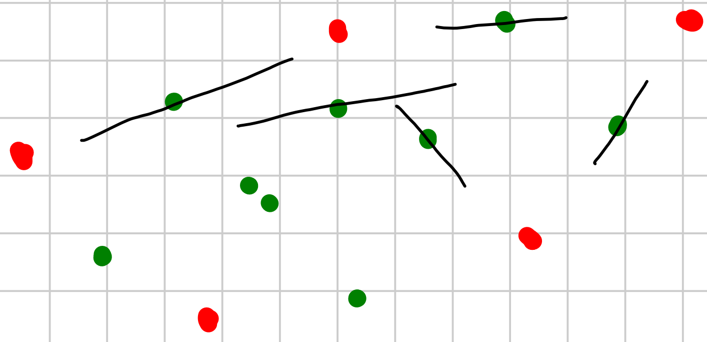
Prelmo 2018 C mattina

Note Title 5/22/2018

C1

Ci sono punti sul piano

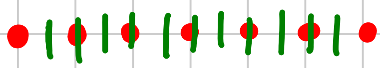


Quanti punti al min?

Soluzione:

Parte costruttiva ($\leq$)

Costruisco i punti allineati e con coord intere



$\Downarrow$ sono soddisfatto delle sovrapposizioni

$$\min \leq 2n-3$$

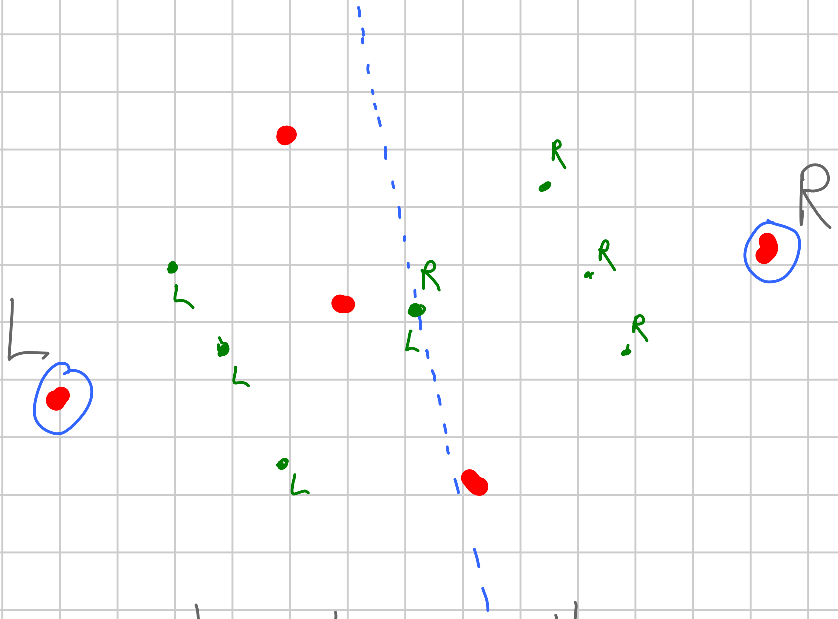
Parte negativa ($\geq$)

Idea generale portata da casa:

cerco qualcosa di estremale

Idea particolare è:

prendo (una delle) coppie di punti $\boxed{\text{più distanti}}$



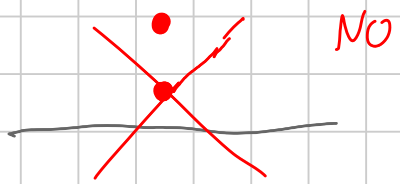
Osservo che i punti medi che ottengo con L stanno a sx di | mentre quelli che ottengo con R stanno a dx di | (sto usando la massimalità della distanza LR)

Inoltre 1 solo punto • è contato 2 volte (quello di LR)

Quindi ho almeno $(n-1)+(n-1)-1$ pti medi distinti.

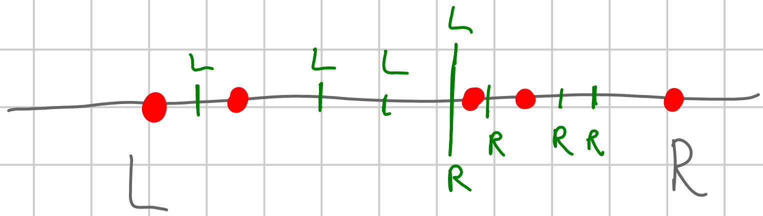
Soluzione alternativa alla parte $\geq$

Proietto tutti i punti • su una retta in modo che non ce ne siano 2 che vanno sullo punto



