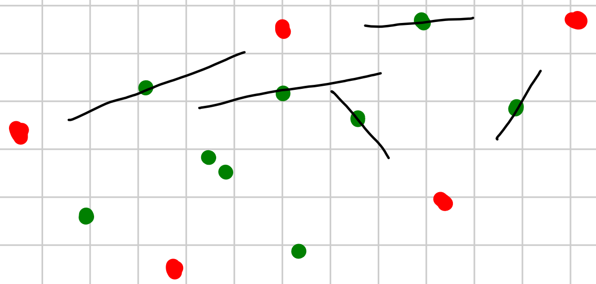
$$f(\alpha) = f(\alpha + \text{qualcosa})$$

Prelmo 2018 C mattina

Note Title 5/22/2018

C1

Ci sono punti n sul piano

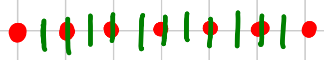


Quanti punti m al min?

Soluzione:

Parte costruttiva $(\leq)$

Costruisco i punti allineati e con coord intere



$\Downarrow$ sono soddisfatto delle sovrapposizioni

$$\min \leq 2n-3$$

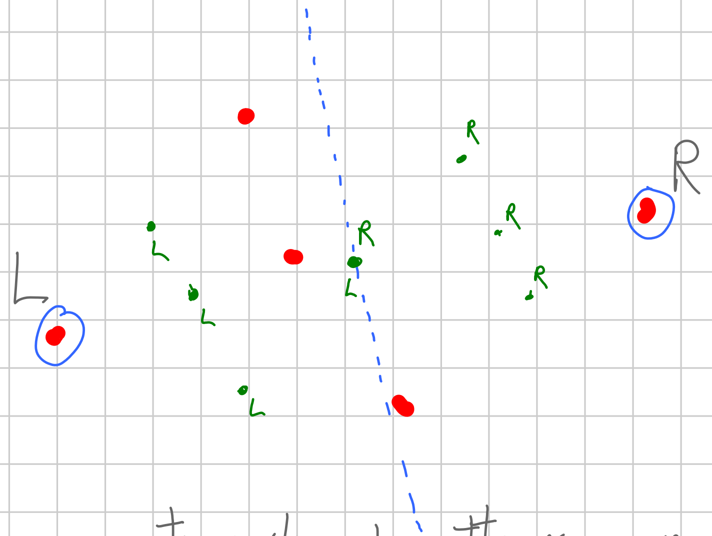
Parte negativa $(\geq)$

Idea generale portata da casa:

cerco qualcosa di estremale

Idea particolare è:

prendo (una delle) coppie di punti $\boxed{\text{più distanti}}$



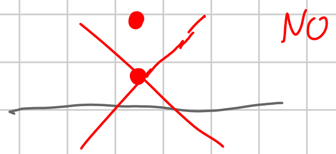
Osservo che i punti medi che ottengo con L stanno a sx di mentre quelli che ottengo con R stanno a dx di (sto usando la massimalità della distanza LR)

Inoltre 1 solo punto • è contato 2 volte (quello di LR)

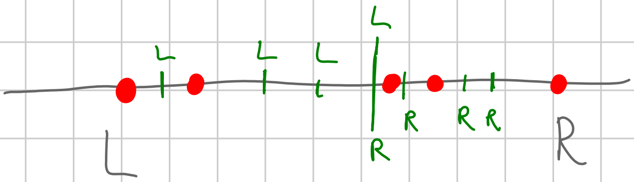
Quindi ho almeno $(n-1)+(n-1)-1$ p.ti medi distinti.

Soluzione alternativa alla parte $\geq$

Proietto tutti i punti • su una retta in modo che non ce ne siano 2 che vanno sullo punto



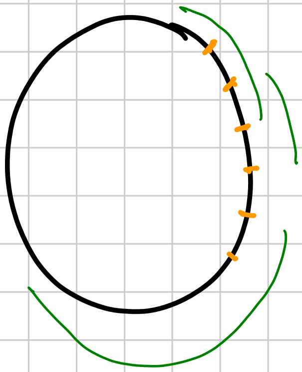
Ora, similmente a prima, ho metà p.ti medi a sx
e metà a dx



Ancora un'alternativa

Per induzione, se ho n punti •, ho almeno
$2n-3$ punti •
Prendo il punto $\boxed{\text{più a sx}}$ (che è unico
a meno di un'opportuna piccola rotazione)
allora considero la conf. di $n-1$ • senza
lui
$\Rightarrow$ mi sono perso per forza almeno 2 punti distinti
(il + a sx, il 2 da sx)
(il + a sx, il 3 da sx)

C2



ho 999 archetti unitari

ci sono d archi

di lungh. $1, 2, \ldots, d$

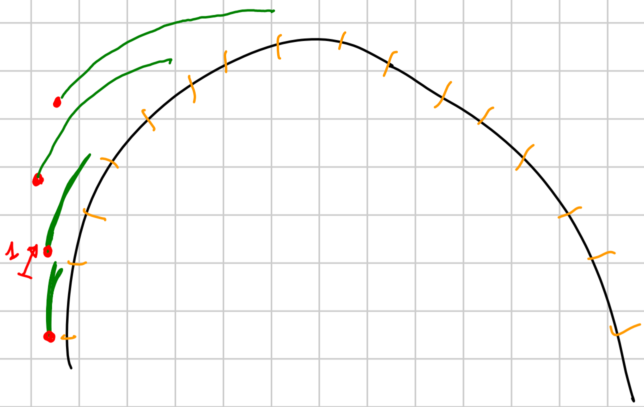
però mai

arco piccolo $\subseteq$ arco grande

max d?

Soluzione

Parte positiva ($\geq$)

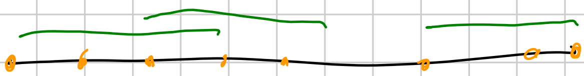


500 ci stanno

Parte negativa ($\leq$)

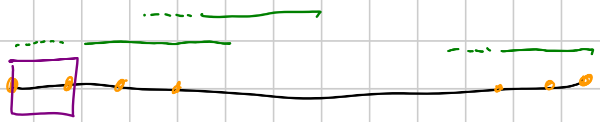
Oss: l'arco lungo 1 è da solo

allora lo taglio e ottengo



999 e archi di lungh. $2, \dots, d$

Oss: accorcio tutti questi archi di 1 da SX



le lungh. degli archi sono $1, \dots, d-1$

vale ancora l'ipotesi del non contenimento

rimane scoperto

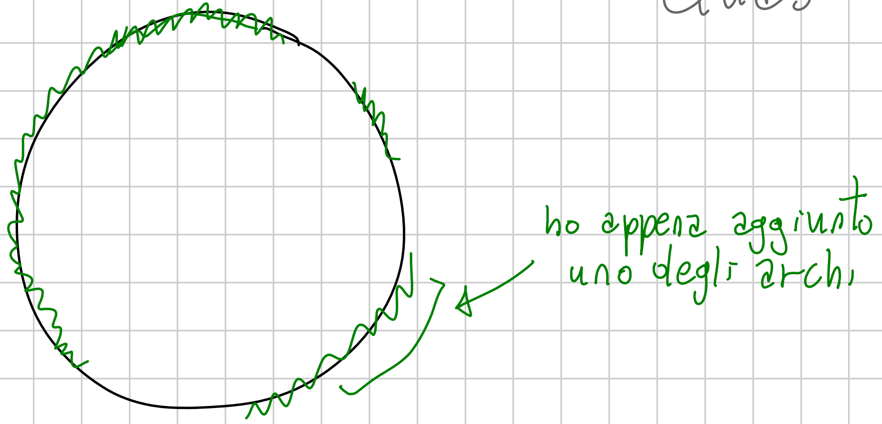
Per ricondurmi all'ip. ind. ricongiungo i 2 estremi

Alternativa alla parte negativa ($\leq$)

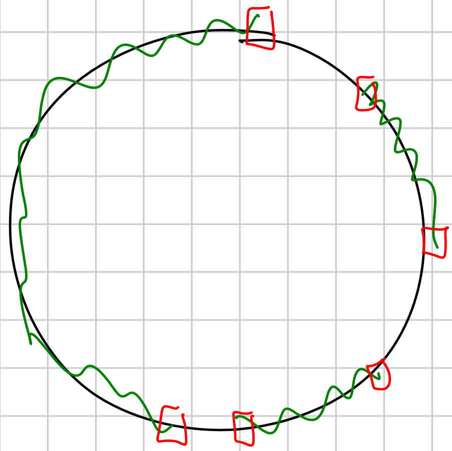
Aggiungo un arco alla volta, stando attento ad aggiungere quello più lungo all'inizio

Dimostro che i segmentini unitari coperti dall'unione aumentano di almeno 1 ogni volta

Quasi...



Considero un qualsiasi sottoins. di archi che contenga anche quello da d (≥ 501) e anche un altro



$\exists$ un estremo $\square$ che non $\in$ all'arco lungo d

lo tolgo $\Rightarrow$ l'area verde scende di 1 (almeno)

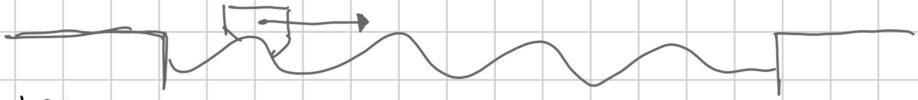
Ora basta controllare l'area verde con tutti gli archi e quella in cui c'è solo l'arco da 501

Hint per soluzione alternativa (al $\leq$)

Disporre gli archi in ordine, in senso orario e stimare di quanto si sposta il primo estremo

e " " l'ultimo " .

C3



100 nani → pesano $1, 2, \ldots, 100$ kg

la barca porta ≤ 100 kg

il vogatore all'indietro è sempre diverso

Riesco a portarli tutti ?

Soluzione

No!

[Oss. slegata: con 99 al posto di 100 si riesce.]

Stimo la seguente quantità: il peso spostato in avanti

$$\underbrace{1+\ldots+100}_{\text{nani finali}} + \underbrace{1+\ldots+(v-1)}_{\text{quelli che voglio riportare indietro}} \boxed{\leq} \text{peso avanti} \boxed{\leq} 100 \cdot \underbrace{v}_{\text{(viaggi in avanti)}}$$

$$\binom{101}{2} + \binom{v}{2} \leq 100\, v \quad \text{-----} \quad (v-100)(v-101) \leq 0$$

$$\Rightarrow v = \begin{cases} 100 \\ 101 \end{cases}$$

e in ciascuno dei casi ho $\boxed{1^{\smile} =}$

$\Rightarrow$ Tutti i viaggi in andata sono carichi a 100

" " ritorno portano esatt. 1 nano da 1 a V−1

e tutti i nani fanno esatt. 2 viaggi in andata (tranne al più quello da 100)

Ora si osserva che 100 viaggia da solo

99 viaggia con 1 (2 volte)

$\Downarrow$

98 " 2 ...

$\Downarrow$

97 3 ..

⋮

51 " 49 "

e rimane spaiato il tizio da 50

Soluzione alternativa di qualcuno ...

Dividiamo i nani in 2 gruppi: PICCOLI $1, \dots, 49$ | GRANDI $\underbrace{50, \dots, 100}_{51}$

Q = #(GRANDI sulla sponda destra) + #(PICCOLI che possono ancora vogare)

Q non aumenta dopo una coppia di viaggi andata/ritorno

invece con l'ultimo viaggio può aumentare di 1.

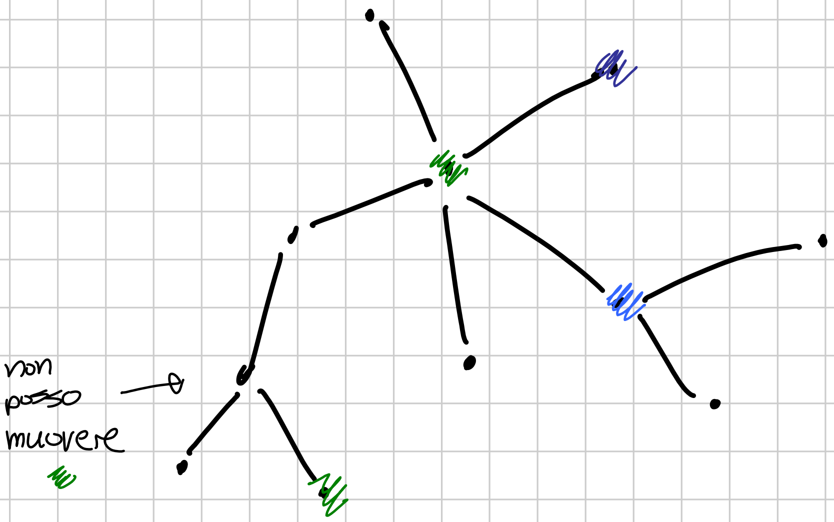
$Q(\text{inizio}) = 0 + 49 = 49$

$Q(\text{fine}) \leq 50$

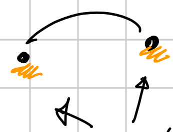
$\Downarrow$

meno GRANDI a dx

C4



A turno colorano i vertici con in modo che non ci sia mai



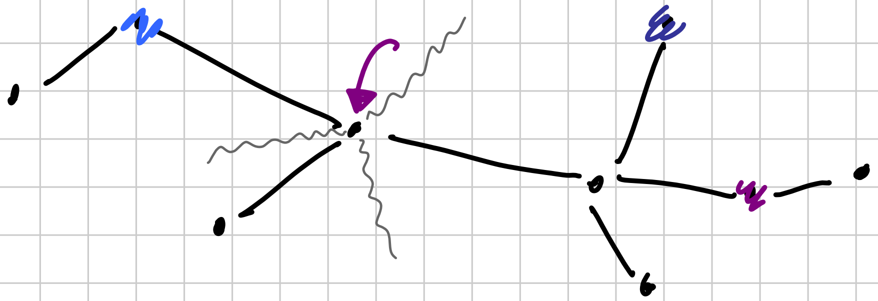
NON lo stesso colore

Alberto vince se tutti i vertici sono colorati

altrimenti ... (si ricomincia?)

