TEORIA DEI NUMERI - PREIMO18 POM

Note Title 5/23/2018

N5 $2^{0} n \mid \lfloor (\sqrt{5}+2)^n - 2^{n+1} \rfloor$

$$\lfloor \; \rfloor = (\sqrt{5}+2)^n - 2^{n+1} - \varepsilon \in \mathbb{Z} \quad 0<\varepsilon<1$$

$$\varepsilon = (\sqrt{5}-2)^n < 1$$

$$(\sqrt{5}+2)^n - (\sqrt{5}-2)^n - 2^{n+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left[(\sqrt{5})^i 2^{n-i} - (\sqrt{5})^i (-2)^{n-i} \right] - 2^{n+1}$$

per i dispari, $n-i$ è pari, $(-2)^{n-i} = 2^{n-i}$

$\Rightarrow$ sopravvivono solo i pari

$$= \left[\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2j} 5^j \cdot 2^{n-2j} \right] 2 - 2^{n+1}$$

$$= 2\left[\cancel{2^n} + \binom{n}{2} 5 \cdot 2^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} 5^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2 - \cancel{2^n} \right]$$

- I BINOMIALI CI DANNO I FATTORI p!

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \,(p) \quad \text{per } k = 1, \dots, p-1$$

- RACCOGLIAMO UN FATTORE S

- 4 2

Alla fine otteniamo $2 \cdot 2 \cdot S \cdot p \cdot [\text{roba}]$

che era la tesi

N6) SIANO f, g DUE POLINOMI MONICI TALI CHE:

- $\deg f$ SIA DISPARI;
- $\{f(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{g(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

<u>Th.</u> $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ t.c. $f(n) = g(n+k) \;\forall n \in \mathbb{Z}$

I OSSERVAZIONE: $\deg g$ DEVE ESSERE DISPARI.

SE $\underbrace{\deg g}_{= n}$ FOSSE PARI:

$$g(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot x^i$$

SE $|x| > 1 + \max_{0 \le i \le n-1} \{c_i\} \cdot n$

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot x^i \le \sum_{i=0}^{n-1} \max_{0 \le i \le n-1} \{c_i\} \cdot x^i =$$

$$= \max_{0 \le i \le n-1} \{c_i\} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} x^i \overset{?}{\le} x^n$$

$$x^n > \sum_{i=0}^{n-1} x^i \left(\max_{0 \le i \le n-1} \{c_i\} \right)$$

STO USANDO $x^n \ge x \cdot x^{n-1} > x^{n-1}(1 + n \max\{c_i\})$

$$x^n \ge x \cdot x^i \cdot x^{n-i-1} > x^i(1 + n \max\{c_i\})$$

$\forall$ POLINOMIO $f(x)$ $\exists$ N t.c. SE x^n È IL COEFFICIENTE DI TESTA DI $f(x)$, ALLORA

$$|f(x) - x^n| < x^n \quad \forall x > N$$

SE $f(x)$ HA GRADO DISPARI, $g(x)$ HA GRADO DISPARI; SE AVESSE GRADO PARI

$$g(x) = x^{2n} + \sum_{i=0}^{2n-1} c_i x^i, \text{ MA } \exists N$$

TALE CHE $\left| \sum_{i=0}^{2n-1} c_i x^i \right| < x^{2n} \quad \forall |x| > N$

$\rightarrow$ QUINDI g È NEGATIVO UN NUMERO FINITO DI VOLTE

$$f(x) = x^{2m+1} + \sum_{i=0}^{2m} c_i x^i, \text{ MA } \exists N$$

TALE CHE $x^{2m+1} < \sum_{i=0}^{2m} c_i x^i \quad \forall x < -N$

$\rightarrow$ $f(x)$ SIA INFINITE NEGATIVO

(E ASSUMA QUINDI INFINITI VALORI NEGATIVI).

