PREIMO - COMBINATORIA P

Note Title 5/22/2018

C5

$a_1, \dots, a_{2017}$ 2017 scatoloni

OSS. 2017 è primo $\Rightarrow 2017 \mid 43\sum a_i \Rightarrow 2017 \mid \sum a_i$

oss. a_i funziona $\Rightarrow a_i + k$ funziona

WLOG posso supporre $a_i \in \mathbb{Z}$ $\sum a_i = 0$

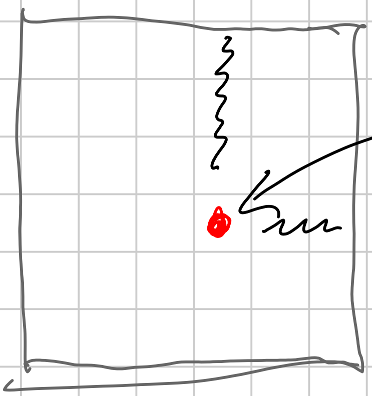
$a_1 = 42$ $a_2, \dots, a_{43} = -1$ $a_i = 0$ per $i > 43$

A ogni mossa ciclo i primi 43 scatoloni: dopo 43 mosse ho finito. D'altra parte, uno scatolone inizia con 42 sassolini, quindi almeno 43 mosse servono.

Per avere $a_i > 0$, mi basta aggiungere 6749.

C6

n



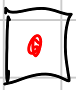
n

Tutte le caselle sono colorate

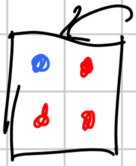
rossa

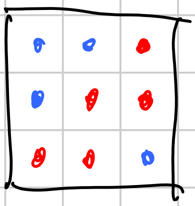
nella zona zigrinata non ci sono contemp. caselle rosse sopra e a destra

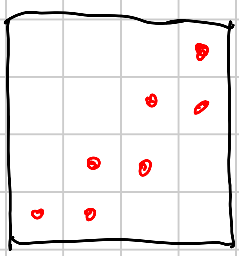
Qual è il minimo numero di colori per cui questo è possibile?

n=1  1 colore

non può essere rossa

2  2 colori

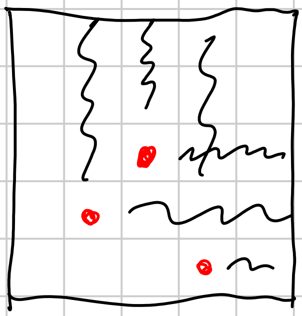
3  2 colori



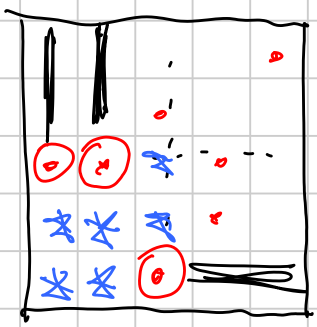
2 sembra non bastare

Se uso k colori avrò in media $\frac{n^2}{k}$ caselle dello stesso colore $\overset{\text{Pigeonhole}}{\rightsquigarrow}$ $\left\lceil \frac{n^2}{k} \right\rceil$ caselle con uno stesso colore

Approccio quantitativo dubbio.



ogni casella colorata vieta una regione così.



Ah! Ma se

allora non ho

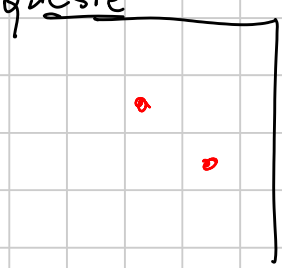
Allora per ogni casella rossa scelgo o la semiriga o la semicolonna libera (a caso se sono entrambe libere)

Ora, per ogni colonna c'è al più 1 casella che vieta la semicolonna
" " riga " " " " " " " " semiriga

Quindi le caselle rosse sono al più $2n$.

Anzi, almeno una casella (la più in alto a destra) o una di queste

vieta sia la semicolonna sia la semiriga.