Ora, similmente a prima, ho metà p.ti medi a sx

e metà a dx



Ancora un'alternativa

Per induzione, se ho n punti •, ho almeno

$2n-3$ punti •

Prendo il punto $\boxed{\text{più a sx}}$ (che è unico

a meno di un'opportuna piccola rotazione)

allora considero la conf. di $n-1$ • senza

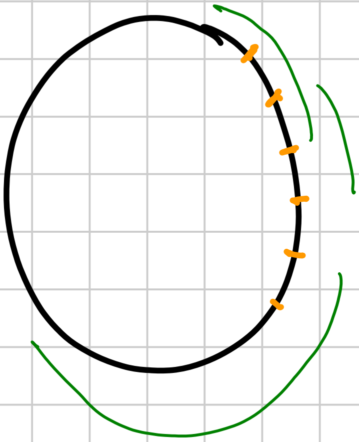
lui

$\Rightarrow$ mi sono perso per forza almeno 2 punti distinti

(il + a sx, il 2 da sx)

(il + a sx, il 3 da sx)

C2



ho 999 archetti unitari

ci sono d archi

di lungh. $1, 2, \dots, d$

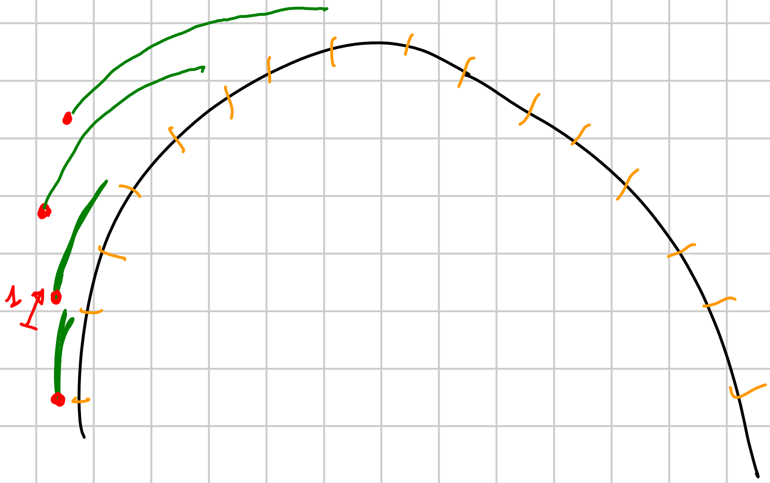
però mai

arco piccolo $\subseteq$ arco grande

max d?

Soluzione

Parte positiva ($\geq$)

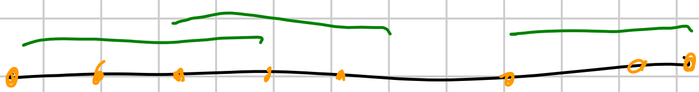


500 ci stanno

Parte negativa ($\leq$)

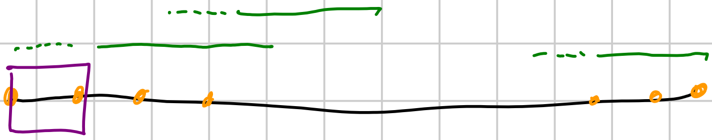
Oss: l'arco lungo 1 è da solo

allora lo taglio e ottengo



999 • e archi di lungh. 2, ..., d

Oss: accorcio tutti questi archi di 1 da SX



le lungh. degli archi sono 1, ..., d-1

vale ancora l'ipotesi del non contenimento

rimane scoperto

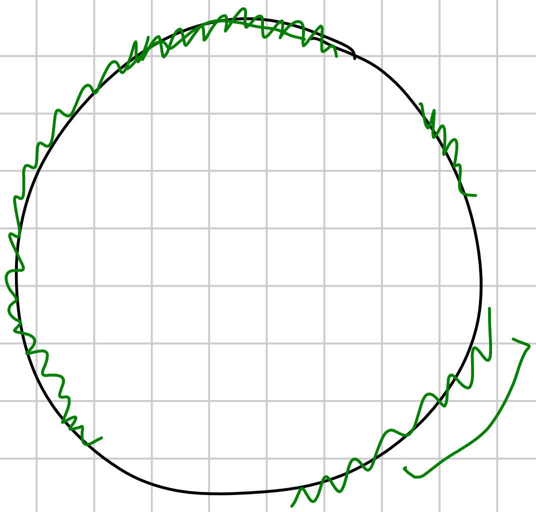
Per ricondurmi all'ip. ind. ricongiungo i 2 estremi •

Alternativa alla parte negativa ($\leq$)

Aggiungo un arco alla volta, stando attento ad aggiungere quello più lungo all'inizio

