Algebra pomeriggio PREIMO 2019

Note Title 20/05/2019

A5. $$\sum_{cyc} \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} \geq 3/5$$

$$(*) \quad \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} = \frac{a^2+b^2+c^2+2bc-2ac-2bc}{a^2+b^2+c^2+2bc} = 1-\frac{2a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}$$

se facessi $2a(b+c) \leq a^2+(b+c)^2$, non funzionerebbe per colpa dei casi di uguaglianza

---

$$(*) = 2+\frac{-a^2-b^2-c^2-2bc-2ac-2bc}{(b+c)^2+a^2} = 2-\frac{(a+b+c)^2}{(b+c)^2+a^2}$$

Riscrivo la disuguaglianza come

$$\sum_{c} \frac{(a+b+c)^2}{(b+c)^2+a^2} = \sum_{cyc} 2-LHS \overset{?}{\leq} 6-3/5 = \frac{27}{5}$$

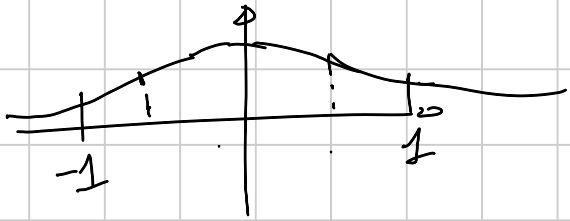
disomogenizzo: $a+b+c=1$ $\quad \alpha = \frac{a}{a+b+c}$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{(1-a)^2+a^2} \overset{?}{\geq} \frac{27}{5} \quad \text{per } a+b+c=1$$

HOPE: $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2+x^2}$ è concava

Purtroppo, non lo è (non su tutto $[0,1]$)

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



$$f(x) = \frac{1}{1-2x+2x^2} = \frac{2}{1+(1-4x+4x^2)} = \frac{2}{1+(1-2x)^2}$$

$$f(a)+f(b)+f(c) \overset{?}{\geq} \frac{27}{5}$$

$$\Updownarrow$$

$$2g(1-2a)+2g(1-2b)+2g(1-2c) \overset{?}{\geq} \frac{27}{5}$$

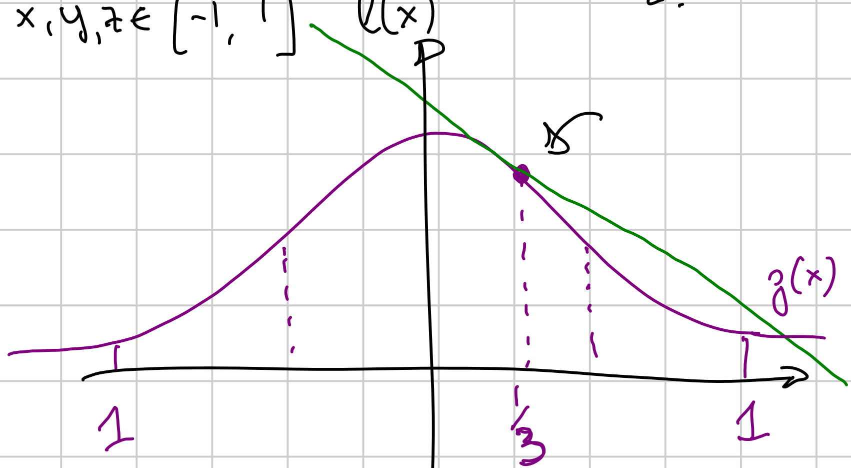
$$g(1-2a)+g(1-2b)+g(1-2c) \overset{?}{\geq} \frac{27}{10}$$

$$g(x)+g(y)+g(z) \overset{?}{\geq} \frac{27}{10} = 3g\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