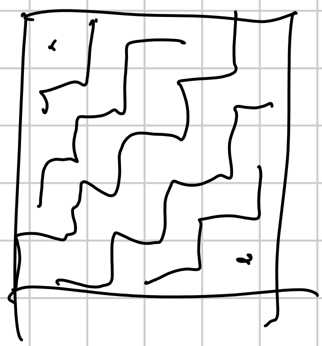
$\Rightarrow 2n-1$

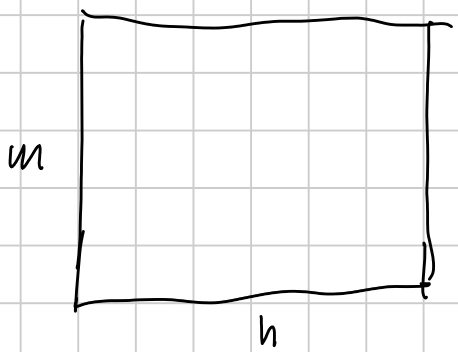
Quindi i colori sono almeno $\left\lceil \frac{n^2}{2n-1} \right\rceil \sim \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

si tratta di controllare la parità:

n dispari	$n=2k+1$	almeno $k+1$
n pari	$n=2k$	almeno $k+1$

E se ho $k+1$ colori?





Induzione su $m+n$ $\quad m+n \leq 3$ a mano

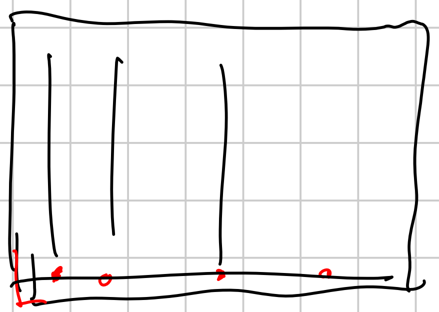
Tesi # caselle di 1 colore $\leq m+n-1$

passo induttivo: prendo 1 colore e l'ultima riga

a) non ci sono caselle rosse tolgo tutta la riga

b) ci sono

tolgo l'ultima riga e le colonne



← k caselle rosse

delle caselle rosse tranne la più destra

Quante caselle rosse ho tolto? k

Quante righe e col. ora? k-1 col. in meno
1 riga in meno

$\Rightarrow$ $m+n$ è calato di k anche lui $\square$

occhio alla dim.!

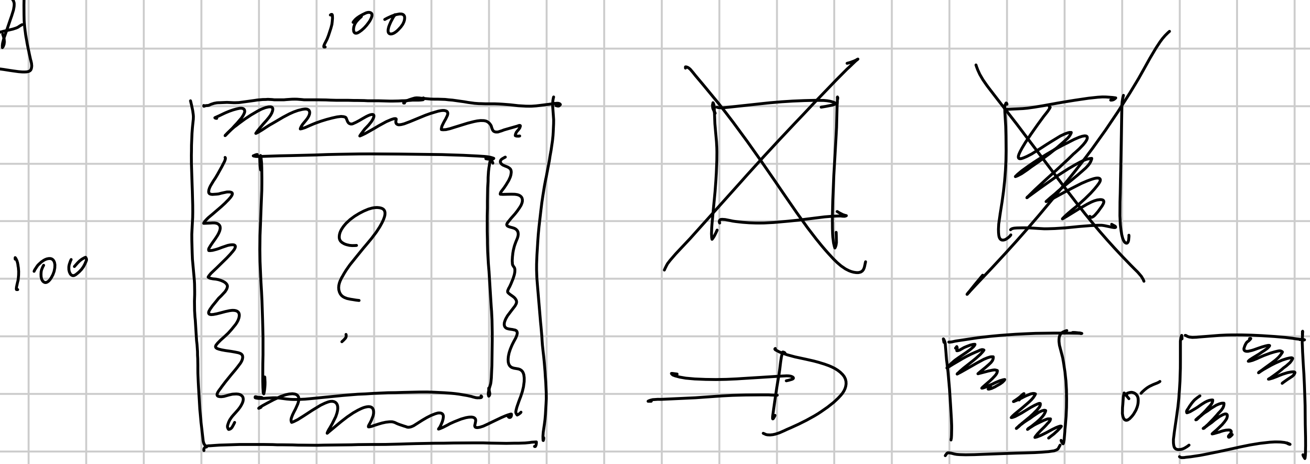
Coppie di caselle uguali sulla stessa riga $\geq n$
(su tutta la tabella)

