TEORA DEI NUMERI - PREIMO 18

N1) $a_1, \dots a_{2017}$ interi >0

$$(a_1^{2017}+a_2)\cdot\ldots\cdot(a_{2017}^{2017}+a_1)=p^K$$

Sol: l'unico è 2^{2017} (cioè $a_i=1$)

se $p\neq 2$ ogni parentesi è P+D

se $a_1\equiv 0\,(2)$ $a_2\equiv 1\,(2)$ ... $a_{2017}\equiv 0\,(2)$

$\Rightarrow p=2$

$$(a_1^{2017}+a_2)\ldots \quad =2^K$$

- tutti gli a_i sono pari; $a_i=2^{\alpha_i}d_i$ con $2\nmid d_i$

$$2^{2017\alpha_i}d_i+2^{\alpha_{i+1}}d_{i+1}=2^{\beta_i}$$

se $2017\alpha_i\neq\alpha_{i+1}$ $\quad 2^{\min}(2\ldots+d)$

vale allora $2017\alpha_i=\alpha_{i+1}\Rightarrow\alpha_j=2017^j\alpha_1$

$2017\alpha_{2017}=\alpha_1 \Longrightarrow \alpha_1=2017^{2017}\alpha_1$

- tutti gli a_i sono dispari

MOD 4 : $a_i^{2017} + a_{i+1} \equiv a_i + a_{i+1}$ (4)

perché $a_i^{2017} + a_{i+1} = 2^{h_i}$

$h = 1 \Rightarrow a_i = a_{i+1} = 1$

$h \geq 2 \Rightarrow a_i + a_{i+1} \equiv 0$ (4)

$(a_1^{2017} + a_2)(a_2^{2017} + a_3) \ldots \ldots (a_{2017}^{2017} + a_1)$

se nessun $a_i = 1 \Rightarrow a_i + a_{i+1} \equiv 0$ (4)

$\Rightarrow$ sono del tipo 1, 3, 1, ...

No perché c'è un numero dispari di a_i

se ho $a_i = 1$ $\quad a_{i-1}^{2017} + 1 = 2^{h_i}$ $\Leftarrow$ È IMPOSSIBILE

$1 + a_{i+1} = 2^{h_{i+1}}$

$a^{2017} + 1 = 2^{g}$

guadagno di un primo: $a^{2017} + 1$ ha un fattore primo in più di $a+1$

(a meno di $a = 1$, che è quello che volevamo)

N2

$a_0 = 1 \quad b_0 = m$

$x_n = a_n + 1 \quad y_n = b_n + 1$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} (2x_n, y_n - x_n) \\ (x_n - y_n, 2y_n) \\ (x_n, y_n) \end{cases}$$

a ogni passo $\gcd(x_n, y_n) = \begin{cases} \gcd(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ 2 \cdot \gcd(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases}$

$d = \gcd(x_{n+1}, y_{n+1})$

$d \mid 2x_n \quad d \mid y_n - x_n \Rightarrow d \mid 2(y_n - x_n) = 2y_n - 2x_n$

$d \mid 2y_n$

$d \mid 2 \cdot \gcd(x_n, y_n)$

se $x_n = y_n = \frac{m+3}{2}$ $\quad \gcd(x_n, x_n) = x_n = 2^k$

infatti $\gcd(x_0, y_0) = 1$

$\frac{m+3}{2} = x_n = 2^k \qquad m + 3 = 2^{k+1}$

N3 $\{u_n\}$ E $\{v_n\}$

$u_0 = u_1 = 1$ $\quad u_n = 2u_{n-1} - 3u_{n-2}$

$v_0 = a \quad v_1 = b \quad v_2 = c \quad v_n = v_{n-1} - 3v_{n-2} + 27v_{n-3}$

SE $n > N \to u_n \mid v_n$

Th. $3a = 2b + c$

$\{u_n\}$: $x^2 - 2x + 3$

$\hookrightarrow$ RADICI: $(1+\sqrt{-2})$
$(1-\sqrt{-2})$

$\{v_n\}$: $x^3 - x^2 + 3x - 27 =$

$= (x-3)(x^2+2x+9)$ $\to$ RADICI:
3
$-1+2\sqrt{-2}$
$-1-2\sqrt{-2}$

SCRIVIAMO u_n: UN TEOREMA NOTO CI DICE

CHE $u_n = \alpha \cdot (1+\sqrt{-2})^n + \beta(1-\sqrt{-2})^n$

$n = 0 \to 1 = u_0 = \alpha + \beta$

$n=1 \rightarrow 1 = u_1 = \alpha(1+\sqrt{-2}) + \beta(1-\sqrt{-2})$

$\longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}$

$u_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{-2})^n + (1-\sqrt{-2})^n\right)$

TROVIAMO V_n:

APPROCCIO IMMEDIATO: $V_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot (-1+2\sqrt{-2})^n + \gamma(-1-2\sqrt{-2})^n$ E SISTEMA CON $n \in \{0,1,2\}$

$V_n = \alpha \cdot 3^n + \beta(-1+2\sqrt{-2})^n + \gamma(-1-2\sqrt{-2})^n$

V_n È INTERO.