$x := 1-2a$
$y := 1-2b$
$z := 1-2c$

$x,y,z \in [-1,1]$
$x+y+z = 1$

$x+y+z = 1$
$x,y,z \in [-1,1]$



Se $g(x) \leq l(x)$ retta tangente in $x = 1/3$, ho vinto:
difatti,

$$g(x)+g(y)+g(z) \leq l(x)+l(y)+l(z) = m(\underbrace{x+y+z}_{=1})+3q = 3l\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

se $l(x) = mx+q$

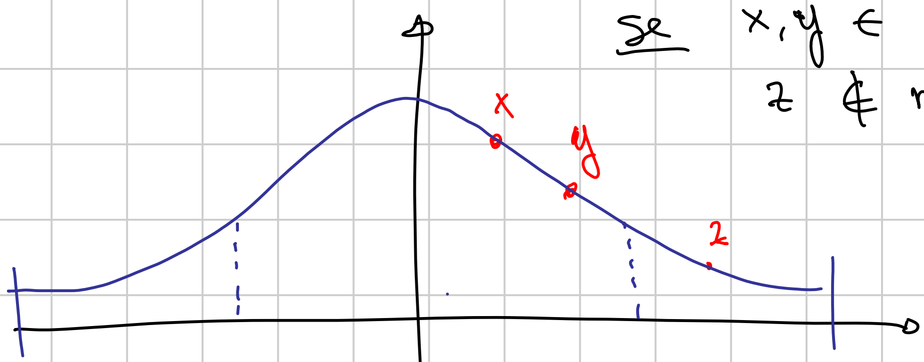
$$= 3g\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

Calcolo la retta tangente

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad g'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-2/3}{\left(\frac{10}{9}\right)^2} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 81}{3 \cdot 100} = -\frac{27}{50}$$

$$\ell(x) = -\frac{27}{50}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{9}{10}$$



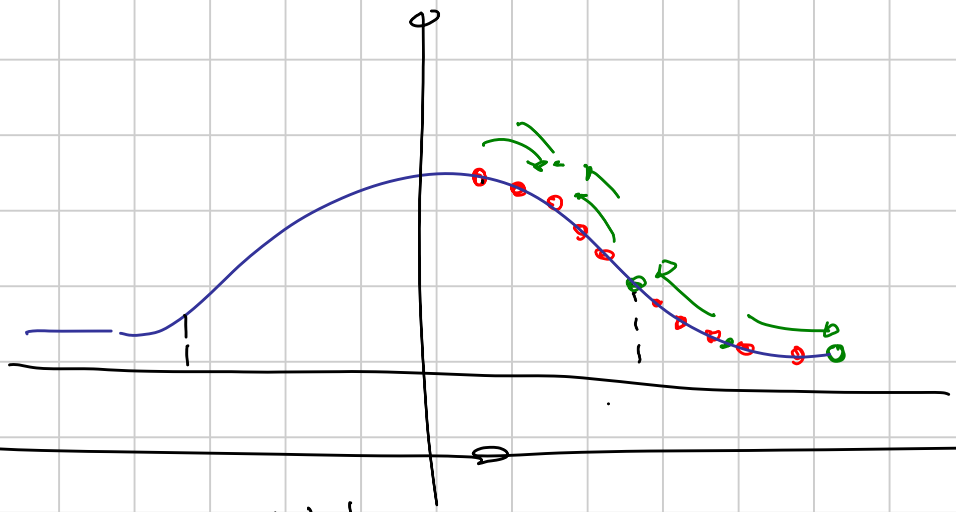
<u>se</u> $x, y \in$ regione concava
$z \notin$ regione concava

$$g(x) + g(y) + g(z) \leq g\left(\frac{x+y}{2}\right) + g\left(\frac{x+y}{2}\right) + g(z)$$

(Jensen su x, y)

$$\frac{x+y}{2} := \alpha \qquad z := 1 - 2\alpha$$

e a questo punto ci siamo ridotti a una variabile sola α



A7 : $c \in \mathbb{N}^+$ $\qquad x_1 = c$

$$X_k = X_{k-1} + \cancel{1} + \left\lfloor \frac{2X_{k-1} - (\cancel{k}+2)}{k} \right\rfloor$$

Trovare una forma chiusa

se $c=1 \Rightarrow X_n = 1, 1, 1, 1, \dots$

se $c=2 \Rightarrow X_n = 2, 3, 4, 5, \dots$

$c=3 \Rightarrow X_n = 3, 5, 7, 10, 13, 17, \dots$ ($\underbrace{}_{2}\ \underbrace{}_{2}\ \underbrace{}_{3}\ \underbrace{}_{3}\ \underbrace{}_{4}\ \underbrace{}_{4}$)

un po' e un po'

$c=4 \Rightarrow X_n = 4, 7, 11, 16, \dots$ ($\underbrace{}_{3}\ \underbrace{}_{4}\ \underbrace{}_{5}\ \underbrace{}_{6}\ \underbrace{}_{7} \dots$)

tutte le parti intere sono esatte

$c=5 \Rightarrow X_n = 5, 9, 14, 20, 27, \dots$ ($\underbrace{}_{4}\ \underbrace{}_{5}\ \underbrace{}_{6}\ \underbrace{}_{7}$)

tutte sono sbagliate

per $c=4$, $X_k = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$: da interpolazione, ecc.