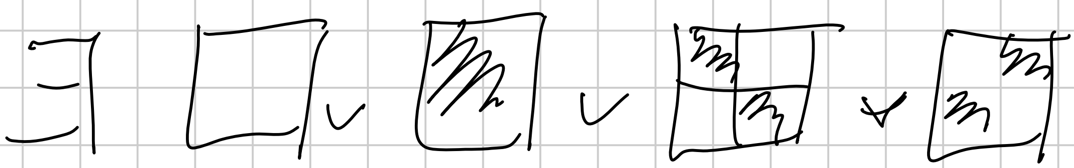
con casella più a sin. in colonne distinte

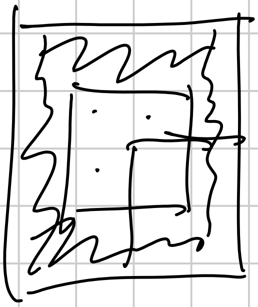
ma ci sono solo $n-1$ colonne in cui può stare la casella più a sinistra di una coppia!

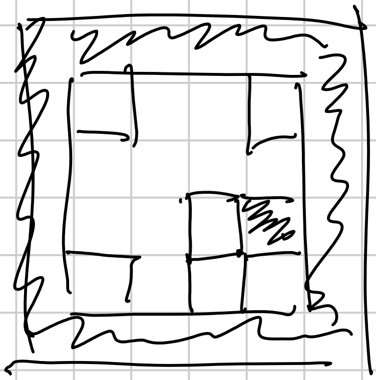
se ci sono k caselle sulla stessa riga con lo solo $k-1$ coppie.

$\boxed{C7}$

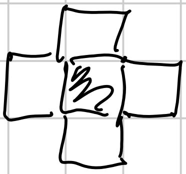


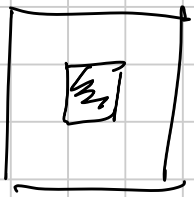






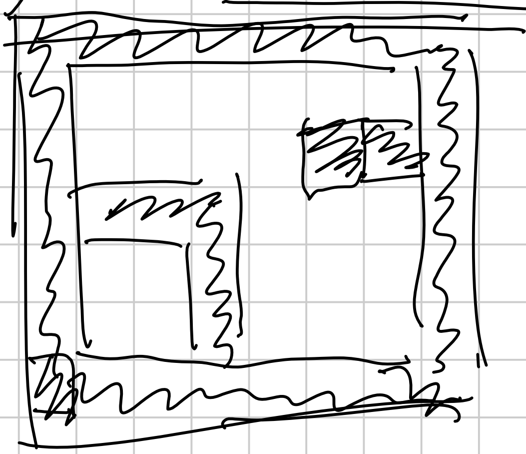
...