Soluzione

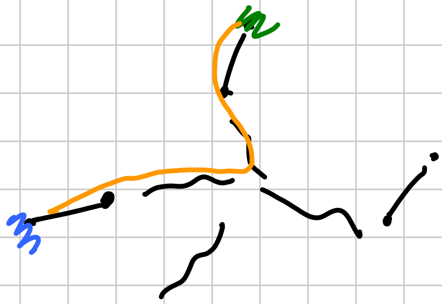
Oss. fondamentale: un vertice colorato taglia l'albero



gli alberi rimasti non si parlano.

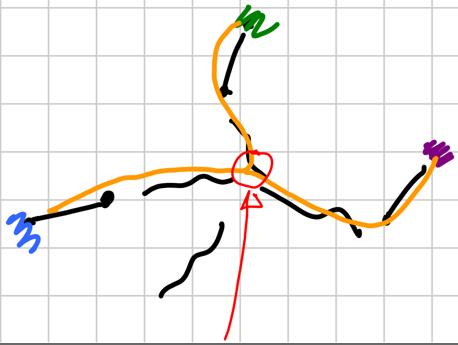
Ora gioco su alberi che hanno solo alcune foglie colorate. Se Alberto riesce a controllare il numero di foglie colorate (≤ 2) allora vince.

caso 2 colorate



in tal caso coloro un vertice sul percorso

caso $\exists$ componente con 3 foglie



muovo sul punto e vinco!

PREIMO - COMBINATORIA P

Note Title 5/22/2018

$\boxed{C5}$ $a_1, \dots, a_{2017}$ 2017 scatoloni

OSS. 2017 è primo $\Rightarrow 2017 \mid 43 \sum a_i \Rightarrow 2017 \mid \sum a_i$

OSS. a_i funziona $\Rightarrow a_i + k$ funziona

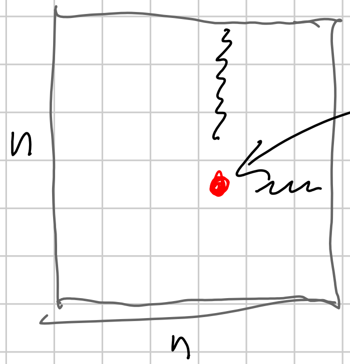
WLOG posso supporre $a_i \in \mathbb{Z}$ $\sum a_i = 0$

$a_1 = 42$ $a_2, \dots, a_{43} = -1$ $a_i = 0$ per $i > 43$

A ogni mossa ciclo i primi 43 scatoloni: dopo 43 mosse ho finito. D'altra parte, uno scatolone inizia con 42 sassolini, quindi almeno 43 mosse servono.

Per avere $a_i > 0$, mi basta aggiungere 6749.

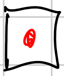
$\boxed{C6}$

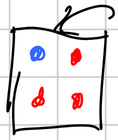


Tutte le caselle sono colorate

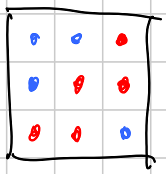
rossa nella zona zigrinata non ci sono contemp. caselle rosse sopra e a destra

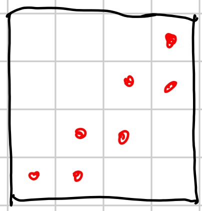
Qual è il minimo numero di colori per cui questo è possibile?

n=1  1 colore

2  non può essere rossa

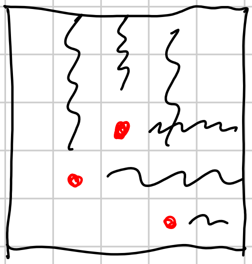
2 colori

3  2 colori

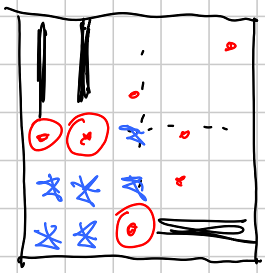
 2 sembra non bastare

Se uso k colori avrò in media $\frac{n^2}{k}$ caselle dello stesso colore $\overset{\text{Pigeonhole}}{\rightsquigarrow}$ $\lceil \frac{n^2}{k} \rceil$ caselle con uno stesso colore

Approccio quantitativo dubbio.



ogni casella colorata vieta una regione così.



Ah! Ma se  allora non ho

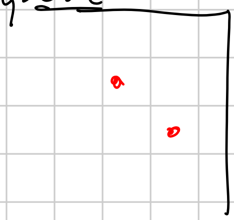
Allora per ogni casella rossa scelgo o la semiriga o la semicolonna libera (a caso se sono entrambe libere)

Ora, per ogni colonna c'è al più 1 casella che vieta la semicolonna
" " riga " " " " " " " semiriga

Quindi le caselle rosse sono al più 2n.

Anzi, almeno una casella (la più in alto a destra) o una di queste

vieta sia la semicolonna sia la semiriga.



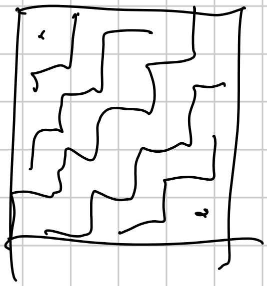
$\Rightarrow 2n-1$

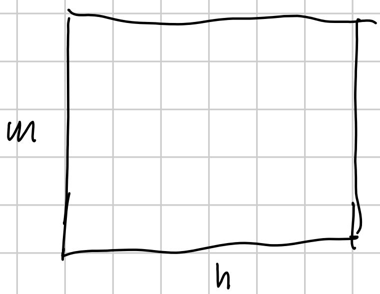
Quindi i colori sono almeno $\left\lceil \frac{n^2}{2n-1} \right\rceil \sim \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

si tratta da controllare la parità:

n dispari	$n=2k+1$	almeno $k+1$
n pari	$n=2k$	almeno $k+1$

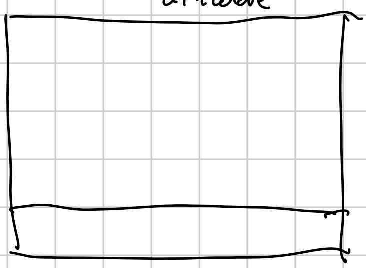
E se ho $k+1$ colori?





Induzione su $m+n$ $\quad m+n \leq 3$ a mano

Tesi $\#$ caselle di 1 colore $\leq m+n-1$

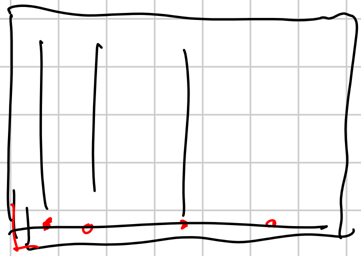


passo induttivo: prendo 1 colore e l'ultima riga

a) non ci sono caselle rosse tolgo tutta la riga

b) ci sono

tolgo l'ultima riga e le colonne



$\leftarrow$ k caselle rosse

delle caselle rosse tranne la più destra

Quante caselle rosse ho tolto? k

Quante righe e col. ora? $k-1$ col. in meno
1 riga in meno

$\Rightarrow m+n$ è calato di k anche lui $\square$

occhio alla dim.!

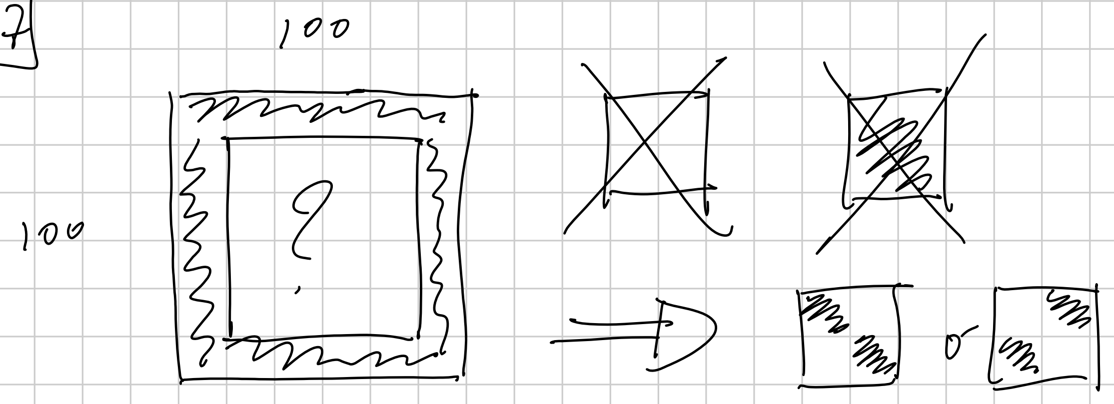
Coppie di caselle uguali sulla stessa riga $\geq n$
(su tutta la tabella)

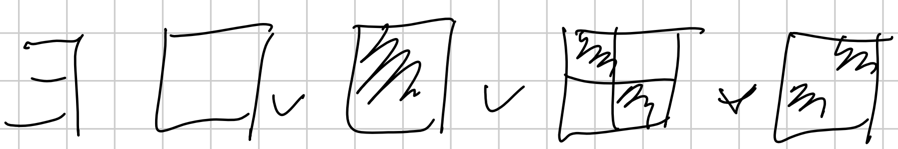
con casella più a sin. in colonne distinte

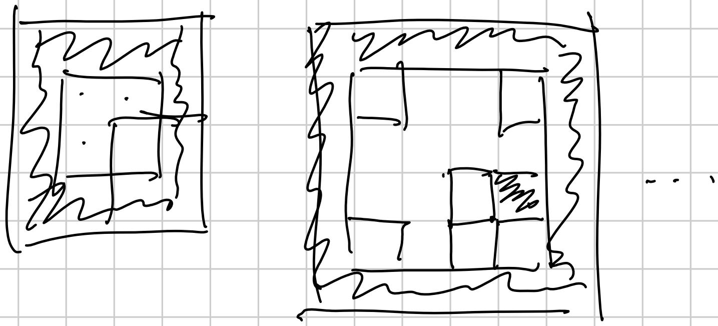
ma ci sono solo $n-1$ colonne in cui può stare la casella più a sinistra di una coppia!

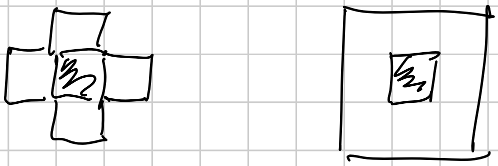
se ci sono k caselle sulla stessa riga conto solo $k-1$ coppie.

$\boxed{C7}$

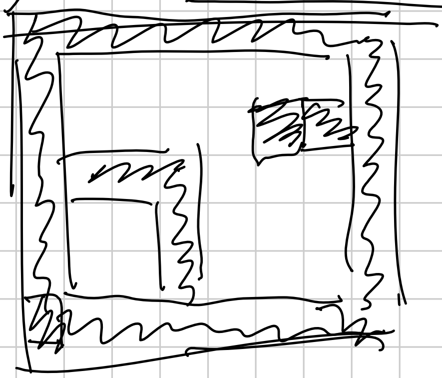


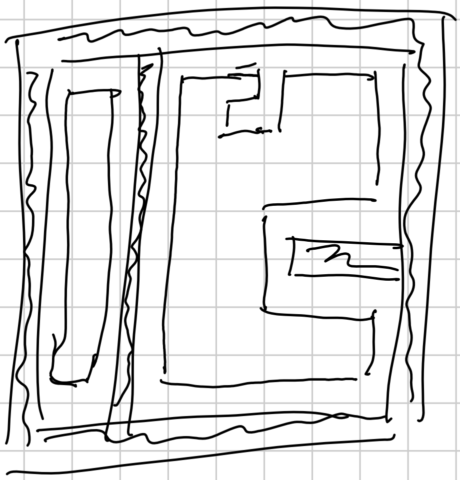


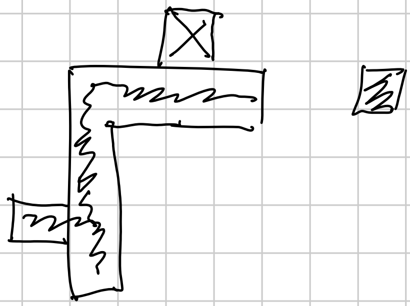


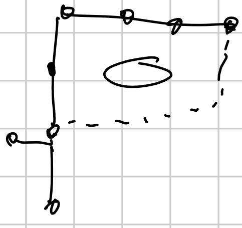


connesse adiacenti

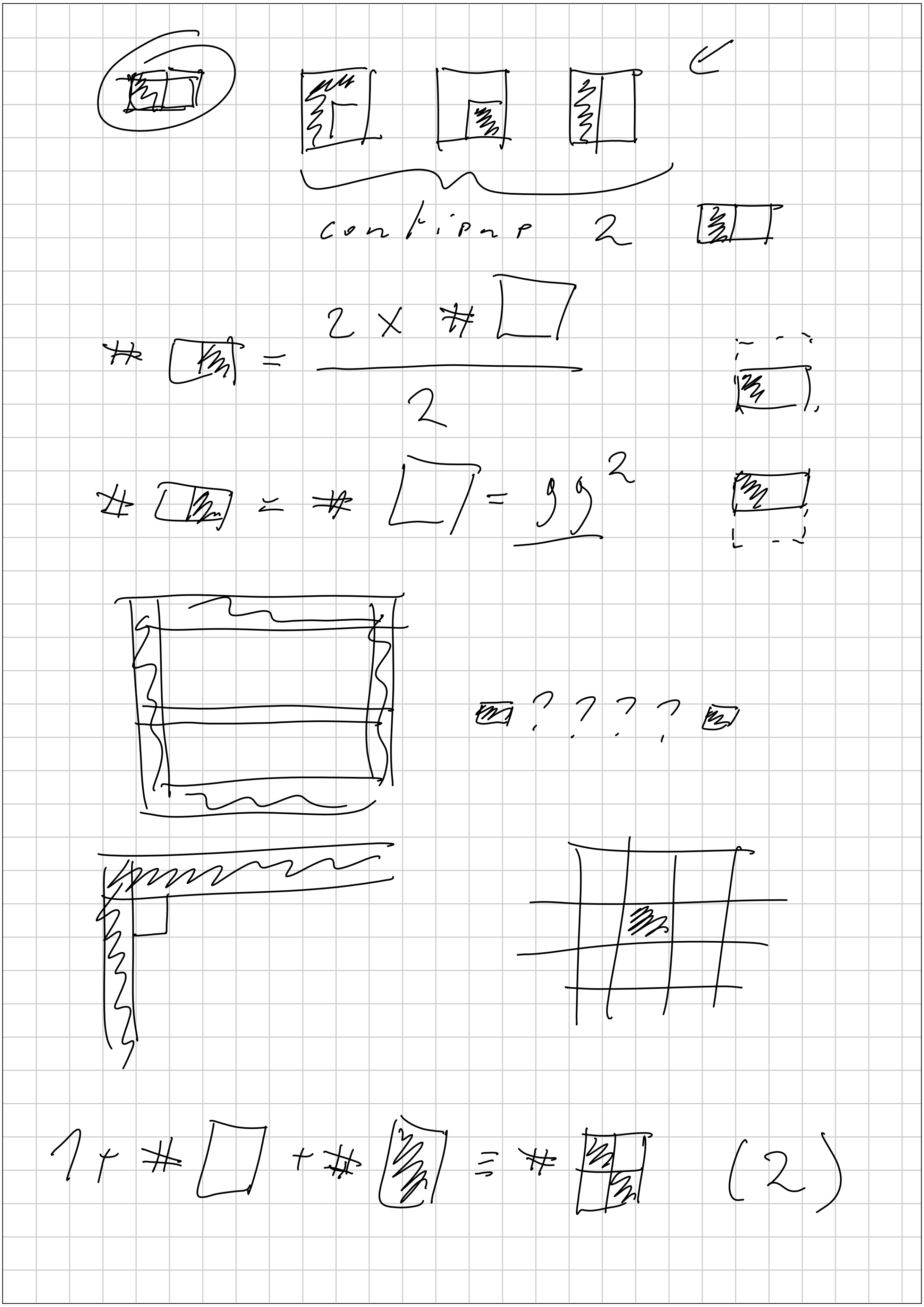








$$A + \frac{P}{2} = \text{dispari}$$


contiene 2
2 × #
2
= # = 99²
1 + # + # = #
(2)

C8 campione in carica

s_1 s_2 $---$ s_n

Ad ogni domanda chi risponde giusto +2 pt

" sbagliato +0 (se sfidan) / +1 (se campione)

Dimostrare che se il campione ha un vantaggio di almeno $2^{n-2}+1$, riesce a tenere un vantaggio fino alla fine.