$f(x)$ È INIETTIVA DA UN CERTO PUNTO IN POI:

$\exists N$ TALE CHE $f(x): \{x \geq N\} \rightarrow \mathbb{Z}$ È

INIETTIVO E CRESCENTE.

$$\tilde{f}(x) = f(x) - f(x-1) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$$

$$- (x-1)^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x-1)^i = n x^{n-1} +$$

(PERCHÉ $x^i - (x-1)^i$ HA GRADO $i-1$)

TERMINI DI GRADO MINORE

$\tilde{f}(x)$, SE $x > M \rightarrow \tilde{f}(x) > 0$

SCELTO DA NOI, PER IL RAGIONAMENTO

FATTO SU $|\tilde{f}(x) - x^n| < x^n$

SE $\tilde{f}(x) > 0 \quad \forall \; x > M$

ALLORA $f(x)$ È CRESCENTE E INIETTIVA

DOPO M.

STESSA COSA PER $\tilde{g}(x) > 0$ E $g(x)$

QUINDI $\exists N$ TALE CHE:

- SE $x \leq N$ $\Rightarrow$ $f(x) < f(N+1)$
$g(x) < g(N+1)$

PERCHÉ $f(x) < 0$ E $g(x) < 0$ SE $x < -M$ PER UN CERTO M

- SE $x > N$ $\rightarrow$ $f(x+1) > f(x)$
$g(x+1) > g(x)$

PRENDIAMO IL MASSIMO TRA $g(N+1)$ E $f(N+1)$.
POICHÉ GLI INSIEMI $\{f(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ E $\{g(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ COINCIDONO, DEVE ESISTERE K TALE CHE (SUPPONIAMO IL MAX SIA $f(N+1)$).

$$f(N+1) = g(N+K)$$

DOVE $K \geq 1$, PERCHÉ SE $K \leq 0$:

$$g(N+K) = f(N+1) \geq g(N+1)$$

PERCIÒ $f(N+1) = g(N+K)$

$f(\text{TUTTI } i < N+1)$ $g(\text{TUTTI } i < N+K)$

$$\begin{array}{ccc} \wedge & & \wedge \\ f(N+1) & = & g(N+K) \\ \wedge & & \wedge \\ f(N+2) & & g(N+K+1) \\ \wedge & & \wedge \\ f(N+3) & & g(N+K+2) \end{array}$$

A QUESTO PUNTO I DUE INSIEMI DEVONO COINCIDERE E I MINIMI VALORI NON ANCORA ACCOPPIATI DEVONO COINCIDERE

SE CHIAMO S_j L'INSIEME DEI VALORI DI $f(N+x)$ CON $x \geq j$, E F_j E G_j GLI INDICI TALI CHE $x \in F_j \Leftrightarrow f(x) \in S_j$

$x \in G_j \Leftrightarrow g(x) \in S_j$

ALLORA: $a = \min F_j$ $b = \min G_j$ $c = \min S_j$

$$f(a) = g(b) = c$$

IN PARTICOLARE

$$F_j = \{ x : x \geq N + j \}$$

$$G_j = \{ x : x \geq N + j + \cancel{x} - 1 \}$$

N7

Per quali $k \geq 2$ $\binom{2n}{n} \bmod k$ è definitivamente periodica.

Sicuramente è vero per $k = 2$.

$$\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n}.$$

$$\binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$$

Facciamo vedere che non funziona per nessun altro k.

<u>Oss.</u> Se fosse periodica mod k, lo sarebbe anche mod d per ogni d divisore di k

<u>Caso 1</u> $\quad k = 2^a \quad \to \quad d = 4$

<u>Caso 2</u> $\quad k \neq 2^a \quad \to \quad d = p$ primo dispari

$\boxed{d=4}$ Considero la successione degli interi

$$n = 2^m + r \qquad \text{con} \qquad r = 0, 1, \dots, 2^m - 1$$

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^{2^{m+1}} (1+x)^{2r}$$

<u>Oss.</u> Divisibilità per p del coefficiente binomiale

$$\binom{p^a}{i} = \frac{p^a}{i} \, \frac{(p^a-1)}{1} \, \frac{(p^a-2)}{2} \cdots \frac{(p^a-i+1)}{(i-1)}$$