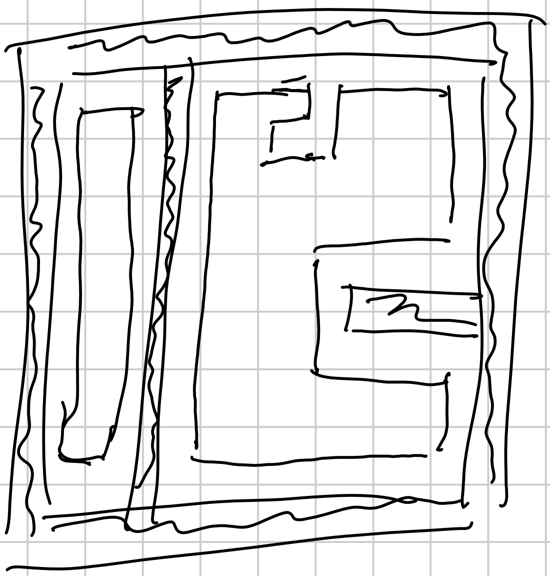


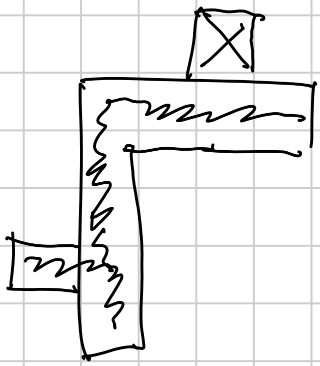


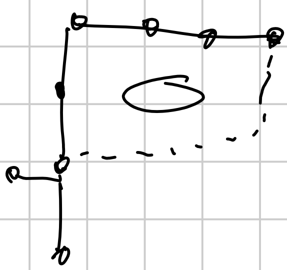
connesse

adiacenti

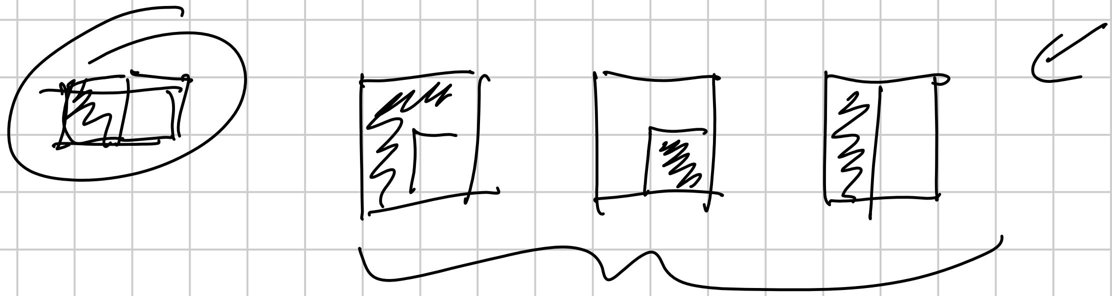




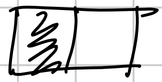


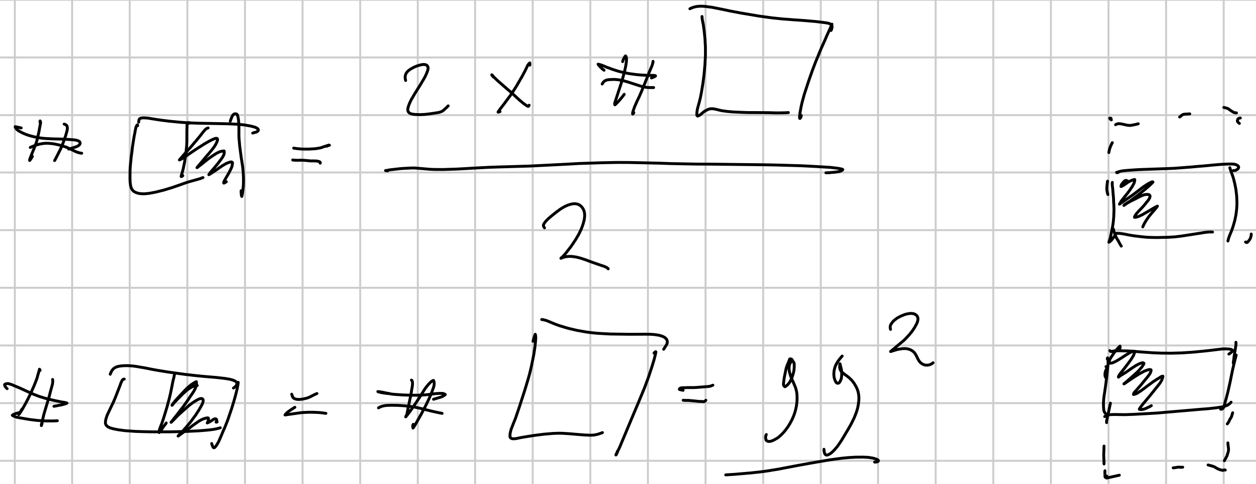


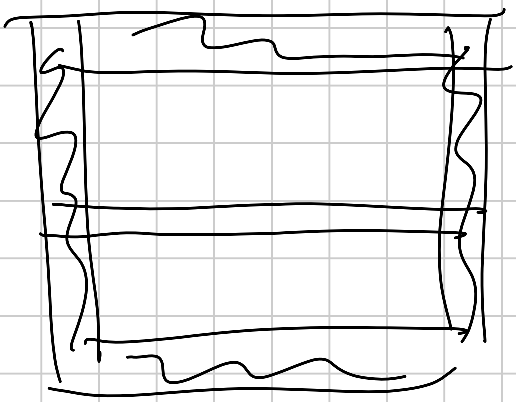
$A + \frac{P}{2} =$ dispari

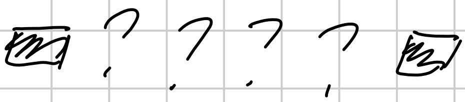


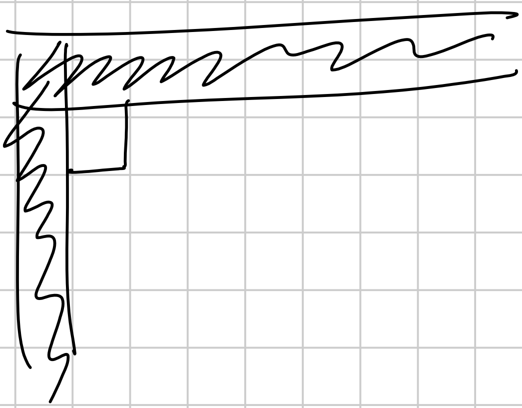
contiene 2

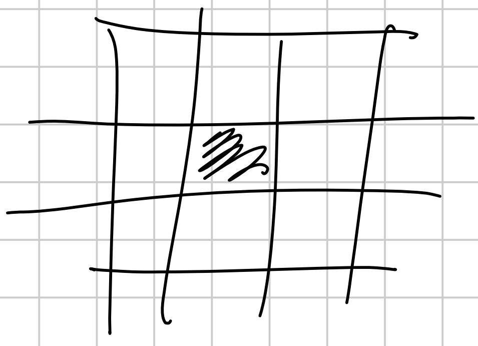


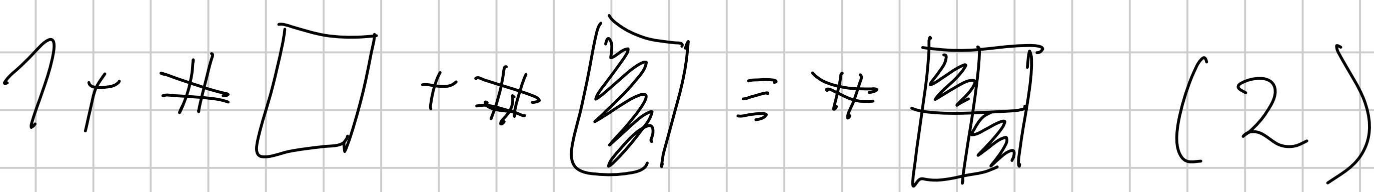












C8 campione in carica

$s_1 \quad s_2 \quad \ldots \quad s_n$

Ad ogni domanda chi risponde giusto $+2$ pt

" sbagliato $+0$ (se sfidan)

$+1$ (se campione)

Dimostrare che se il campione ha un vantaggio di almeno $2^{n-2}+1$, riesce a tenere un vantaggio fino alla fine.

(Non) Soluzione

guardo la differenza di punti tra il campione e lo sfidante migliore ...

guardo la somma delle differenze ...

guardo una qualunque media di queste differenze...

Soluzione vera

Oss: posso assumere che il campione sbaglia sempre

(se ad un certo punto sta $\leq s_i$ allora levando le domande a cui ha risposto corrett. allora alla fine sta ancora $\leq s_i$)

Oss: traslo i punti guadagnati

$$\begin{cases} +1 & (\text{giusto}) \\ -1 & (\text{sbag, sf}) \\ 0 & (\text{sbag, camp}) \end{cases}$$

Ora dopo ogni domanda, un po' degli sfidanti fanno +1, gli altri fanno −1

Inoltre il campione può far perdere un gruppetto di sfidanti (che hanno dato la stessa risposta).