(Non) Soluzione

guardo la differenza di punti tra il campione e lo sfidante migliore ---

guardo la somma delle differenze ...

guardo una qualunque media di queste differenze...

Soluzione vera

Oss: posso assumere che il campione sbaglia sempre

(se ad un certo punto sta $\leq S_i$ allora levando le domande a cui ha risposto corrett. allora alla fine sta ancora $\leq S_i$)

Oss: traslo i punti guadagnati

$$\begin{cases} +1 & (\text{giusto}) \\ -1 & (\text{sbag, sf}) \\ 0 & (\text{sbag, camp}) \end{cases}$$

Ora dopo ogni domanda, un po' degli sfidanti fanno +1, gli altri fanno −1

Inoltre il campione può far perdere un gruppetto di sfidanti (che hanno dato la stessa risposta).

Strategia: il campione si tiene una lista che può contenere insiemi di sfidanti

ora se un sottoinsieme " dà la stessa risposta e sta sulla lista, allora li faccio perdere e li cancello dalla lista

altrimenti aggiungo quelli che hanno guadagnato il +1 alla lista.

(wlog ?) le risposte possibili sono solo sì o no

Osservo che non capita mai un insieme e il suo complementare nella lista.

Prendo uno sfidante S_i

in un certo momento il suo punteggio è

$-$ Vantaggio del campione $+$ # di volte in cui compare sulla lista

$2^{n-2}+1$ $\quad$ 2^{n-1} (*)

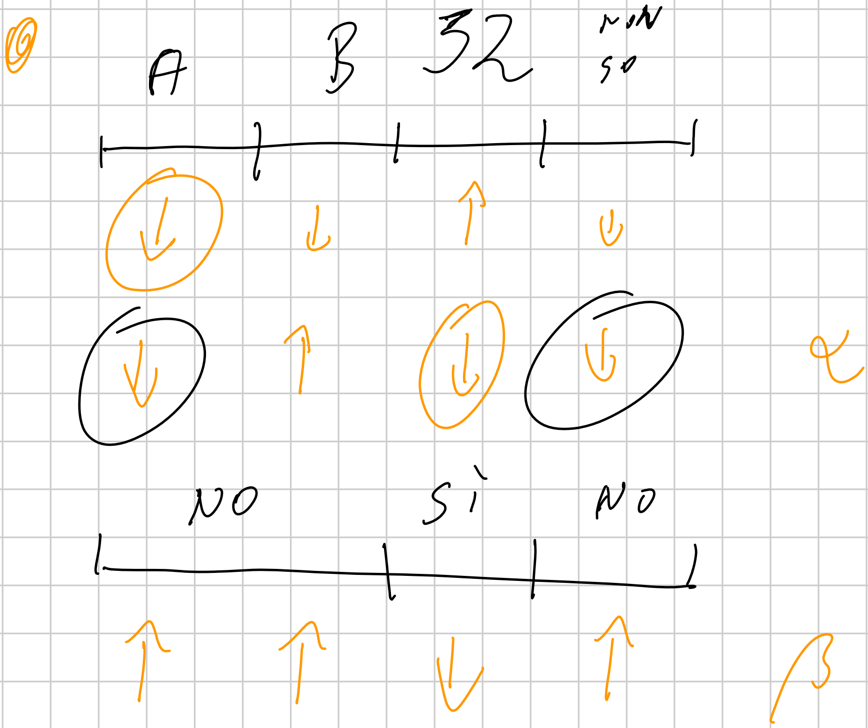
th

< 0

Ritocco la strategia:

Se nessuno dei 2 sottoinsiemi sta sulla lista scelgo quello che non contiene S_1

ora (*) diventa 2^{n-2}

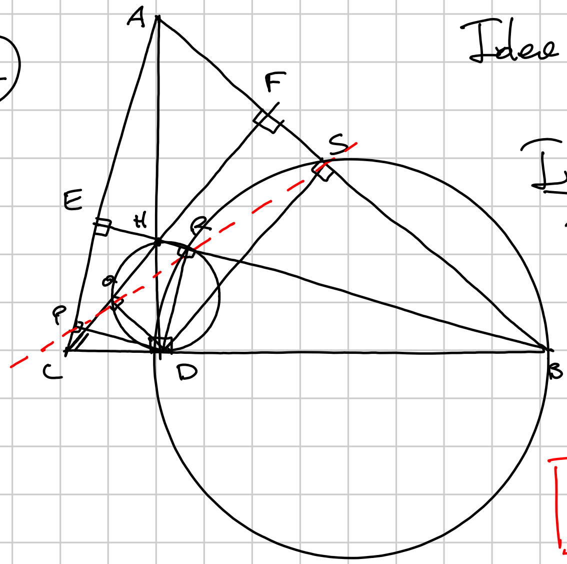


$\beta \geq \alpha$

PreIMO 2018 - Geometria - Morgen

Note Title 5/24/2018

①



Idea 1: DRSB ciclici
PQHR

Idea 2: Angoli :)

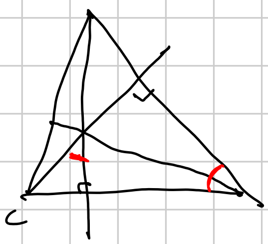
TS $\iff \widehat{DRQ} + \widehat{SRD} = \pi$

QRS
RQP

$\widehat{DRS} = \pi - \widehat{SBD}$

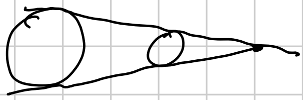
$\boxed{\widehat{SBD} = \widehat{DRQ}}$

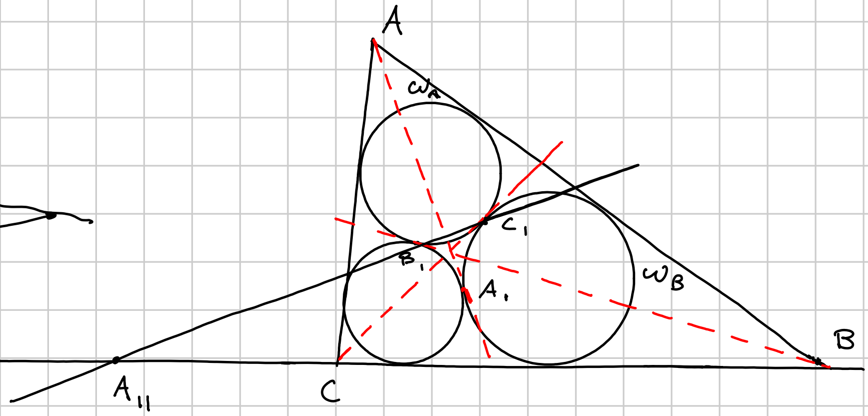
$\widehat{DRQ} = \widehat{DHQ} = \widehat{DHC}$



G3

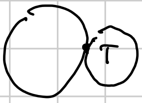
AA_1





Desargues $\triangle ABC$ $\triangle A_1B_1C_1$

AA_1, BB_1, CC_1 concorrono $\iff$ $\left.\begin{array}{l} A_{11} = BC \cap B_1C_1 \\ B_{11} \\ C_{11} \end{array}\right\}$ sono allineati



Monge su $\omega_A, \omega_B, \omega_C \Rightarrow B_1\ C_1$ c. sim int

c. d. sim esterno $\in BC$, $\in B_1C_1$

$\Rightarrow A_{11}$ c. d. sim ext di $\omega_B\ \omega_C$

B_{11} $\omega_A\ \omega_C$

C_{11} $\omega_A\ \omega_B$

Monge $\Rightarrow$ Tesi.

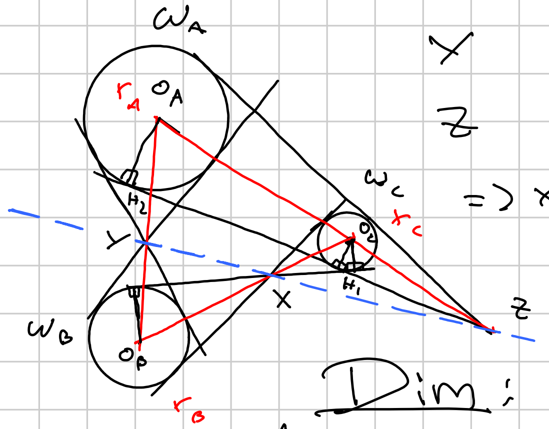
Monge

X c. sim. INT $\omega_B\ \omega_C$

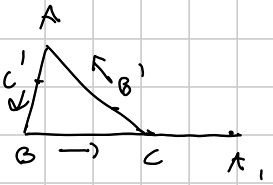
Y INT $\omega_A\ \omega_B$

Z EST $\omega_A\ \omega_C$

$\Rightarrow X, Y, Z$ sono allineati



Dim: $\triangle O_A O_B O_C$ e Menelao



$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = -1$$

$$\boxed{AC' = -C'A}$$

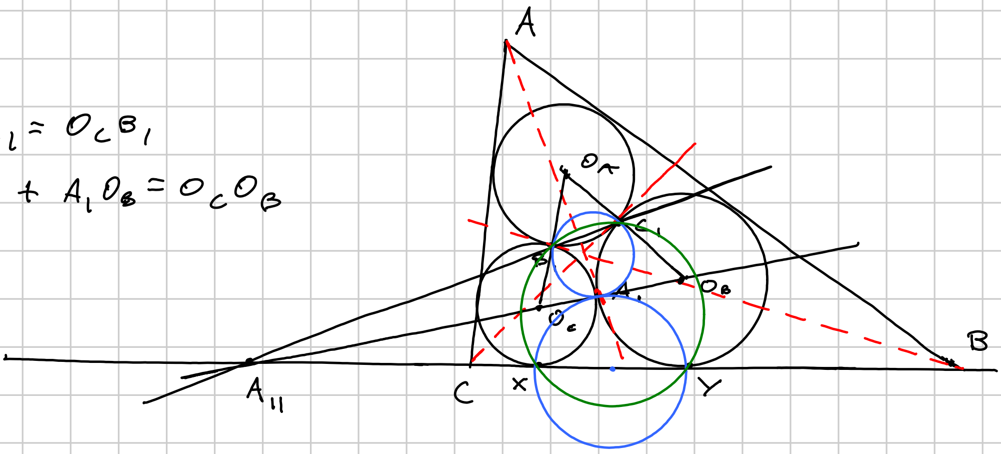
$$\frac{\overline{ZO_C}}{\overline{ZO_A}}$$

$$\boxed{\triangle ZO_CH_1 \sim \triangle ZO_AH_2}$$

$$\frac{\overline{ZO_C}}{\overline{ZO_A}} = \frac{r_C}{r_A} \qquad \frac{\overline{ZO_C}}{\overline{ZO_A}} \cdot \frac{\overline{O_AY}}{\overline{YO_B}} \cdot \frac{\overline{O_BX}}{\overline{XO_C}} = \frac{\cancel{r_C}}{\cancel{r_A}} \cdot \frac{-\cancel{r_A}}{\cancel{r_B}} \cdot \frac{\cancel{r_B}}{\cancel{r_C}} = -1$$

$O_C A_1 = O_C B_1$

$O_C A_1 + A_1 O_B = O_C O_B$



A_{11}, B_{11}, C_{11} allineati

Desargues $\triangle ABC$ $\triangle O_A O_B O_C$ — AO_A, BO_B, CO_C concorrono

$O_A O_B \wedge AB := A_{111}$, B_{111}, C_{111} sono allineati

Claimone: $A_{11} = A_{111}$

$\Longleftrightarrow$ BC, $O_B O_C$, $B_1 C_1$ concorrono

(I) $\odot(A_1 B_1 C_1)$ è l'inscritta di $\triangle O_A O_B O_C$

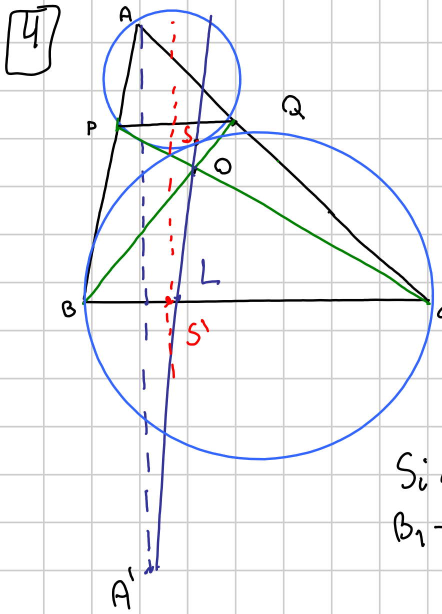
(II) $\odot(X A_1 Y)$ tange $O_B O_C$ in A_1