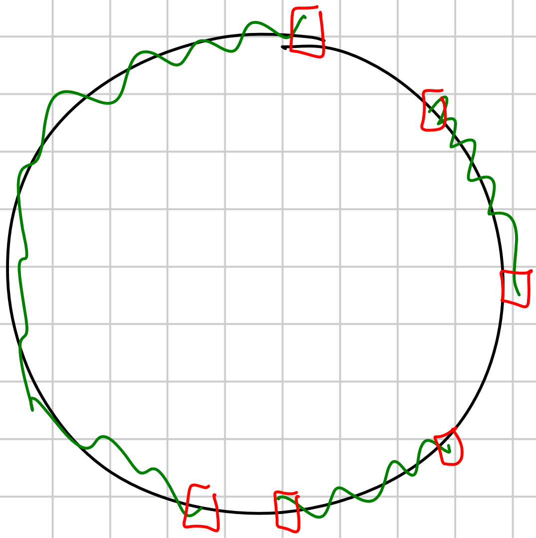
Dimostro che i segmentini unitari coperti dall'unione aumentano di almeno 1 ogni volta

Quasi...



ho appena aggiunto uno degli archi

Considero un qualsiasi sottoins. di archi che contenga anche quello da d (≥ 501) e anche un altro



$\exists$ un estremo $\square$ che non $\in$ all'arco lungo d

lo tolgo $\Rightarrow$ l'area verde scende di 1 (almeno)

Ora basta controllare l'area verde con tutti gli archi e quella in cui c'è solo l'arco da 501

Hint per soluzione alternativa (al $\leq$)

Disporre gli archi in ordine, in senso orario e stimare di quanto si sposta il primo estremo

e " " l'ultimo ".

C3

100 nani → pesano $1, 2, \dots, 100$ kg

la barca porta ≤ 100 kg

il vogatore all'indietro è sempre diverso

Riesco a portarli tutti ?

Soluzione

No!

[Oss. slegata: con 99 al posto di 100 si riesce.]

Stimo la seguente quantità: il peso spostato in avanti

$$\underbrace{1+\dots+100}_{\text{nani finali}} + \underbrace{1+\dots+(v-1)}_{\text{quelli che voglio riportare indietro}} \boxed{\leq} \text{peso avanti} \boxed{\leq} 100 \cdot \underbrace{v}_{\text{(viaggi in avanti)}}$$

$$\binom{101}{2} + \binom{v}{2} \leq 100\, v \quad \text{-----} \quad (v-100)(v-101) \leq 0$$

$$\Rightarrow v = \begin{cases} 100 \\ 101 \end{cases}$$

e in ciascuno dei casi ho $\boxed{1^{\frown} =}$

$\Rightarrow$ Tutti i viaggi in andata sono carichi a 100

" " ritorno portano esatt. 1 nano

e tutti i nani fanno esatt. 2 viaggi (tranne quello da 100) da 1 a V-1 in andata al +

Ora si osserva che
100 viaggia da solo
99 viaggia con 1 (2 volte)
$\Downarrow$
98 " 2 ...
$\Downarrow$
97 3 ..
⋮
51 " 49 "

e rimane spaiato il tizio da 50

Soluzione alternativa di qualcuno ...

Dividiamo i nani in 2 gruppi: PICCOLI 1, ..., 49 | GRANDI $\underbrace{50, \ldots, 100}_{51}$

Q = #(GRANDI sulla sponda destra) + #(PICCOLI che possono ancora viaggiare)

Q non aumenta dopo una coppia di viaggi andata/ritorno

invece con l'ultimo viaggio può aumentare di 1.