$= \alpha \cdot 3^n + \left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\left(\underbrace{(-1+2\sqrt{-2})^n + (-1-2\sqrt{-2})^n}_{\text{È INTERO}}\right)$

$+ \left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\left(\underbrace{(-1+2\sqrt{-2})^n - (-1-2\sqrt{-2})^n}_{\sqrt{-2}\,\cdot\,\text{INTERO}}\right)$

$$\left[\text{I.E.: } (-1+2\sqrt{-2})^2 - (-1-2\sqrt{-2})^2 = -7-4\sqrt{-2} - (-7+4\sqrt{-2}) = -8\sqrt{-2} \right]$$

AFFINCHÉ v_n SIA INTERO VORREMMO α E $\frac{\beta+\gamma}{2}$ INTERI E $\frac{\beta-\gamma}{2\sqrt{-2}}$ INTERO.

$$x_n = 3^n$$

$$y_n = \frac{1}{2}\left((-1+2\sqrt{-2})^n + (-1-2\sqrt{-2})^n\right)$$

$$z_n = \frac{1}{4\sqrt{-2}}\left((-1+2\sqrt{-2})^n - (-1-2\sqrt{-2})^n\right)$$

$\{x_n\}$, $\{y_n\}$ E $\{z_n\}$ SONO SOLUZIONI DI $v_n = v_{n-1} - 3v_{n-2} + 27v_{n-3}$

CLAIM: OGNI v_n POSSIBILE SI SCRIVE COME

$$\frac{(\alpha x_n + \beta y_n + \gamma z_n)}{N}$$

CON $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ E N INTERO POSITIVO FISSATO

	0	1	2
X_n	1	3	9
Y_n	1	-1	-7
Z_n	0	1	-2

CI PIACEREBBE CHE FOSSERO

1	0	0
0	1	0
0	0	1

PER AVERE 1 0 0 :

X_n	1	3	9
$X_n - Y_n$	0	4	16
Z_n	0	1	-2

$X_n - 3Z_n$	1	0	15
$\frac{1}{4}X_n - \frac{1}{4}Y_n$	0	1	4
Z_n	0	1	-2

$X_n - 3Z_n$	1	0	15
$X_n - Y_n$	0	4	16
Z_n	0	1	-2

$X_n - 3Z_n$	1	0	15
$\frac{1}{4}X_n - \frac{1}{4}Y_n$	0	1	4
$\frac{1}{4}X_n - \frac{1}{4}Y_n - Z_n$	0	0	6

$\frac{3}{8}X_n + \frac{5}{8}Y_n - \frac{1}{2}Z_n$	1	0	0
$\frac{1}{12}X_n - \frac{1}{12}Y_n + \frac{1}{6}Z_n$	0	1	0
$\frac{1}{24}X_n - \frac{1}{24}Y_n - \frac{1}{6}Z_n$	0	0	1

IL CLAIM È DIMOSTRATO:

v_n È DEFINITO DA $v_0 = a$ $v_1 = b$ $v_2 = c$

$$a\left(\frac{3}{8}x_n+\frac{5}{8}y_n-\frac{1}{2}z_n\right)+b\left(\frac{1}{12}x_n-\frac{1}{12}y_n+\frac{1}{6}z_n\right)$$
$$+c\left(\frac{1}{24}x_n-\frac{1}{24}y_n-\frac{1}{6}z_n\right)$$

$\rightarrow \exists\ \alpha, \beta, \gamma$ INTERI E N INTERO POSITIVO TALE CHE

$$v_n = \frac{1}{N}\left(\alpha\cdot 3^n+\beta\cdot\left(\left(-1+2\sqrt{-2}\right)^n+\left(-1-2\sqrt{-2}\right)^n\right)+\gamma\cdot\left(\frac{\left(-1+2\sqrt{-2}\right)^n-\left(-1-2\sqrt{-2}\right)^n}{\sqrt{-2}}\right)\right)$$