Di questi due cerchi $O_B O_C$ asse radicale

Claimone finale: $B_1 C_1 Y Z$ ciclici

Dim Angol. su ω_B e ω_C

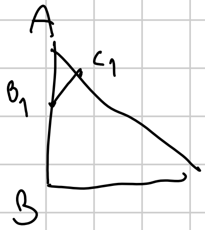
$\boxed{4}$



Tesi: $\bigcirc_{APQS}$ è tangente (in S) alla $\bigcirc_{BCS}$

Se inverto in A di raggio $AP\cdot AC$

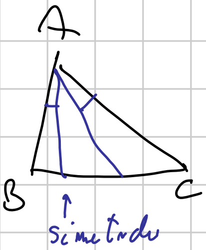
Dato che $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC} \Rightarrow AP\cdot AC = AQ\cdot AB$



$B \to B_1$ con $AB_1 = AQ$

$C \to C_1$ con $AC_1 = AP$

$\Rightarrow \Delta AB_1C_1 \cong \Delta APQ$



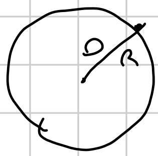
Simmetria rispetto alla bisettrice di $\widehat{BAC}$

$B_1 \to B'$ su AC con $AB' = AQ \Rightarrow B' = Q$

INVERSIONE di centro O e raggio R

$O \to O$ $\quad P'\in OP$

$P \to P'$ $\quad OP\cdot OP' = R^2$



$\omega \to \omega$

dentro $\to$ fuori

fuori $\to$ dentro

Proprietà inversione:

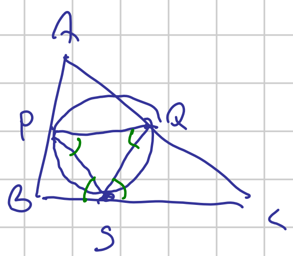
1) Manda rette per O in rette per O
2) Manda rette NON passanti per O in circonferenze passanti per O (e viceversa)
3) Manda circonferenze NON passanti per O in altre circonferenze
4) Conserva gli angoli tra le curve

—o—o—

Applico Inversione + Simmetria!

$B \leftrightarrow Q$ $\quad C \leftrightarrow P$ $\quad BC \Leftrightarrow \bigcirc_{APQ}$ $\quad S \to S'$ $\quad \bigcirc_{BSC} \Leftrightarrow \bigcirc_{QS'P}$

Tesi $\Leftrightarrow$ BC tange $\bigcirc_{QS'P}$



Oss $S \in \bigcirc_{APQ} \Rightarrow S' \in BC$

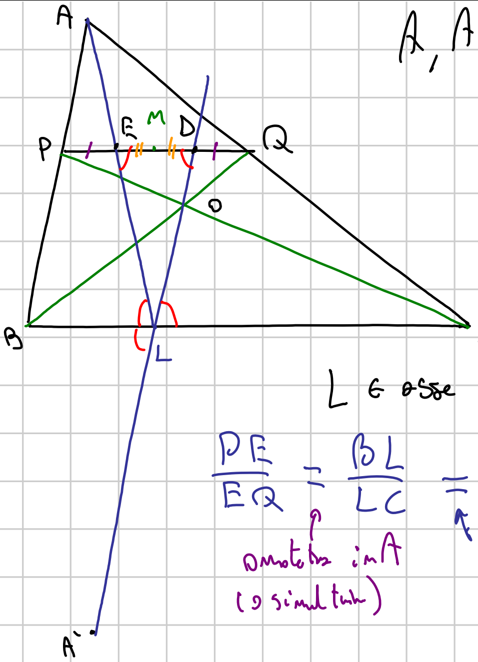
Se la tesi è vera, $S'\in BC$ $\quad$ BC tang $\bigcirc_{QS'P}$

$\Rightarrow \underbrace{\angle PSB = \angle PQS}_{\text{tangenza}} \underbrace{= \angle QSC}_{\text{parallele}} \underbrace{= \angle QPS}_{\text{tangenza}}$

Se la tesi è vera $\Rightarrow$ $\Delta PQS'$ è isoscele $\to$ $S' \in$ asse di PQ

CLAIM: $S' \overset{?}{=} A'O \cap BC$

Provo a dimostrare che $L = BC \cap A'O$, $L \in$ asse di PQ



A, A' simmetrici $\angle ALB = \angle BLA'$

per il parallelismo

$\angle DEL = \angle EDL \Rightarrow LED$ è isoscele

M pt medio di ED, $ML \perp ED$

$\Rightarrow L \in$ asse di ED

$L \in$ asse di $PQ \iff PE = DQ$

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{BL}{LC} = \frac{DQ}{PD}$$

omotetia in A (o similitudine)   omotetia in D

$PE + EQ = PD + DQ = PQ$

$x = PE \Rightarrow EQ = PQ - x$

$y = DQ$

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{x}{PQ-x} = \frac{y}{PQ-y}$$

conti $\Rightarrow$ equazione di 1° grado $\Rightarrow x = y$

$PE = DQ$

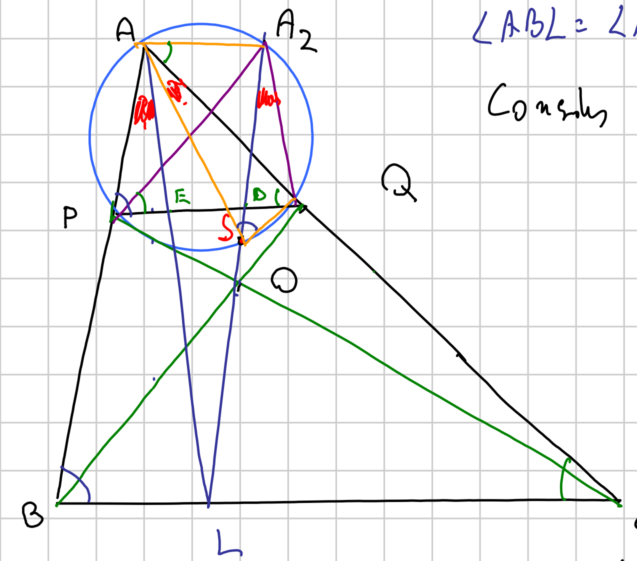
Dunque $PM = PE + EM = DQ + DM = QM \Rightarrow M$ punto medio di $PQ \Rightarrow L \in$ asse di PQ

Tesi $\iff S' = L$

Per costruzione $S', L \in BC$ $S' = L \iff \angle BAS' = \angle BAL$

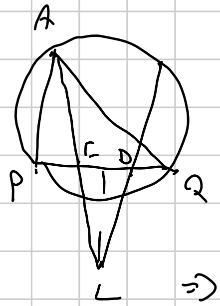
Dato che bisett. sym $S \to S'$ ho $\angle BAS' = \angle SAC$

Per la tesi basta $\angle SAC = \angle BAL$



$\angle ABL = \angle APQ = \angle ASQ$

Considero $A_2 = LS \cap O_{APQ}$



$\angle E, \angle D$ simmetrici rispetto all'asse di PQ

A e A_2 simmetrici rispetto asse PQ

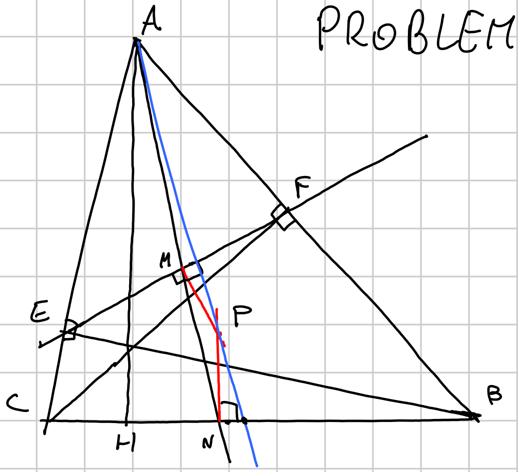
$\Rightarrow AA_2 \parallel PQ$

$\Rightarrow \angle A_2AQ = \angle AQP = \angle ACL = \angle A_2PQ$

$\triangle APL$ e $\triangle A_2QL$ sono congruenti ($L \in$ asse di AA_2, PQ)

$\angle PAL = \angle LA_2Q = \angle SA_2Q = \angle SAQ$ (ciclicità di $APSQ$) $\Rightarrow \angle BAL = \angle SAQ \Rightarrow$ Tesi

PROBLEMA 2



Coordinate Baricentriche su ABC.

$E=(S_C,0,S_A)$ $\quad F=(S_B,S_A,0)$ $\quad S_A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$

$EF: -xS_A+yS_B+zS_C=0$

$BC: x=0$

$AMN: zb=yc$ $\qquad$ Ultimo fatto noto: la mediana è $y=z$.

$N=(0,b,c)$

$AM\cap EF$

$-xbS_A+ybS_B+ycS_C=0$

$M=(bS_B+cS_C,bS_A,cS_A)$

$H=(0,S_C,S_B)$

$AH: yS_B=zS_C$ $\qquad AH_\infty=(-a^2,S_C,S_B)$

$$NP: \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & b & c \\ -a^2 & S_C & S_B \end{pmatrix}=0$$

$NP: x(bS_B-cS_C)-ya^2c+za^2b=0$

$t_A: zb^2+yc^2=0$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ -S_A & S_B & S_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\overset{?}{=}0$$

$\iff c^2S_C-b^2S_A+c^2S_A-b^2S_B\overset{?}{=}0$ $\qquad S_A+S_C=b^2$ $\quad S_A+S_B=c^2$ ✓

$\Rightarrow EF/\!/t_A \rightsquigarrow MP/\!/AO$

$O=(a^2S_A,b^2S_B,c^2S_C) \rightsquigarrow AO_\infty=(-b^2S_B-c^2S_C,\,b^2S_B,\,c^2S_C)$

rp: $\det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} bS_B + cS_C & bS_A & cS_A \\ -b^2S_B - c^2S_C & b^2S_B & c^2S_C \end{pmatrix} \end{array} = 0$

$xbcS_A[cS_C - bS_B] - y[b^2cS_AS_B + c^3S_AS_C + bc^2S_BS_C + c^3S_C^2]$
$+ z$ (roba simmetrica) $= 0$

$= b^2c^3S_C$

$= bc(bS_AS_B + bc^2S_C + cS_BS_C)$

rp: $0 = xS_A(cS_C - bS_B) - y(bS_AS_B + bc^2S_C + cS_BS_C) + z(cS_AS_C + b^2cS_B + bS_BS_C)$

Tesi iff: $\det \begin{pmatrix} S_A(cS_C - bS_B) & -(\quad) & \\ 0 & 1 & -1 \\ bS_B - cS_C & -a^2c & a^2b \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$

Mi basta: $\det \begin{pmatrix} S_A & -c\quad) & c\quad) \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -a^2c & a^2b \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$

$a^2bS_A - (\quad)_y - a^2cS_A + c(\quad)_z \overset{?}{=} 0$

$a^2S_A(b-c) + (b-c)(S_BS_C) + cS_AS_C + cS_B(S_A + S_C) - (bS_AS_B + bS_C(S_A + S_B)) \overset{!}{=} 0$

$(b-c)[a^2S_A + \cancel{S_B}S_C - S_AS_C - S_AS_B - \cancel{S_BS_C}] \overset{?}{=} 0$

$S_B + S_C = a^2 \Rightarrow$ fine!

PreIMO-18 - Geometrie - Afternoon

Note Title 5/24/2018

X_{YZ} := piede della $\perp$ da X ad YZ.

$ABCDEF$ esagono ciclico
le tre intersezioni di
$A_{FD}A_{ED}$, $B_{DE}B_{EF}$, $C_{DF}C_{EF}$ e dei corrispondenti sono conclicle.

$\mathbb{C}$ con $\odot(ABCDEF)$ unitario $a\bar{a}=1$ e cyc.

A_{BC} $\quad BC: \; z+bc\bar{z}=b+c$

$$\frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}} = -\frac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}} = bc$$

$$z = a + bc\bar{z} - \frac{bc}{a}$$

$$a_{bc} = z = \frac{1}{2}\left[a+b+c-\frac{bc}{a}\right]$$

a_{fd}, a_{de}

$$A_{FD}A_{DE}: \quad \frac{z-a_{fd}}{\bar{z}-\overline{a_{fd}}} = \frac{a_{fd}-a_{de}}{\overline{a_{fd}}-\overline{a_{de}}}$$

$$a_{fd}-a_{de} = \frac{1}{2}\left[\cancel{a}+\cancel{d}+f-\frac{fd}{a}-\cancel{a}-\cancel{d}-e+\frac{de}{a}\right] = \frac{1}{2a}\left[af+de-fd-ae\right] = \frac{(a-d)(f-e)}{2a}$$

$$\overline{a_{fd}}-\overline{a_{de}} = \frac{1}{2}\cancel{a}\frac{(a-d)(f-e)}{\cancel{a}dfe} =$$

$$A_{FD}A_{DE}: \quad \frac{z-a_{fd}}{\bar{z}-\overline{a_{fd}}} = \frac{def}{a} \iff z-a_{fd} = \frac{def}{a}\bar{z}-\frac{def}{a}\overline{a_{fd}}$$

$$\overline{a_{fd}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{d}+\frac{1}{f}-\frac{a}{df}\right] = \frac{1}{2}\frac{df+ad+af-a^2}{adf}$$

$$z = \frac{def}{a}\bar z + \frac{1}{2}\left(a + d + f - \frac{df}{a}\right) - \frac{1}{2a^2}\left(def + ede + aef - a^2 e\right)$$

$$\begin{cases} az = \frac{def}{\cancel{a}}\bar z + \frac{1}{2a^{\cancel{2}}}\left(a^3 + a^2 d + a^2 f + a^2 e - a(df + de + ef) - def\right) \\ bz = \frac{def}{\cancel{b}}\bar z + \frac{1}{2b^{\cancel{2}}}\left(b^3 + b^2(\sum d) - b\sum de - def\right)\end{cases}$$

$$(b-a)z = \frac{(b-a)}{2ab}\left[ab(a+b) + ab\sum d + def\right]$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(a + b + d + e + f + \frac{def}{ab}\right)$$