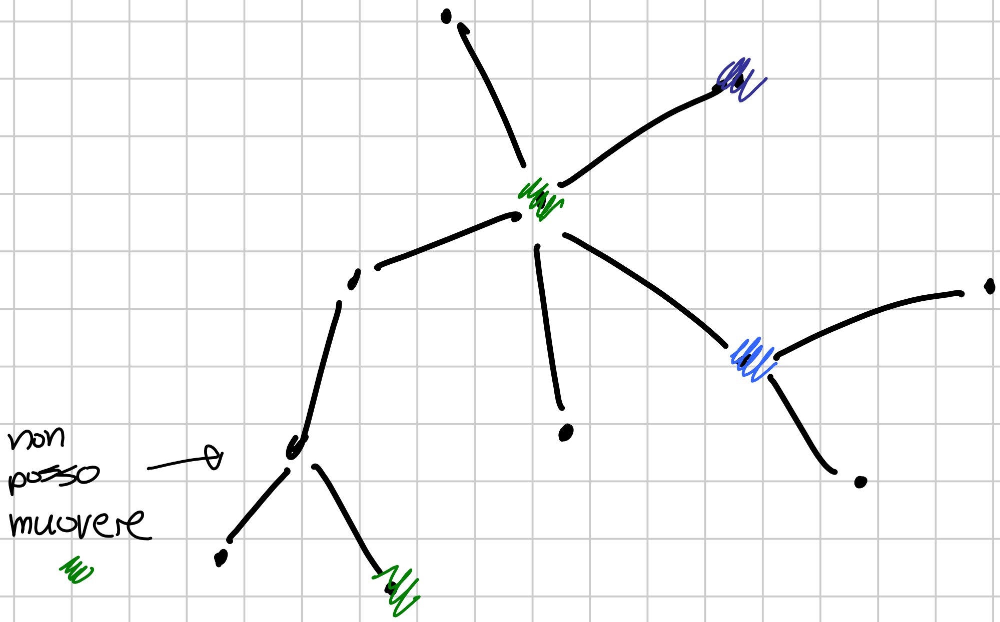
$Q(\text{inizio}) = 0 + 49 = 49$

$Q(\text{fine}) \leq 50$

$\Downarrow$

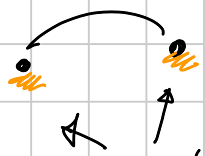
meni GRANDI a dx

C4



A turno colorano i vertici con

in modo che non ci sia mai

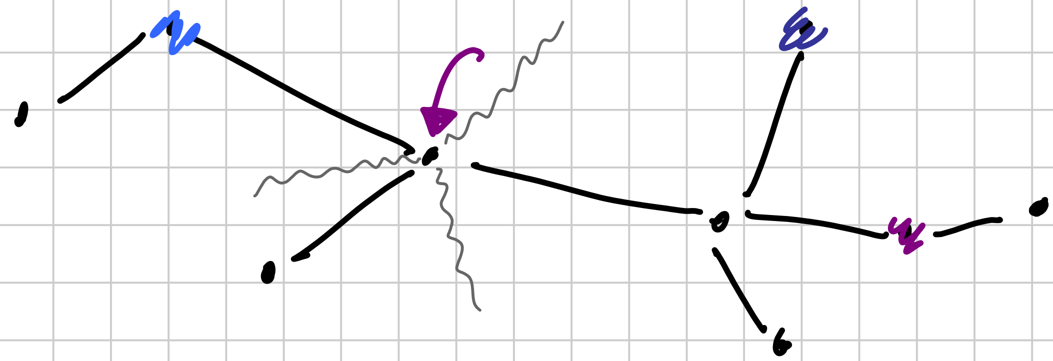


Alberto vince se tutti i vertici sono colorati

altrimenti ... (si ricomincia?)

Soluzione

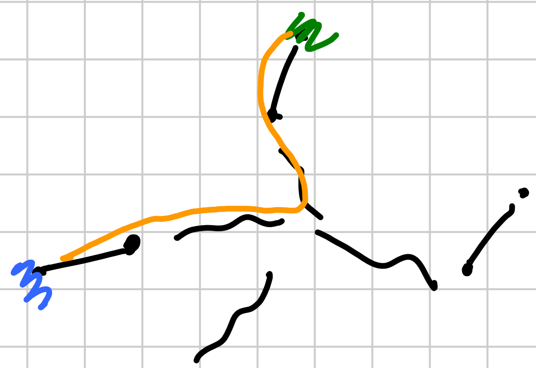
Oss. fondamentale: un vertice colorato taglia l'albero



gli alberi rimasti non si parlano.

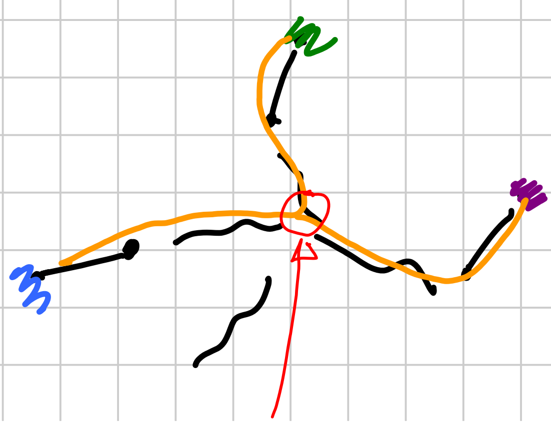
Ora gioco su alberi che hanno solo alcune foglie colorate. Se Alberto riesce a controllare il numero di foglie colorate (≤ 2) allora vince.

caso 2 colorate



in tal caso coloro un vertice sul percorso

caso $\exists$ componente con 3 foglie



muovo sul punto ✓ e vinco!