Se $p^b \| i$ allora la divisibilità è p^{a-b}

$$\text{mod } 4 \qquad (1+x)^{2n} = \left(1 + 2x^{2^m} + x^{2^{m+1}}\right)(1+x)^{2r}$$

$$\binom{2n}{n} \equiv \begin{cases} 2 & r = 0 \\ 0 & r = 1, \dots 2^{m-1} \end{cases}$$

La serie di zeri si allunga al crescere di m (e c'è un numero $\neq 0$) $\to$ NON PERIODICA

Caso 2 $\quad k = p$ primo dispari

$$n = \frac{p^m + r}{2} \qquad r \text{ dispari } \quad r \leq p^m \qquad 2n = p^m + r$$

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^{p^m} \cdot (1+x)^r$$

$$(1+x)^{p^m} \equiv 1 + x^{p^m} \pmod p$$

ha termini

- di grado $\leq r$
- x^r, x^{p^m}
- di grado $> p^m$.

Se $r = p^m$ il coeff è $\equiv 2 \pmod p$

Se $r < n < p^m$ il coeff. è $\equiv 0 \pmod p$

Nell'intervallo $n = \frac{p^m + r}{2}$ c'è un 2

e tutti gli altri sono zero

DI NUOVO NON PERIODICA

N8 $\quad n \in \mathbb{N} \qquad 7^{7^n}+1^{7^n} \qquad 2n+3$

$$\underbrace{(7+1)}_{2^3}\underline{\left(7^{7^n-1}-7^{7^n-2}+\ldots-7+1\right)}$$

$$\Phi_m(x)=\prod_{\substack{\zeta^m=1\\ \zeta^d\neq 1\ \forall d<m}}(x-\zeta) \qquad x^m-1=\prod_{d\mid m}\Phi_d(x)$$

$[\varphi(m)]$

$$7^{7^n}+1=\frac{7^{2\cdot 7^n}-1}{7^{7^n}-1}=\frac{\prod_{d\mid 2\cdot 7^n}\Phi_d(7)}{\prod_{d\mid 7^n}\Phi_d(7)}=\prod_{i=0}^{n}\Phi_{2\cdot 7^i}(7)$$

$$\Phi_2(7)=7+1=8$$

$2n$ fattori primi in $\underline{\prod_{i=1}^{n}\Phi_{2\cdot 7^i}(7)}$

2 fattori primi in $\Phi_{2\cdot 7^i}(7)$ $\forall i \geq 1$

$$\boxed{\Phi_{2d}(x) = \Phi_d(-x)}$$ per d dispari

$\varphi(2d) = \varphi(2)\cdot\varphi(d)$ $\varphi(d)$
$= \varphi(d)$

$\zeta : \Phi_d(\zeta) = 0 \Rightarrow \zeta^d = 1$

$\Phi_d(-\zeta) = 0 \Rightarrow (-\zeta)^d = -1 \Rightarrow \zeta^{2d} = 1$

$$\boxed{\Phi_{p^j}(x) = \Phi_p\left(x^{p^{j-1}}\right)}$$

$\zeta : \Phi_p\left(\zeta^{p^{j-1}}\right) = 0$

$\Rightarrow \zeta^{p^j} = 1$

$\varphi(p^j) = p^{j-1}(p-1)$ $\varphi(p)\cdot p^{j-1}$

$(p-1)\,p^{j-1}$

$$\Phi_{2\cdot 7^i}(7) = \Phi_{7^i}(-7) = \Phi_7\left(-7^{7^{i-1}}\right)$$

$$\Phi_7(\omega) = \omega^6 + \omega^5 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1$$

$$\Rightarrow 7^{6\cdot 7^{i-1}} - 7^{5\cdot 7^{i-1}} + 7^{4\cdot 7^{i-1}} - 7^{3\cdot 7^{i-1}} + 7^{2\cdot 7^{i-1}} - 7^{7^{i-1}} + 1$$

$$\left(7^{3\cdot 7^{i-1}} + \cancel{A\cdot 7^{2\cdot 7^{i-1}}} + B\cdot 7^{7^{i-1}} + 1\right)\left(- - - - - \right)$$