Strategia: il campione si tiene una lista che può contenere insiemi di sfidanti

ora se un sottoinsieme " dà la stessa risposta e sta sulla lista, allora li faccio perdere e li cancello dalla lista

altrimenti aggiungo quelli che hanno guadagnato il +1 alla lista.

(wlog?) le risposte possibili sono solo sì o no

Osservo che non capita mai un insieme e il suo complementare nella lista.

Prendo uno sfidante S_i

in un certo momento il suo punteggio è

$$- \underbrace{\text{Vantaggio del campione}}_{2^{n-2}+1} + \underbrace{\text{\# di volte in cui compare sulla lista}}_{2^{n-1}} \quad (*)$$

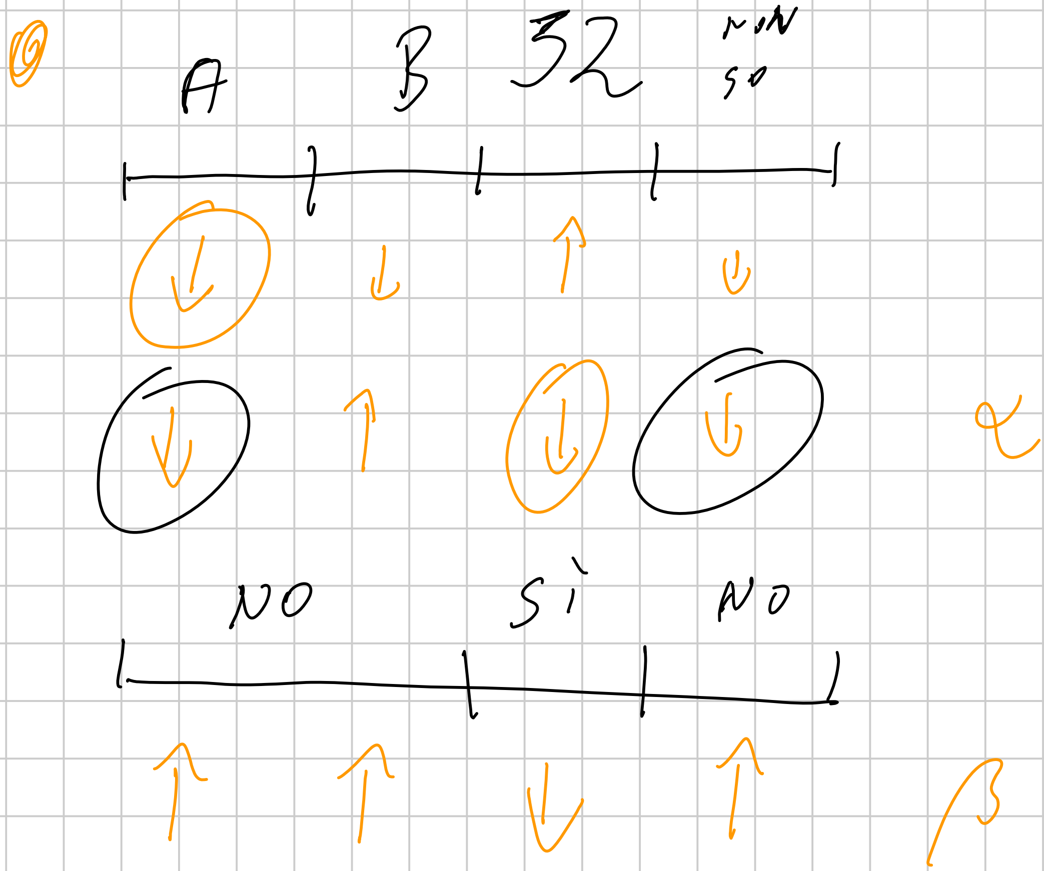
th

< 0

Ritocco la strategia:

Se nessuno dei 2 sottoinsiemi sta sulla lista scelgo quello che non contiene S_1

ora $(*)$ diventa 2^{n-2}



$\beta \supseteq \alpha$