BOH FARE ATTENZIONE AI SEGNI

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{6} a + \frac{def - abc}{ab}\right)$$

ci metto anche la c

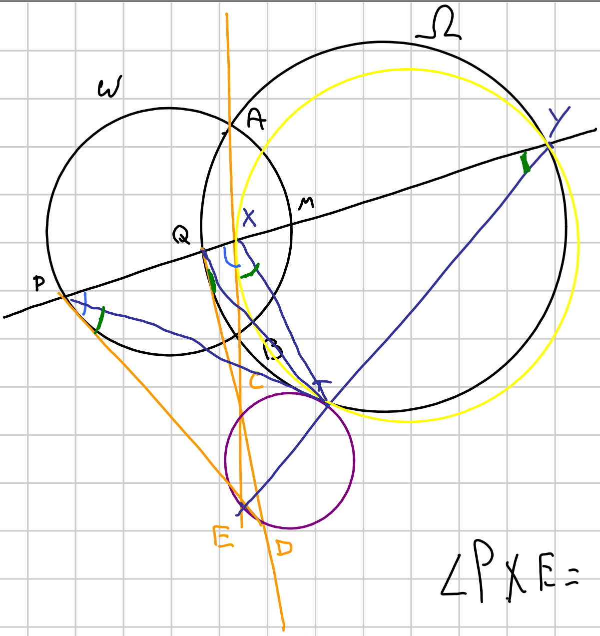
$$c_1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} a = \frac{1}{2}\,\frac{def - abc}{ab}$$

Basta anche solo dire $|ab| = 1$ e $|def - abc| = |abc - def|$ e uso la simmetria

$$\overline{c_1} - \frac{1}{2}\overline{\sum_{i=1}^{6} a} = \frac{1}{2}\,\frac{(abc - def)\cancel{ab}}{\cancel{ab}cdef} = \frac{1}{2}\,\frac{abc - def}{cdef}$$

$$\left(c_1 - \frac{1}{2}\sum\ \right)\left(\overline{\qquad}\right) = -\frac{1}{4}\,\frac{(abc - def)^2}{abcdef}$$

e si verifica essere simmetrica



PROBLEMA 2

$\bigcirc_{CDE}$ tange Ω

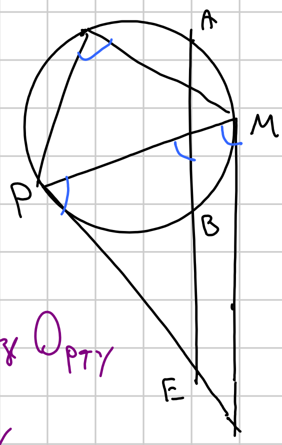
$C = AB \cap r_Q$ $\quad D = r_Q \cap r_P$

$E = AB \cap r_P$

$Y = PQ \cap \Omega \quad (Y \neq Q)$

$X = PQ \cap AB$

$\angle PXE = \angle XPE = \angle PZM \quad \forall Z$ su ω



Dunque PXE è isoscele $PE = XE$.

$T = EY \cap \Omega$

$Pow_\omega(E): PE^2 = EB \cdot EA = ET \cdot EY$

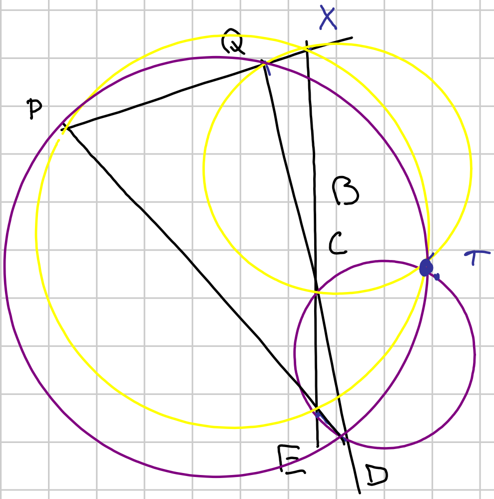
$PE = EX \Rightarrow EX^2 = ET \cdot EY$

EP tange $\bigcirc_{PTY}$

EX tange $\bigcirc_{XTY}$

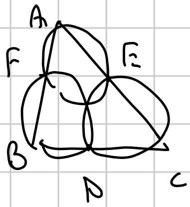
Siccome $\angle TXE = \angle TPE \rightarrow TPXE$ è ciclico

QC tange $\Omega \Rightarrow \angle CQT = \angle QYT = \angle CXT \Rightarrow QXCT$ ciclico



DIM VELOCE MIQUEL.

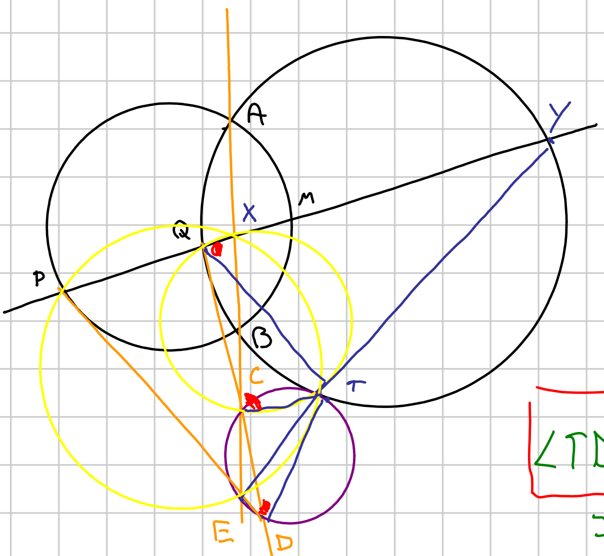
MIQUEL $\triangle$



$\bigcirc_{AFE}$, $\bigcirc_{BFD}$, $\bigcirc_{CED}$ concorrono (conto d'angoli)

Applicando a $\triangle PXE$ con punti Q, C, D ho che $\bigcirc_{XQC}$, $\bigcirc_{XDE}$, $\bigcirc_{CDE}$ concorrono.

— o — o —

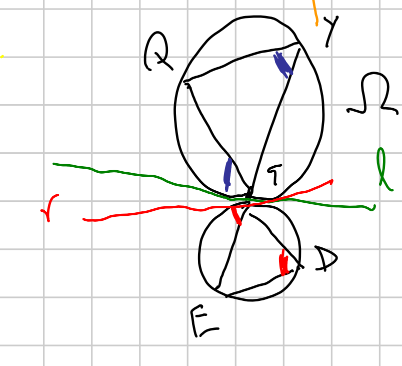


Supponiamo TCED ciclico

per tesi, serve la tangente in T

$\angle TDE = 180 - \angle TCE = \angle TCX =$
$= \angle TQX$

$\boxed{\angle TDE + \angle TYQ} = \angle TQY + \angle TYQ =$
$= 180 - \angle QTY = \boxed{\angle QTE}$



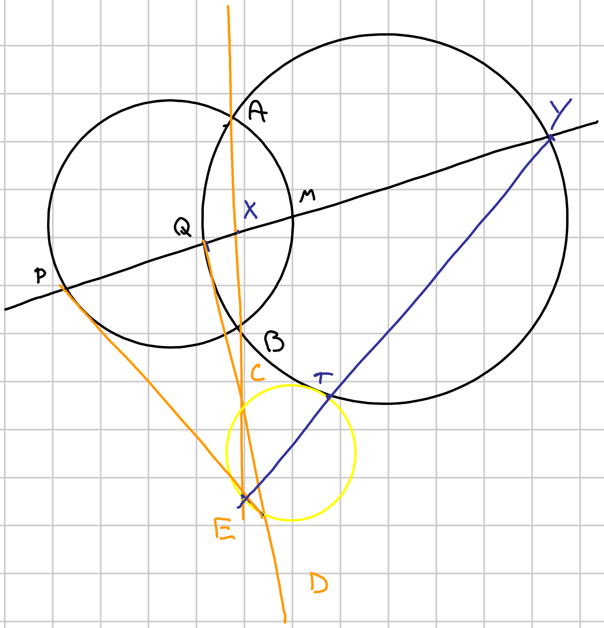
ℓ tang Ω $\qquad \angle(TE, r) = \angle TDE$

r tang $\bigcirc_{TDE}$ $\qquad \angle(TQ, \ell) = \angle TYQ$

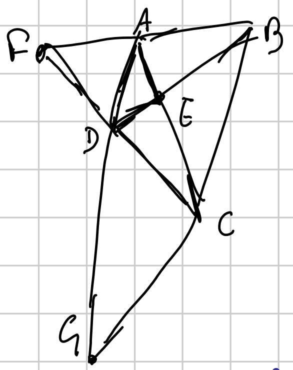
facendo la somma degli angoli

$\angle QTE = \angle(QT, \ell) + \angle(\ell, r) + \angle(r, TE)$
$= \angle QTE + \angle(r, \ell) \Rightarrow \angle(r,\ell) = 0$
$\Rightarrow r$ e ℓ coincidono $=$

$\ell = V$ Coze Sns a Ω de a Θ_{TCDE}


A
M
X
Y
Q
P
B
C
T
E
D

PROBLEMA $\boxed{3}$



COORDINATE BARICENTRICHE CON RIFERIMENTO $\boxed{EBC}$ USO

$(\circ\, EDC)$ $BC=a,\ EC=b,\ EB=c$

$E=(1,0,0)$ $B=(0,1,0)$ $C=(0,0,1)$

$A=(\alpha,0,\gamma)$ $D=(\delta,\beta,0)$

$\| \sum_{cyc} a^2yz=(\sum_{cyc} x)(\sum_{cyc} ux)$ per opportuni $u,v,w\in\mathbb{R}$

circonferenze generica

Considero $\odot(ABCD)$, sicuramente $v=w=0$

$$b^2\cancel{\alpha}\gamma=(\alpha+\gamma)u\cancel{\alpha}$$
$$c^2\cancel{\delta}\beta=(\delta+\beta)u\cancel{\delta}$$

$$\boxed{\frac{b^2\gamma}{\alpha+\gamma}=\frac{c^2\beta}{\beta+\delta}}\quad (Eq\ 1)$$

$\odot ABE:\ \sum_{cyc} a^2yz=(\sum_{cyc} x)wz \quad \triangleleft - B,E$

$$b^2\alpha\cancel{\gamma}=(\alpha+\gamma)w\cancel{\gamma} \quad \triangleleft - A \qquad w=\frac{b^2\alpha}{\alpha+\gamma}$$

$BC:\ x=0$

$$a^2y\cancel{z}=\frac{b^2\alpha}{\alpha+\gamma}\cancel{z}(y+z)$$
$$y(a^2(\alpha+\gamma)-b^2\alpha)=zb^2\alpha \qquad P=(0,\ b^2\alpha,\ a^2(\alpha+\gamma)-b^2\alpha)$$

$\odot ADE:\ \sum_{cyc} a^2yz=(\sum_{cyc} x)(vy+wz) \quad \triangleleft - E$

$$b^2\alpha\cancel{\gamma}=(\alpha+\gamma)w\cancel{\gamma} \quad \triangleleft - A \qquad w=\frac{b^2\alpha}{\alpha+\gamma}$$

$$c^2\cancel{\beta}\delta = (\beta+\delta)v\cancel{\beta} \quad A-D \qquad v = \frac{c^2\delta}{\beta+\delta}$$

CD: $x\beta = y\delta$

Strada 1: sostituisco $x=\delta,\ y=\beta$ e trovo z

Strada 2:

$$a^2\beta yz + b^2\delta yz + c^2\delta y^2 = (y\delta + y\beta + z\beta)\left(\frac{b^2\alpha}{\alpha+\gamma}z + \frac{c^2\delta}{\beta+\delta}y\right)$$

$$y[a^2\beta + b^2\delta] = y\left[\frac{\beta+\delta}{\alpha+\gamma}b^2\alpha\right] + y\underbrace{\frac{c^2\beta\delta}{\beta+\delta}}_{\frac{b^2\gamma\delta}{\alpha+\gamma}} + z\frac{b^2\alpha\beta}{\alpha+\gamma}$$

$$y[a^2\beta(\alpha+\gamma) + b^2\delta(\cancel{\alpha}+\cancel{\gamma}) - b^2\alpha(\beta+\cancel{\delta}) - \cancel{b^2\gamma}\delta] = z b^2\alpha\beta$$

$$y[a^2\beta(\alpha+\gamma) - b^2\alpha\beta] = z b^2\alpha\beta$$

$$Q = (b^2\alpha\delta,\ b^2\alpha\beta,\ a^2\beta(\alpha+\gamma) - b^2\alpha\beta)$$

—o—

AB: $x\gamma = z\alpha$ CD: $x\beta = y\delta$

Allora $F = (\alpha\delta, \alpha\beta, \gamma\delta)$

BC: $x=0$ AD: $\det\begin{pmatrix} x & y & z \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \delta & \beta & 0 \end{pmatrix} = 0$ AD: $-\cancel{x}\beta\gamma + y\delta\gamma + z\alpha\beta = 0$

$$G = (0, \alpha\beta, -\gamma\delta)$$

FP: $\det\begin{pmatrix} x & y & z \\ \alpha\delta & \alpha\beta & \gamma\delta \\ 0 & b^2\alpha & a^2(\alpha+\gamma) - b^2\alpha \end{pmatrix} = 0$

FP: $x[a^2(\alpha+\gamma)\cancel{\alpha}\beta - b^2\cancel{\alpha}(\alpha\beta+\gamma\delta)] - y\cancel{\alpha}\delta(a^2(\alpha+\gamma) - b^2\alpha) + z b^2\alpha^{\cancel{2}}\delta = 0$

GQ: $\det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & \alpha\beta & -\gamma\delta \\ b^2\alpha\delta & b^2\alpha\beta & a^2\beta(\alpha+\gamma) - b^2\alpha\beta \end{pmatrix} = 0$

$$EQ: \ x\cancel{\alpha}\beta\left[\alpha^2\beta(\alpha+\gamma)-b^2\alpha\beta+b^2\gamma\delta\right]-yb^2\cancel{\alpha}\gamma\delta^2-zb^2\alpha^{\cancel{2}}\beta\delta=0$$