SUPPONIAMO CHE

$u_n \mid v_n$ DEFINITIVAMENTE.

$$\rightarrow \frac{N}{2}\cdot\left(\left(1+\sqrt{-2}\right)^n+\left(1-\sqrt{-2}\right)^n\right) \mid \alpha\cdot 3^n+\beta\left(\left(-1+2\sqrt{-2}\right)^n+\left(-1-2\sqrt{-2}\right)^n\right)+\gamma\cdot$$

$$\frac{(-1+2\sqrt{-2})^n-(-1-2\sqrt{-2})^n}{\sqrt{-2}}$$

$$\boxed{-1+2\sqrt{-2}=(1+\sqrt{-2})^2}$$

$$\omega=1+\sqrt{-2} \qquad \bar{\omega}=1-\sqrt{-2}$$

$$\frac{N}{2}\cdot(\omega^n+\bar{\omega}^n) \;\Big|\; \alpha\cdot 3^n+\beta(\omega^{2n}+\bar{\omega}^{2n}) + \boxed{\gamma\,\frac{(\omega^{2n}-\bar{\omega}^{2n})}{\sqrt{-2}}}$$

INDEBOLIAMO L'IPOTESI E RICHIEDIAMO SOLO

$$\left(\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2}\right) \;\Big|\; RHS_n \quad \text{DEFINITIVAMENTE}$$

(STO USANDO $u_n \mid K\cdot v_n$
CON K FISSATO)

$$\frac{\omega^{2n}-\bar{\omega}^{2n}}{\sqrt{-2}} = (\omega^n+\bar{\omega}^n)\cdot\underbrace{\left(\frac{\omega^n-\bar{\omega}^n}{\sqrt{-2}}\right)}_{\text{INTERO}}$$

$$\boxed{(-1+\sqrt{-2})(-1-\sqrt{-2})=3}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2}\right) \mid \alpha\cdot 3^n+\beta\left(\omega^{2n}+\bar{\omega}^{2n}\right)$$

$$(\omega^n+\bar{\omega}^n)^2 = \omega^{2n}+\bar{\omega}^{2n}+2\cdot(\underbrace{\omega\bar{\omega}}_{=3})^n$$

$$\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2} \mid \underbrace{\beta}_{\text{INTERO}}\,(\underbrace{\omega^n+\bar{\omega}^n}_{\text{INTERO}})^2+(\alpha-2\beta)\cdot 3^n$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2} \mid (\alpha-2\beta)\cdot 3^n$$

$$u_0=u_1=1$$

u_n NON È MAI MULTIPLO DI 3 $\quad u_n=2u_{n-1}-3u_{n-2}$

$$\left(\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2}, 3\right)=1$$

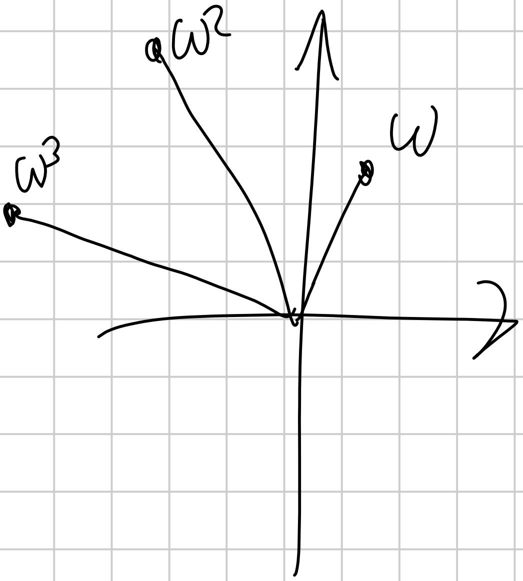
↳ $u_n \equiv -u_{n-1} \ (3)$

$$\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2} \mid (\alpha-2\beta) \quad \forall n$$

COSA DOVREBBE ACCADERE: $\alpha-2\beta=0$

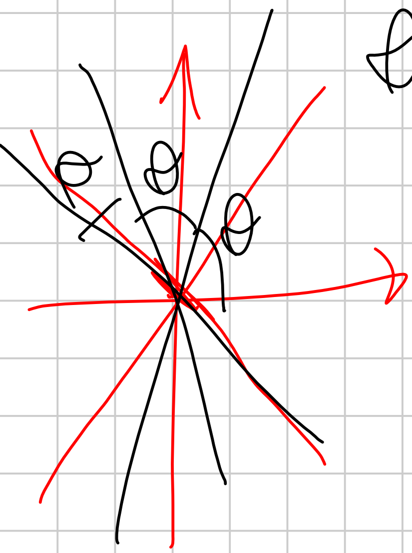
QUESTO ACCADE SE E SOLO SE $\left|\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2}\right|$