NO

$$\underbrace{k\cdot 7^{2,5\cdot 7^{i-1}+0,5}}_{} \qquad 7^{1,5\cdot 7^{i-1}+0,5} \qquad 7^{0,5\cdot 7^{i-1}+0,5}$$

$$k\cdot\sqrt{7}\cdot\left(7^{7^{i-1}}\right)^{2,5} \qquad\qquad 7^{7^{i-1}} = t$$

$$\left(t^3 + \overset{1}{A}\sqrt{7}\,t^{2,5} + \overset{3}{B}t^2 + \overset{1}{C}\sqrt{7}\,t^{1,5} + \overset{3}{D}t + \overset{1}{E}\sqrt{7}\,t^{0,5} + 1\right)\cdot$$

$$\left(t^3 + \overset{-1}{F}\sqrt{7}\,t^{2,5} + \overset{3}{G}t^2 + \overset{-1}{H}\sqrt{7}\,t^{1,5} + \overset{3}{I}t + \overset{-1}{J}\sqrt{7}\,t^{0,5} + 1\right)$$

$$\begin{cases}
A+F=0 \quad \checkmark & 1-1 \\
B+G+7AF=-1 \quad \checkmark & \\
C+BF+AG+H=0 \quad \checkmark & C-\cancel{3}+\cancel{3}+H=0 \\
D+7CF+BG+7AH+I=1 & \to \; 6+-7C-7C+9=1 \\
E+DF+CG+BH+AI+J=0 \quad \checkmark & -14C=-14 \\
1+7AJ+BI+7CH+DG+7EF+1=-1 \quad \checkmark & \leftarrow \\
A+BJ+CI+DH+EG+F=0 \quad \checkmark & \\
B+7CJ+DI+7EH+G=1 \quad \checkmark & \\
C+DJ+EI+H=0 \quad \checkmark &
\end{cases}$$

$$\begin{cases} D + EJ + 1 = -1 \ \checkmark \\ E + J = 0 \ \checkmark \end{cases}$$

$$7^{7^n} + 1 = 8 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \left(7^{3\cdot 7^i} + 7^{\frac{5\cdot 7^i + 1}{2}} + 3\cdot 7^{2\cdot 7^i} + 7^{\frac{3\cdot 7^i+1}{2}} + 3\cdot 7^{7^i} + \right.$$

$$\left. + 7^{\frac{7^i+1}{2}} + 1 \right) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \left(7^{3\cdot 7^i} - 7^{\frac{5\cdot 7^i+1}{2}} + 3\cdot 7^{2\cdot 7^i} - 7^{\frac{3\cdot 7^i+1}{2}} + 3\cdot 7^{7^i} - 7^{\frac{7^i+1}{2}} + 1 \right).$$

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \qquad (x+1)^6$$

$$x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$$

$$7x^5 + 14x^4 + 21x^3 + 14x^2 + 7x =$$

$$= 7x\left(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1\right) =$$

$$= 7x\left(x^2 + x + 1\right)^2$$

$$\left(7^{\frac{d+1}{2}}\right)^2 \longleftarrow \text{se } x = 7^d$$

$$\Phi_{14}(x) = (x+1)^6 - 7x\left(x^2 + x + 1\right)^2$$

$$7^{7^n}+1 = \frac{7^{7^n}+1}{7^{7^{n-1}}+1} \cdot \frac{7^{7^{n-1}}+1}{7^{7^{n-2}}+1} \cdots \frac{7^{7^1}+1}{7^{7^0}+1}(7+1)$$

$$7^a+1 \mid 7^{ab}+1$$