Voglio la retta per A che è $\perp$ $AC \mp EC$

$\infty = (S_C, -b^2, S_A)$ e A

$$\tau: \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ \alpha & 0 & \gamma \\ S_C & -b^2 & S_A \end{pmatrix} = 0$$

$$\tau: xb^2\gamma + y(\gamma S_C - \alpha S_A) - z\alpha b^2 = 0$$

Tesi equivale a: (le 3 rette concorrono)

$$\det\begin{pmatrix} b^2\gamma & \gamma S_C - \alpha S_A & -b^2\cancel{\gamma} \\ \beta[\alpha^2\beta(\alpha+\gamma)-b^2\alpha\beta+b^2\gamma\delta] & -b^2\gamma\delta^2 & -\cancel{b^2}\alpha\beta\delta \\ \beta[\alpha^2\beta(\alpha+\gamma)-b^2(\alpha\beta+\gamma\delta)] & -\delta(\alpha^2(\alpha+\gamma)-b^2\alpha)\beta & \cancel{b^2}\alpha\delta\cdot\beta \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$$

$\mathrm{III} \to \mathrm{III} - \mathrm{II}$

$$\det\begin{pmatrix} 2\beta[b^2\gamma] & 2\beta[\gamma S_C - \alpha S_A] & -1\cdot 2\beta \\ \beta[\alpha^2\beta(\alpha+\gamma)-b^2\alpha\beta+b^2\gamma\delta] & -b^2\gamma\delta^2 & -\beta\delta \\ -2b^2\beta\gamma\cancel{\delta} & -\beta\cancel{\delta}\alpha^2(\alpha+\gamma)+b^2\alpha\beta\cancel{\delta} + b^2\gamma\delta^{\cancel{2}} & 2\beta\cancel{\delta} \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$$

$\mathrm{III} \to \mathrm{III} + \mathrm{I}$

$$\det\begin{pmatrix} b^2\gamma & \gamma S_C - \alpha S_A & -1 \\ \beta[\quad] & -b^2\gamma\delta^2 & -\beta\delta \\ 0 & \boxed{\quad} & 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$$

Basta oppure $\boxed{\quad} = 0$ oppure $b^2\cancel{\beta}\gamma\delta \overset{?}{=} \cancel{\beta}[\alpha^2\beta(\alpha+\gamma)-b^2\alpha\beta+b^2\gamma\delta]$

Vediamo ma, è falso!

Voglio $\boxed{\quad} \overset{?}{=} 0$

$$-\alpha^2\beta(\cancel{\alpha}+\gamma)+b^2\alpha\beta+b^2\gamma\delta+\beta[\gamma(\cancel{a^2}+b^2-c^2)-\alpha(b^2+c^2-\cancel{a^2})] \overset{?}{=} 0$$

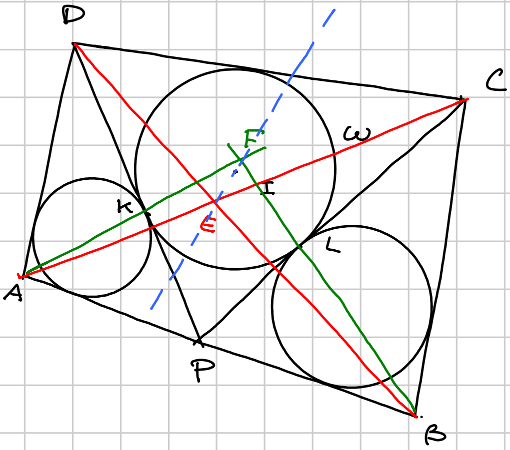
OSS (In un colore felice) NON c'è la α !!

Tesi iff $b^2 \cancel{\alpha\beta} + b^2\gamma\delta + b^2\beta\gamma - c^2\beta\gamma - \cancel{\alpha\beta b^2} - \alpha\beta c^2 \stackrel{?}{=} 0$

$\iff b^2\gamma(\beta+\delta) = c^2\beta(\alpha+\gamma)$ (Vero!)

G-4

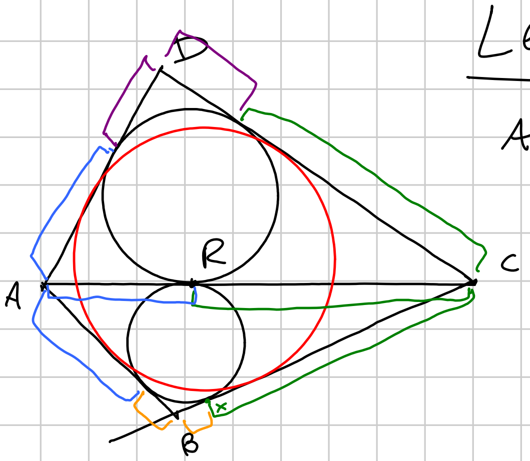
SL2007 - G8



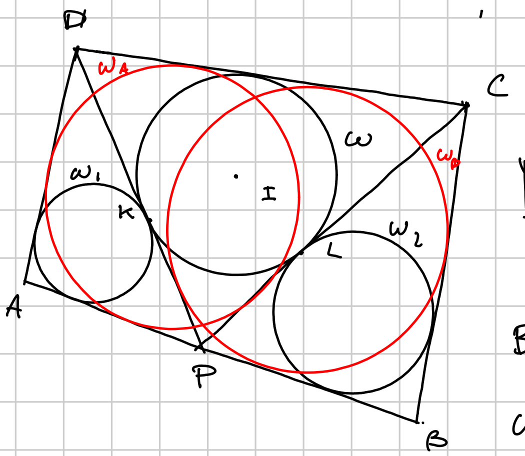
Ts E, F, I allineati

Lemma

$ABCD$ circos $\Leftrightarrow AD + BC = AB + CD$

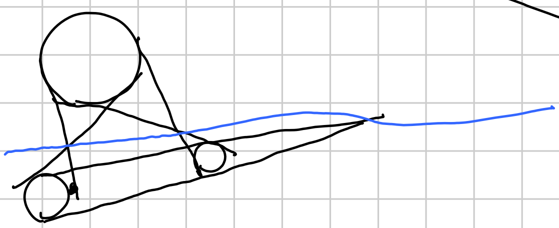


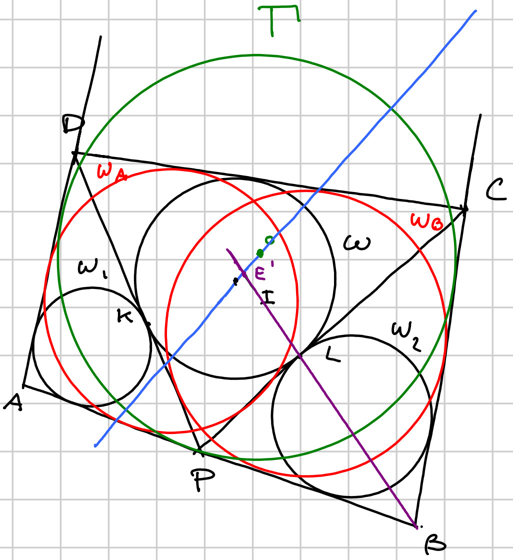
Monge



B è c.d.s ext di ω_2 e ω_B

D è c.d.s. ext di ω e ω_B





Monge

$\omega_1 \quad \omega$

A e c.d.s ext

$\omega_1 \quad \omega_A$

$\boxed{\omega_1 \quad \Gamma}$

Monge su ω_2, ω, Γ

c d s INT ω ω_2 L

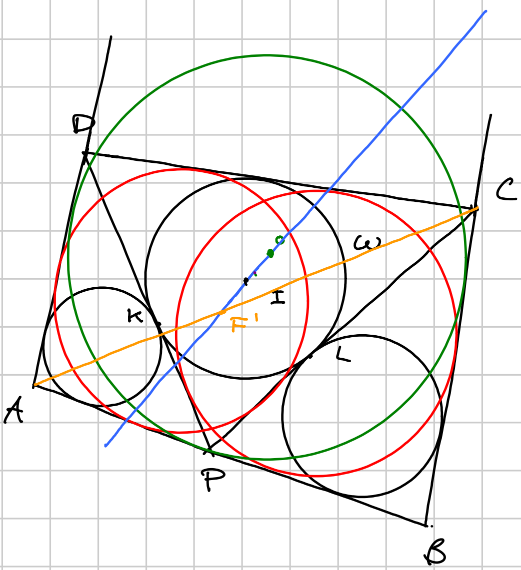
c d s EXT Γ ω_2 B

BL ∩ OI = c.d.s. INT di ω e Γ, E'

Monge ω_1, ω, Γ

AK ∩ OI = c.d.s. INT di ω e Γ, E'

E' = E E ∈ OI



Monge su ω_A, Π, ω

A c.d.s. Ext ω_A e Π

C c.d.s Ext ω e ω_A

$\Rightarrow$ $AC \cap OI$ è c.d.s. EXT tra ω e Π

$BD \cap OI$ è c.d.s Ext ω e Π

$F' = AC \cap OI$ $\quad$ $F = F' \in OI$

TEORA DEI NUMERI - PREIMO 18

Note Title 5/23/2018

N1

$a_1, \dots a_{2017}$ interi >0

$$(a_1^{2017}+a_2)\cdot \dots \cdot (a_{2017}^{2017}+a_1) = p^K$$

SOL: l'unico è 2^{2017} (cioè $a_i = 1$)

se $p \neq 2$ ogni parentesi è P+D

se $a_1 \equiv 0(2)$ $a_2 \equiv 1(2)$ ... $a_{2017} \equiv 0(2)$

$\Rightarrow p=2$

$$(a_1^{2017}+a_2)\dots \quad = 2^K$$

- tutti gli a_i sono pari; $a_i = 2^{\alpha_i} d_i$ con $2 \nmid d_i$

$$2^{2017\alpha_i} d_i + 2^{\alpha_{i+1}} d_{i+1} = 2^{\beta_i}$$

se $2017\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ $\quad 2^{\min}(2^{\dots} + d)$

vale allora $2017\alpha_i = \alpha_{i+1} \Rightarrow \alpha_j = 2017^j \alpha_1$

$2017\alpha_{2017} = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 2017^{2017}\alpha_1$

- tutti gli a_i sono dispari

MOD 4 : $a_i^{2017} + a_{i+1} \equiv a_i + a_{i+1}$ (4)

perché $a_i^{2017} + a_{i+1} = 2^{h_i}$

$h = 1 \Rightarrow a_i = a_{i+1} = 1$

$h \geq 2 \Rightarrow a_i + a_{i+1} \equiv 0$ (4)

$(a_1^{2017} + a_2)(a_2^{2017} + a_3) \cdots \cdots (a_{2017}^{2017} + a_1)$

se nessun $a_i = 1 \Rightarrow a_i + a_{i+1} \equiv 0$ (4)

$\Rightarrow$ sono del tipo 1, 3, 1, ...

No perché c'è un numero dispari di a_i

se ho $a_i = 1$ $\quad a_{i-1}^{2017} + 1 = 2^{h_i} \Leftarrow$ È IMPOSSIBILE

$1 + a_{i+1} = 2^{h_{i+1}}$

$a^{2017} + 1 = 2^{g}$

guadagno di un primo: $a^{2017} + 1$ ha un fattore primo in più di $a+1$

(a meno di $a = 1$, che è quello che volevamo)

$\boxed{N2}$ $a_0 = 1$ $b_0 = n$

$x_n = a_n + 1$ $y_n = b_n + 1$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} (2x_n, y_n - x_n) \\ (x_n - y_n, 2y_n) \\ (x_n, y_n) \end{cases}$$

a ogni passo $\gcd(x_n, y_n) = \begin{cases} \gcd(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ 2 \cdot \gcd(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases}$

$d = \gcd(x_{n+1}, y_{n+1})$

$d \mid 2x_n$ $d \mid y_n - x_n \Rightarrow d \mid 2(y_n - x_n) = 2y_n - 2x_n$

$d \mid 2y_n$

$d \mid 2 \cdot \gcd(x_n, y_n)$

se $x_n = y_n = \dfrac{n+3}{2}$ $\gcd(x_n, x_n) = x_n = 2^k$

infatti $\gcd(x_0, y_0) = 1$

$\dfrac{n+3}{2} = x_n = 2^k$ $n + 3 = 2^{k+1}$

N3 $\{u_n\}$ E $\{v_n\}$

$u_0 = u_1 = 1$ $\quad u_n = 2u_{n-1} - 3u_{n-2}$

$v_0 = a$ $\quad v_1 = b$ $\quad v_2 = c$ $\quad v_n = v_{n-1} - 3v_{n-2} + 27v_{n-3}$

SE $n > N \rightarrow u_n \mid v_n$

Th. $3a = 2b + c$

$\{u_n\}$: $x^2 - 2x + 3$

$\hookrightarrow$ RADICI: $(1+\sqrt{-2})$, $(1-\sqrt{-2})$

$\{v_n\}$: $x^3 - x^2 + 3x - 27 =$

$= (x-3)(x^2+2x+9)$ $\rightarrow$ RADICI: 3, $-1+2\sqrt{-2}$, $-1-2\sqrt{-2}$

SCRIVIAMO u_n: UN TEOREMA NOTO CI DICE

CHE $u_n = \alpha \cdot (1+\sqrt{-2})^n + \beta (1-\sqrt{-2})^n$

$n = 0 \rightarrow 1 = u_0 = \alpha + \beta$

$n=1 \rightarrow 1 = u_1 = \alpha(1+\sqrt{-2}) + \beta(1-\sqrt{-2})$

$\longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}$

$u_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{-2})^n + (1-\sqrt{-2})^n\right)$

TROVIAMO V_n:

APPROCCIO IMMEDIATO: $V_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot (-1+2\sqrt{-2})^n + \gamma(-1-2\sqrt{-2})^n$ E SISTEMA CON $n \in \{0,1,2\}$

$V_n = \alpha \cdot 3^n + \beta(-1+2\sqrt{-2})^n + \gamma(-1-2\sqrt{-2})^n$

V_n È INTERO.