È ILLIMITATO (PUÒ DIVENTARE GRANDE A PIACERE)



$$\frac{\omega^n+\bar{\omega}^n}{2}=\mathrm{Re}(\omega^n)$$

LE POTENZE DI UN NUM COMPLESSO ω, SE ω FORMA UN ANGOLO θ CON L'ASSE DELLE X, ALLORA ω^n FORMA L'ANGOLO $n\theta$



$\theta < \frac{\pi}{2}$

$\exists \infty \ m$ t.c. $-\frac{\pi}{4} < m\theta < \frac{\pi}{4} \ (2\pi)$

SE $-\frac{\pi}{4} < n\theta < \frac{\pi}{4} \rightarrow |Re(w^n)| > |Im(w^n)|$

$\rightarrow Re(w^n) > \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |w^n| = \frac{3^n}{\sqrt{2}}$

$\frac{w^n + \bar{w}^n}{2} \mid (\alpha - 2\beta) \rightarrow \alpha - 2\beta = 0$

PERCHÉ $\frac{w^n + \bar{w}^n}{2}$ È ILLIMITATO

$$v_n = \frac{1}{N}\left(2\beta\, 3^n + \beta\left(w^{2n} + \bar{w}^{2n}\right) + \gamma\left(\frac{w^{2n} - \bar{w}^{2n}}{\sqrt{-2}}\right)\right)$$

VERIFICHIAMO SEPARATAMENTE PER: 1) $\beta = 1, \gamma = 0$

2) $\beta = 0, \gamma = 1$

1) $v_0 = \underbrace{\frac{1}{N}(4)}_{a}$ $\quad v_1 = \underbrace{\frac{1}{N}(4)}_{b}$

$v_2 = \underbrace{\frac{1}{N}(4)}_{c}$ ✓ $\quad 3a = 2b + c$

2) $v_0 = \frac{1}{N}\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$ $\quad v_1 = \frac{1}{N}\begin{pmatrix}2\end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \frac{1}{N}\begin{pmatrix}-4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\end{pmatrix} = a$, $\begin{pmatrix}2\end{pmatrix} = b$, $\begin{pmatrix}-4\end{pmatrix} = c$

$3a = 2b + c$

$\square$

N4 TROVARE LE SOLUZIONI INTERE NON-NEGATIVE DI $x^4 - x^2y^2 + y^4 + 2x^3y - 2xy^3 = 1$

$$(x^4 - x^2y^2 + y^4 + 2x^3y - 2xy^3) =$$
$$= (x^2 + xy - y^2)^2$$

$$x^2 + xy - y^2 = \pm 1$$

SE x, y SONO GRANDI, PIÙ O MENO

$$x^2 + xy - y^2 = 0 \quad \to \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} x$$

EURISTICA

SUPPONIAMO DI AVERE UNA SOLUZIONE (x, y)

DI $x^2+xy-y^2=\pm 1$.

ALLORA $\boxed{(y-x,\ x)}$ È SOLUZIONE:

INFATTI $(y-x)^2+(y-x)x-\cancel{x}^2=$

$=y^2-2xy+x^2+xy-x^2-x^2=$

$=-(x^2+xy-y^2)=\mp 1$

$x-(y-x)$

$y-x$

$(x,y)\to(y-x,\ x)\to(2x-y,\ y-x)$

$\to(2y-3x,\ 2x-y)\to(5x-3y,\ 2y-3x)\to\ldots$

SIA (x,y) UNA SOLUZIONE CON $0<x<y$. ALLORA

LA QUANTITÀ $x+y$ DECRESCE SE PONGO:

$x=y-x$ $\qquad (x,y)\to x+y$

$y=x$ $\qquad (y-x,\ x)\to y$

NON PUÒ DECRESCERE PER SEMPRE

COSA PUÒ ANDARE STORTO?