$= \alpha \cdot 3^n + \left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\left(\underbrace{(-1+2\sqrt{-2})^n + (-1-2\sqrt{-2})^n}_{\text{È INTERO}}\right)$

$+ \left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\left(\underbrace{(-1+2\sqrt{-2})^n - (-1-2\sqrt{-2})^n}_{\sqrt{-2}\,\cdot\,\text{INTERO}}\right)$

$$\left[\text{I.E.}: \left(-1+2\sqrt{-2}\right)^2 - \left(-1-2\sqrt{-2}\right)^2 = -7-4\sqrt{-2}-\left(-7+4\sqrt{-2}\right) = -8\sqrt{-2}\right]$$

AFFINCHÉ v_n SIA INTERO VORREMMO α E $\frac{\beta+\gamma}{2}$ INTERI E $\frac{\beta-\gamma}{2\sqrt{-2}}$ INTERO.

$$x_n = 3^n$$

$$y_n = \frac{1}{2}\left(\left(-1+2\sqrt{-2}\right)^n + \left(-1-2\sqrt{-2}\right)^n\right)$$

$$z_n = \frac{1}{4\sqrt{-2}}\left(\left(-1+2\sqrt{-2}\right)^n - \left(-1-2\sqrt{-2}\right)^n\right)$$

$\{x_n\}$, $\{y_n\}$ E $\{z_n\}$ SONO SOLUZIONI DI $v_n = v_{n-1} - 3v_{n-2} + 27v_{n-3}$

CLAIM: OGNI v_n POSSIBILE SI SCRIVE COME

$$\frac{\alpha x_n + \beta y_n + \gamma z_n}{N}$$

CON $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ E N INTERO POSITIVO FISSATO

	0	1	2
X_n	1	3	9
Y_n	1	-1	-7
Z_n	0	1	-2

CI PIACEREBBE CHE FOSSERO

1	0	0
0	1	0
0	0	1

PER AVERE 1 0 0:

X_n	1	3	9
$X_n - Y_n$	0	4	16
Z_n	0	1	-2

$X_n - 3Z_n$	1	0	15
$\frac{1}{4}X_n - \frac{1}{4}Y_n$	0	1	4
Z_n	0	1	-2

$X_n - 3Z_n$	1	0	15
$X_n - Y_n$	0	4	16
Z_n	0	1	-2

$X_n - 3Z_n$	1	0	15
$\frac{1}{4}X_n - \frac{1}{4}Y_n$	0	1	4
$\frac{1}{4}X_n - \frac{1}{4}Y_n - Z_n$	0	0	6

$\frac{3}{8}X_n + \frac{5}{8}Y_n - \frac{1}{2}Z_n$	1	0	0
$\frac{1}{12}X_n - \frac{1}{12}Y_n + \frac{1}{6}Z_n$	0	1	0
$\frac{1}{24}X_n - \frac{1}{24}Y_n - \frac{1}{6}Z_n$	0	0	1

IL CLAIM È DIMOSTRATO:

v_n È DEFINITO DA $v_0=a$ $v_1=b$ $v_2=c$

$$a\left(\frac{3}{8}x_n+\frac{5}{8}y_n-\frac{1}{2}z_n\right)+b\left(\frac{1}{12}x_n-\frac{1}{12}y_n+\frac{1}{6}z_n\right)$$
$$+c\left(\frac{1}{24}x_n-\frac{1}{24}y_n-\frac{1}{6}z_n\right)$$

$\rightarrow \exists\ \alpha, \beta, \gamma$ INTERI E N INTERO POSITIVO TALE CHE

$$v_n=\frac{1}{N}\left(\alpha\cdot 3^n+\beta\cdot\left(\left(-1+2\sqrt{-2}\right)^n+\left(-1-2\sqrt{-2}\right)^n\right)+\gamma\cdot\left(\frac{\left(-1+2\sqrt{-2}\right)^n-\left(-1-2\sqrt{-2}\right)^n}{\sqrt{-2}}\right)\right)$$

SUPPONIAMO CHE

$u_n \mid v_n$ DEFINITIVAMENTE.

$$\rightarrow \frac{N}{2}\cdot\left(\left(1+\sqrt{-2}\right)^n+\left(1-\sqrt{-2}\right)^n\right) \mid \alpha\cdot 3^n+\beta\left(\left(-1+2\sqrt{-2}\right)^n+\left(-1-2\sqrt{-2}\right)^n\right)+\gamma\cdot$$

$$\frac{(-1+2\sqrt{-2})^n-(-1-2\sqrt{-2})^n}{\sqrt{-2}}$$

$$\boxed{-1+2\sqrt{-2}=(1+\sqrt{-2})^2}$$

$$\omega = 1+\sqrt{-2} \qquad \bar{\omega} = 1-\sqrt{-2}$$

$$\frac{N}{2}\cdot(\omega^n+\bar{\omega}^n) \,\Big|\, \alpha\cdot 3^n+\beta(\omega^{2n}+\bar{\omega}^{2n}) + \gamma \boxed{\frac{(\omega^{2n}-\bar{\omega}^{2n})}{\sqrt{-2}}}$$

INDEBOLIAMO L'IPOTESI E RICHIEDIAMO SOLO

$$\left(\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2}\right) \,\Big|\, RHS_n$$

DEFINITIVAMENTE

(STO USANDO $u_n \mid K\cdot v_n$ CON K FISSATO)

$$\frac{\omega^{2n}-\bar{\omega}^{2n}}{\sqrt{-2}} = \left(\omega^n+\bar{\omega}^n\right)\cdot \underbrace{\left(\frac{\omega^n-\bar{\omega}^n}{\sqrt{-2}}\right)}_{\text{INTERO}}$$

$$\boxed{(-1+\sqrt{-2})(-1-\sqrt{-2}) = 3}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2}\right) \;\Big|\; \alpha\cdot 3^n+\beta\left(\omega^{2n}+\bar{\omega}^{2n}\right)$$

$$\left(\omega^n+\bar{\omega}^n\right)^2 = \omega^{2n}+\bar{\omega}^{2n}+2\cdot(\underbrace{\omega\bar{\omega}}_{=3})^n$$

$$\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2} \;\Big|\; \underbrace{\beta}_{\text{INTERO}}\underbrace{\left(\omega^n+\bar{\omega}^n\right)^2}_{\text{INTERO}}+(\alpha-2\beta)\cdot 3^n$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2} \;\Big|\; (\alpha-2\beta)\cdot 3^n$$

$$u_0=u_1=1$$

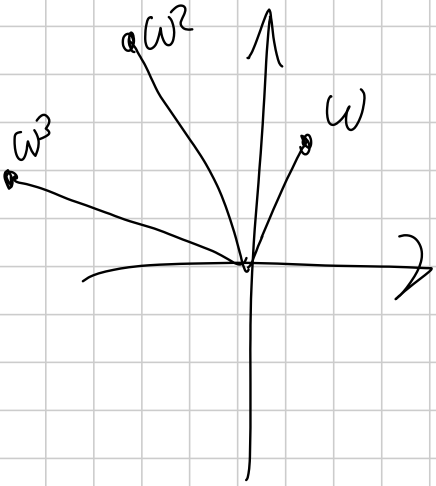
u_n NON È MAI MULTIPLO DI 3 $\quad u_n=2u_{n-1}-3u_{n-2}$

$$\left(\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2}, 3\right)=1 \qquad \hookrightarrow u_n \equiv -u_{n-1} \ (3)$$

$$\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2} \mid (\alpha-2\beta) \quad \forall n$$

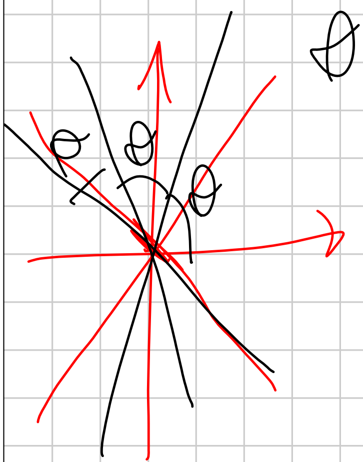
COSA DOVREBBE ACCADERE: $\alpha-2\beta=0$

QUESTO ACCADE SE E SOLO SE $\left|\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2}\right|$ È ILLIMITATO (PUÒ DIVENTARE GRANDE A PIACERE)



$$\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2} = Re(\omega^n)$$

LE POTENZE DI UN NUM COMPLESSO ω, SE ω FORMA UN ANGOLO θ CON L'ASSE DELLE X, ALLORA ω^n FORMA L'ANGOLO $n\theta$



$\theta < \frac{\pi}{2}$

$\exists \infty \ n$ t.c. $-\frac{\pi}{4} < n\theta < \frac{\pi}{4} \ (2\pi)$

SE $-\frac{\pi}{4} < n\theta < \frac{\pi}{4} \rightarrow |Re(w^n)| > |Im(w^n)|$

$$\longrightarrow Re(w^n) > \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |w^n| = \frac{3^n}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{w^n + \bar{w}^n}{2} \mid (\alpha - 2\beta) \rightarrow \alpha - 2\beta = 0$$

PERCHÉ $\frac{w^n + \bar{w}^n}{2}$ È ILLIMITATO

$$v_n = \frac{1}{N}\left(2\beta\, 3^n + \beta\left(w^{2n} + \bar{w}^{2n}\right) + \gamma\left(\frac{w^{2n} - \bar{w}^{2n}}{\sqrt{-2}}\right)\right)$$

VERIFICHIAMO SEPARATAMENTE PER: 1) $\beta = 1$, $\gamma = 0$
2) $\beta = 0$, $\gamma = 1$

1) $v_0 = \frac{1}{N}(4)$ $\quad$ $a = \frac{1}{N}(4)$ $\quad$ $v_1 = \frac{1}{N}(4)$ $\quad$ $b = \frac{1}{N}(4)$

$v_2 = \frac{1}{N}(4)$ $\quad$ $c = \frac{1}{N}(4)$ $\quad$ ✓ $\quad$ $3a = 2b + c$

2) $V_0 = \frac{1}{N}(0) \qquad V_1 = \frac{1}{N}(2) \qquad V_2 = \frac{1}{N}(-4)$

$\qquad\qquad\quad\; \shortparallel \qquad\qquad\qquad\quad\; \shortparallel \qquad\qquad\quad\; \shortparallel$

$\qquad\qquad\quad\; a \qquad\qquad\qquad\quad\;\; b \qquad\qquad\quad\;\; c$

$$3a = 2b + c$$

$\square$

N4 TROVARE LE SOLUZIONI INTERE NON-NEGATIVE

DI $x^4 - x^2y^2 + y^4 + 2x^3y - 2xy^3 = 1$

$$\left(x^4 - x^2y^2 + y^4 + 2x^3y - 2xy^3\right) =$$

$$= \left(x^2 + xy - y^2\right)^2$$

$$x^2 + xy - y^2 = \pm 1$$

SE x, y SONO GRANDI, PIÙ O MENO

$$x^2 + xy - y^2 = 0 \to y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x$$

EURISTICA

SUPPONIAMO DI AVERE UNA SOLUZIONE (x,y)

DI $x^2+xy-y^2=\pm 1$.

ALLORA $\boxed{(y-x, x)}$ È SOLUZIONE:

INFATTI $(y-x)^2+(y-x)x-x^2=$

$=y^2-2xy+x^2+xy-x^2-x^2=$

$=-(x^2+xy-y^2)=\mp 1$

$x-(y-x)$

$y-x$

$(x,y)\to(y-x,x)\to(2x-y, y-x)$

$\to(2y-3x, 2x-y)\to(5x-3y, 2y-3x)\to\ldots$

SIA (x,y) UNA SOLUZIONE CON $0<x<y$. ALLORA LA QUANTITÀ $x+y$ DECRESCE SE PONGO:

$x=y-x$ $\quad$ $(x,y)\to x+y$

$y=x$ $\quad$ $(y-x,x)\to y$

NON PUÒ DECRESCERE PER SEMPRE

COSA PUÒ ANDARE STORTO?

i) $x \geq y$

ii) $x = 0$

i) $x \geq y$ $\qquad x^2 + xy - y^2 = \pm 1$

$$x^2 + xy \leq y^2 + 1$$
$$\rotatebox{90}{$\leq$}$$
$$y^2 + y^2$$

$\Rightarrow \quad y^2 \leq 1 \rightarrow y \leq 1$

ii) $x = 0 \rightarrow |-y^2| = 1 \longrightarrow y = 1$

(x, y) con $0 < x < y$

$\downarrow$

$(y - x, x)$ FA DECRESCERE LA SOMMA DELLE DUE COMPONENTI DELLA SOLUZIONE

PRIMA O POI VIENE A MANCARE

PRIMA O POI SI HA

(x, y) con $0 < x < y$ o $y - x = 0$

E $(y - x, x)$ SOLUZIONE CON $y - x \geq x$

$\to x=1 \to y-x=0\ ,\ y-x=1$

$$(x_0,y_0) \to (x_1,y_1) \to (x_2,y_2) \to \dots \to (0,1)$$

$$(x_2,y_2) \to (1,1) \xrightarrow{0} (0,1)$$

INEVITABILMENTE VADO A $(0,1)$

$$(x_0,y_0) \to (x_1,y_1)$$

$$x_0 = y_1$$

$$y_0 = x_1+y_1$$

$$(x_1,x_0) \to (x_2,x_1) \to (x_3,x_2) \to \dots \to (0,1)$$

$x_0 = x_1+x_2$

$x_1 = x_2+x_3$

...

$x_{n+1} = 0$

$x_n = 1$

FACENDO I PASSAGGI A RITROSO OTTENGO

$(x,y) = (F_n, F_{n+1})$

FIBONACCI

TEORIA DEI NUMERI – PREIMO18 POM

Note Title 5/23/2018

N5 $20n \mid \lfloor (\sqrt{5}+2)^n - 2^{n+1} \rfloor$

$\lfloor \ \rfloor = (\sqrt{5}+2)^n - 2^{n+1} - \varepsilon \in \mathbb{Z} \quad 0<\varepsilon<1$

$\varepsilon = (\sqrt{5}-2)^n < 1$

$(\sqrt{5}+2)^n - (\sqrt{5}-2)^n - 2^{n+1} =$

$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left[(\sqrt{5})^i 2^{n-i} - (\sqrt{5})^i (-2)^{n-i} \right] - 2^{n+1}$

per i dispari, $n-i$ è pari, $(-2)^{n-i} = 2^{n-i}$

$\Rightarrow$ sopravvivono solo i pari

$= \left[\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2j} 5^j \cdot 2^{n-2j} \right] 2 - 2^{n+1}$

$= 2\left[\cancel{2^n} + \binom{n}{2} 5 \cdot 2^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} 5^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2 - \cancel{2^n} \right]$

- I BINOMIALI CI DANNO I FATTORI p!

$\binom{p}{k} \equiv 0 \ (p)$ per $k = 1, \dots, p-1$

- RACCOGLIAMO UN FATTORE 5

Alla fine otteniamo $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot p \cdot [\text{roba}]$
che era la tesi

N6 SIANO f, g DUE POLINOMI MONICI TALI CHE:

- $\deg f$ SIA DISPARI;
- $\{f(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{g(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Th. $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ t.c. $f(n) = g(n+k) \ \forall n \in \mathbb{Z}$

I OSSERVAZIONE: $\deg g$ DEVE ESSERE DISPARI.

SE $\deg g$ FOSSE PARI:

$= n$

$$g(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot x^i$$

SE $|x| > 1 + \max\limits_{0 \le i \le n-1} \{c_i\} \cdot n$

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot x^i \le \sum_{i=0}^{n-1} \max_{0 \le i \le n-1} \{c_i\} \cdot x^i =$$

?

$$= \max_{0 \le i \le n-1} \{c_i\} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} x^i \le x^n$$

$$x^n > \sum_{i=0}^{n-1} x^i \left(\max_{0 \le i \le n-1} \{c_i\} \right)$$

STO USANDO $x^n \ge x \cdot x^{n-1} > x^{n-1}(1 + n \max\{c_i\})$

$$x^n \ge x \cdot x^i \cdot x^{n-i-1} > x^i (1 + n \max\{c_i\})$$

$\forall$ POLINOMIO $f(x)$ $\exists$ N t.c. SE x^n È IL COEFFICIENTE DI TESTA DI $f(x)$, ALLORA

$$|f(x) - x^n| < x^n \quad \forall x > N$$

SE $f(x)$ HA GRADO DISPARI, $g(x)$ HA GRADO DISPARI: SE AVESSE GRADO PARI

$$g(x) = x^{2n} + \sum_{i=0}^{2n-1} c_i x^i, \quad \text{MA } \exists N$$

TALE CHE $\left| \sum_{i=0}^{2n-1} c_i x^i \right| < x^{2n} \quad \forall |x| > N$

$\rightarrow$ QUINDI g È NEGATIVO UN NUMERO FINITO DI VOLTE

$$f(x) = x^{2m+1} + \sum_{i=0}^{2m} c_i x^i, \quad \text{MA } \exists N$$

TALE CHE $x^{2m+1} < \sum_{i=0}^{2m} c_i x^i \quad \forall x < -N$

$\rightarrow$ $f(x)$ SIA INFINITE NEGATIVO

(E ASSUMA QUINDI INFINITI VALORI NEGATIVI).

$f(x)$ È INIETTIVA DA UN CERTO PUNTO IN POI:

$\exists N$ TALE CHE $f(x) : \{x \geq N\} \rightarrow \mathbb{Z}$ È

INIETTIVO E CRESCENTE.

$$\tilde{f}(x) = f(x) - f(x-1) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$$

$$- (x-1)^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x-1)^i = n x^{n-1} +$$

(PERCHÉ $x^i - (x-1)^i$ HA GRADO $i-1$)

TERMINI DI GRADO MINORE

$\tilde{f}(x)$, SE $x > M \rightarrow \tilde{f}(x) > 0$

SCELTO DA NOI, PER IL RAGIONAMENTO

FATTO SU $|\tilde{f}(x) - x^n| < x^n$

SE $\tilde{f}(x) > 0 \quad \forall \; x > M$

ALLORA $f(x)$ È CRESCENTE E INIETTIVA

DOPO M.

STESSA COSA PER $\tilde{g}(x) > 0$ E $g(x)$

QUINDI $\exists N$ TALE CHE:

- SE $x \leq N \to f(x) < f(N+1)$

$$g(x) < g(N+1)$$

PERCHÉ $f(x) < 0$ E $g(x) < 0$ SE

$x < -M$ PER UN CERTO M

- SE $x > N \to f(x+1) > f(x)$

$$g(x+1) > g(x)$$

PRENDIAMO IL MASSIMO TRA $g(N+1)$ E $f(N+1)$.

POICHÉ GLI INSIEMI $\{f(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ E

$\{g(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ COINCIDONO, DEVE ESISTERE

K TALE CHE (SUPPONIAMO IL MAX SIA $f(N+1)$)

$$f(N+1) = g(N+K)$$

DOVE $K \geq 1$, PERCHÉ SE $K \leq 0$:

$$g(N+K) = f(N+1) \geq g(N+1)$$

PERCIÒ $f(N+1) = g(N+K)$

f(TUTTI $< N+1$) g(TUTTI $< N+K$)

$$\begin{array}{ccc} \wedge & & \wedge \\ f(N+1) & = & g(N+K) \\ \wedge & & \wedge \\ f(N+2) & & g(N+K+1) \\ \wedge & & \wedge \\ f(N+3) & & g(N+K+2) \end{array}$$

A QUESTO PUNTO I DUE INSIEMI DEVONO COINCIDERE E I MINIMI VALORI NON ANCORA ACCOPPIATI DEVONO COINCIDERE

SE CHIAMO S_j L'INSIEME DEI VALORI DI $f(N+x)$ CON $x \geq J$, E F_j E G_j GLI INDICI TALI CHE

$$x \in F_j \Leftrightarrow f(x) \in S_j$$
$$x \in G_j \Leftrightarrow g(x) \in S_j$$

ALLORA: $a = \min F_j$ $\quad b = \min G_j$ $\quad c = \min S_j$

$$f(a) = g(b) = c$$

IN PARTICOLARE $F_j = \{x : x \geq N+j\}$

$G_j = \{x : x \geq N+j+k-1\}$

N7 Per quali $k \geq 2$ $\binom{2n}{n} \bmod k$ è definitivamente periodica.

Sicuramente è vero per $k = 2$

$$\binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$$

$$\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n}.$$

Facciamo vedere che non funziona per nessun altro k.

Oss. Se fosse periodica mod k, lo sarebbe anche mod d per ogni d divisore di k

Caso 1 $\quad k = 2^a \quad \to \quad d = 4$

Caso 2 $\quad k \neq 2^a \quad \to \quad d = p$ primo dispari

$\boxed{d=4}$ Considero la successione degli interi

$$n = 2^m + r \qquad \text{con} \quad r = 0, 1, \dots, 2^m - 1$$

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^{2^{m+1}} (1+x)^{2r}$$

Oss. Divisibilità per p del coefficiente binomiale

$$\binom{p^a}{i} = \frac{p^a}{i} \cdot \frac{(p^a-1)}{1} \cdot \frac{(p^a-2)}{2} \cdots \frac{(p^a-i+1)}{(i-1)}$$

Se $p^b \| i$ allora la divisibilità è p^{a-b}

mod 4 $\quad (1+x)^{2n} = \left(1 + 2x^{2^m} + x^{2^{m+1}}\right)(1+x)^{2r}$

$$\binom{2n}{n} \equiv \begin{cases} 2 & r = 0 \\ 0 & r = 1, \dots 2^{m-1} \end{cases}$$

La serie di zeri si allunga al crescere di m (e c'è un numero $\neq 0$) $\to$ NON PERIODICA

Caso 2 $\quad k = p$ primo dispari

$n = \dfrac{p^m + r}{2}$ $\quad r$ dispari $r \leq p^m$ ✓ $\quad 2n = p^m + r$

$(1+x)^{2n} = (1+x)^{p^m} \cdot (1+x)^r$

ha termini $\qquad (1+x)^{p^m} \equiv 1 + x^{p^m} \pmod p$

- di grado $\leq r$
- x^r, x^{p^m}
- di grado $> p^m$.

Se $r = p^m$ il coeff è $\equiv 2 \pmod p$

Se $r < h < p^m$ il coeff. è $\equiv 0 \pmod p$

Nell'intervallo $n = \dfrac{p^m + r}{2}$ c'è un 2

e tutti gli altri sono zero

DI NUOVO NON PERIODICA

N8 $\quad n \in \mathbb{N} \qquad 7^{7^n} + 1^{7^n} \qquad 2n + 3$

$$\underbrace{(7+1)}_{2^3}\left(7^{7^n - 1} - 7^{7^n - 2} + \dots - 7 + 1\right)$$

$$\Phi_m(x) = \prod_{\substack{\zeta^m = 1 \\ \zeta^d \neq 1 \ \forall d < m}} (x - \zeta) \qquad x^m - 1 = \prod_{d \mid m} \Phi_d(x)$$

$[\varphi(m)]$

$$7^{7^n} + 1 = \frac{7^{2\cdot 7^n} - 1}{7^{7^n} - 1} = \frac{\prod_{d \mid 2\cdot 7^n} \Phi_d(7)}{\prod_{d \mid 7^n} \Phi_d(7)} = \prod_{i=0}^{n} \Phi_{2\cdot 7^i}(7)$$

$$\Phi_2(7) = 7 + 1 = 8$$

$2n$ fattori primi in $\prod_{i=1}^{n} \Phi_{2\cdot 7^i}(7)$

2 fattori primi in $\Phi_{2\cdot 7^i}(7)$ $\forall i \geq 1$

—— ∘ —— ∘ ——

$\boxed{\Phi_{2d}(x) = \Phi_d(-x)}$ per d dispari

$\varphi(2d) = \varphi(2)\cdot\varphi(d)$ $\varphi(d)$

$= \varphi(d)$

$\zeta : \Phi_d(\zeta) = 0 \Rightarrow \zeta^d = 1$

$\Phi_d(-\zeta) = 0 \Rightarrow (-\zeta)^d = -1 \Rightarrow \zeta^{2d} = 1$

$\boxed{\Phi_{p^j}(x) = \Phi_p\left(x^{p^{j-1}}\right)}$

$\varphi(p^j) = p^{j-1}(p-1)$ $\varphi(p)\cdot p^{j-1}$

$(p-1)\,p^{j-1}$

$\zeta : \Phi_p\left(\zeta^{p^{j-1}}\right) = 0$

$\Rightarrow \zeta^{p^j} = 1$

—— ∘ —— ∘ ——

$$\Phi_{2\cdot 7^i}(7) = \Phi_{7^i}(-7) = \Phi_7\left(-7^{7^{i-1}}\right)$$

$$\Phi_7(\omega) = \omega^6 + \omega^5 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1$$

$$\Rightarrow 7^{6\cdot 7^{i-1}} - 7^{5\cdot 7^{i-1}} + 7^{4\cdot 7^{i-1}} - 7^{3\cdot 7^{i-1}} + 7^{2\cdot 7^{i-1}} - 7^{7^{i-1}} + 1$$

$$\left(7^{3\cdot 7^{i-1}} + \cancel{A\cdot 7^{2\cdot 7^{i-1}}} + B\cdot 7^{7^{i-1}} + 1\right)\left(\_\ \_\ \_\ \_\ \_ \right)$$

NO

$$k\cdot \underbrace{7^{2,5\cdot 7^{i-1}+0,5}} \qquad 7^{1,5\cdot 7^{i-1}+0,5} \qquad 7^{0,5\cdot 7^{i-1}+0,5}$$

$$k\cdot\sqrt{7}\cdot\left(7^{7^{i-1}}\right)^{2,5} \qquad 7^{7^{i-1}} = t$$

$$\left(t^3 + \overset{1}{A}\sqrt{7}\,t^{2,5} + \overset{3}{B}t^2 + \overset{1}{C}\sqrt{7}\,t^{1,5} + \overset{3}{D}t + \overset{1}{E}\sqrt{7}\,t^{0,5} + 1\right)\cdot$$

$$\left(t^3 + \overset{-1}{F}\sqrt{7}\,t^{2,5} + \overset{3}{G}t^2 + \overset{-1}{H}\sqrt{7}\,t^{1,5} + \overset{3}{I}t + \overset{-1}{J}\sqrt{7}\,t^{0,5} + 1\right)$$

$$\begin{cases} A + F = 0 \quad \checkmark & 1-1 \\ B + G + 7AF = -1 \quad \checkmark & \\ C + BF + AG + H = 0 \quad \checkmark & C - \cancel{3} + \cancel{3} + H = 0 \\ D + 7CF + BG + 7AH + I = 1 & \to \quad 6 \cancel{+} -7C - 7C + 9 = 1 \\ E + DF + CG + BH + AI + J = 0 \quad \checkmark & -14C = -14 \\ 1 + 7AJ + BI + 7CH + DG + 7EF + 1 = -1 \quad \checkmark & \leftarrow \\ A + BJ + CI + DH + EG + F = 0 \quad \checkmark & \\ B + 7CJ + DI + 7EH + G = 1 \quad \checkmark & \\ C + DJ + EI + H = 0 \quad \checkmark & \end{cases}$$

$$\begin{cases} D + E J + 1 = -1 \quad \checkmark \\ E + J = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$7^{7^n} + 1 = 8 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \left(7^{3\cdot 7^i} + 7^{\frac{5\cdot 7^i + 1}{2}} + 3\cdot 7^{2\cdot 7^i} + 7^{\frac{3\cdot 7^i+1}{2}} + 3\cdot 7^{7^i} + 7^{\frac{7^i+1}{2}} + 1 \right) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \left(7^{3\cdot 7^i} - 7^{\frac{5\cdot 7^i+1}{2}} + 3\cdot 7^{2\cdot 7^i} - 7^{\frac{3\cdot 7^i+1}{2}} + 3\cdot 7^{7^i} - 7^{\frac{7^i+1}{2}} + 1 \right).$$

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \qquad (x+1)^6$$

$$x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$$

$$7x^5 + 14x^4 + 21x^3 + 14x^2 + 7x =$$

$$= 7x\left(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1\right) =$$

$$= 7x\left(x^2 + x + 1\right)^2$$

$$\left(7^{\frac{d+1}{2}}\right)^2 \longleftarrow \text{se } x = 7^d$$

$$\Phi_{14}(x) = (x+1)^6 - 7x\left(x^2 + x + 1\right)^2$$

$$7^{7^n}+1=\frac{7^{7^n}+1}{7^{7^{n-1}}+1}\cdot\frac{7^{7^{n-1}}+1}{7^{7^{n-2}}+1}\cdots\frac{7^{7^1}+1}{7^{7^0}+1}(7+1)$$

$$7^a+1 \mid 7^{ab}+1$$