i) $x \geq y$

ii) $x = 0$

i) $x \geq y$ $\qquad x^2 + xy - y^2 = \pm 1$

$x^2 + xy \leq y^2 + 1$

$\mathbin{\rotatebox{90}{$\leq$}}$

$y^2 + y^2$ $\qquad \rightarrow \quad y^2 \leq 1 \rightarrow y \leq 1$

ii) $x = 0 \rightarrow |-y^2| = 1 \longrightarrow y = 1$

(x, y) CON $\underline{0 < x < y}$

$\downarrow$

$(y - x, x)$ FA DECRESCERE LA SOMMA DELLE DUE COMPONENTI DELLA SOLUZIONE

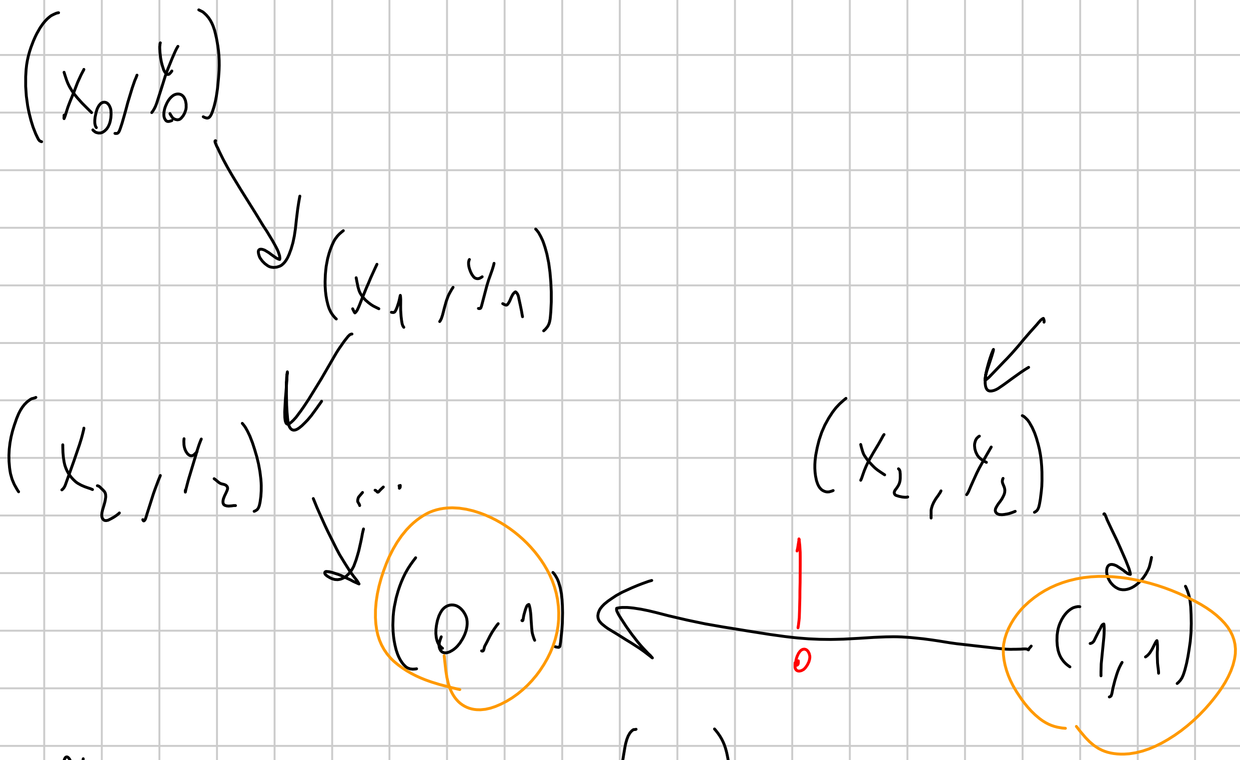
PRIMA O POI VIENE A MANCARE

PRIMA O POI SI HA

(x, x) CON $0 < x < y$ O $y - x = 0$

E $(y - x, x)$ SOLUZIONE CON $y - x \geq x$

$\rightarrow x=1 \rightarrow y-x=0\ ,\ y-x=1$



INEVITABILMENTE VADO A $(0,1)$

$$(x_0, y_0) \rightarrow (x_1, y_1)$$

$$x_0 = y_1$$

$$y_0 = x_1 + y_1$$

$$(x_1, x_0) \rightarrow (x_2, x_1) \rightarrow (x_3, x_2) \rightarrow \dots \rightarrow (0,1)$$

$$x_0 = x_1 + x_2$$
$$x_1 = x_2 + x_3$$
$$\dots$$

$$x_{n+1} = 0$$
$$x_n = 1$$

FACENDO I PASSAGGI A RITROSO OTTENGO

$$(x,y) = (F_n, F_{n+1})$$

FIBONACCI