Lo posso controllare per induzione:

$$X_{k+1} = 2\frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1 + \left\lfloor \frac{2\left(2\frac{(k+1)(k+2)}{2} + \cancel{1} - \cancel{1}\right)}{\cancel{k+1}} \right\rfloor = 2\frac{(k+1)(k+2)}{2} + (k+2) = 2\frac{(k+3)(k+2)}{2} \checkmark$$

$c=7$

$c=16$

$c=7$

$7, 13, 21, 31, 43, 57, \dots$ ($\underbrace{}_{6}\ \underbrace{}_{8}\ \underbrace{}_{10}\ \underbrace{}_{12}$)

$$2 \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$$

Funziona nello stesso modo per $\boxed{X_1 = 3a+1}$

Analogamente $X_k = a\dfrac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$

Per $\boxed{x_1 = 3a+2}$, $\quad x_k = a\frac{(k+1)(k+2)}{2} + k+1$

(inizialmente da $x_0 = 5$, poi generalizzando la dimostrazione)

$$x_{k+1} = x_k + \left\lfloor \frac{2(x_k - 1)}{k+1} \right\rfloor = a\frac{(k+1)(k+2)}{2} + k+1 + \left\lfloor \frac{2a\frac{(k+1)(k+2)}{2} + 2k}{k+1} \right\rfloor$$

$$= a\frac{(k+1)(k+2)}{2} + k+1 + \frac{2a\frac{\cancel{(k+1)}(k+2)}{2} + \cancel{k+1}}{\cancel{k+1}} = \ldots$$

Per $\boxed{x_0 = 3a}$, non c'è una singola espressione polinomiale, ma due una per i pari e una per i dispari (difatti, le differenze finite non diventano costanti, ma lo diventano quelle di $\{x_{2k}\}$ e di $\{x_{2k+1}\}$

per $x_0 = 3 + 3a$

$$\begin{cases} x_k = \frac{k^2+4k+8}{4} + a\frac{(k+1)(k+2)}{2} & k \text{ pari} \\ x_k = \frac{k^2+4k+7}{4} + a\frac{(k+1)(k+2)}{2} & k \text{ dispari} \end{cases} \rightarrow \text{induzione}$$

(Volendo, c'è anche un risultato generale che lega le successioni con c e $c+3$)

A6 $f(x)$ a coeff. interi

Provo a imporre $f\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{r}{q}$.

$$f(x)=\frac{r}{q}+(1-qx)^M\cdot\left(-\frac{r}{q}\right)$$

Questo è a coeff. interi: il termine noto è 0, gli altri sono OK.

Quando x varia tra $\frac{1}{2q}$ e $\frac{3}{2q}$ ho che $1-qx$ varia tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ quindi

$\left|f(x)-\frac{r}{q}\right|=\frac{r}{q}\,|1-qx|^M\leq\frac{r}{q}\,\frac{1}{2^M}$ e questo conclude.

A8 $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)-f(y) \geq (x-y)\,f(x-y)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f(1)\geq 0$

Innanzi tutto riscrivo il testo come $f(x+z)-f(x) \geq z\,f(z)$

$f(z)-f(0) \geq z\,f(z) \qquad -f(0) \geq (z-1)\,f(z)$

per $z>1$ ottengo $f(z) \leq \dfrac{-f(0)}{z-1}$

per $z<1$ ottengo $f(z) \geq \dfrac{-f(0)}{z-1}$

e per z grosso dice "$f(z)\leq 0$"

Facile induzione: $f(x+nz)-f(x) \geq n z f(z)$

Fissiamo $z>0$. Se fosse $f(z)>0$
allora per n grosso ho un assurdo:
infatti avrei $f(x+nz) \geq f(x) + n\cdot z f(z)$

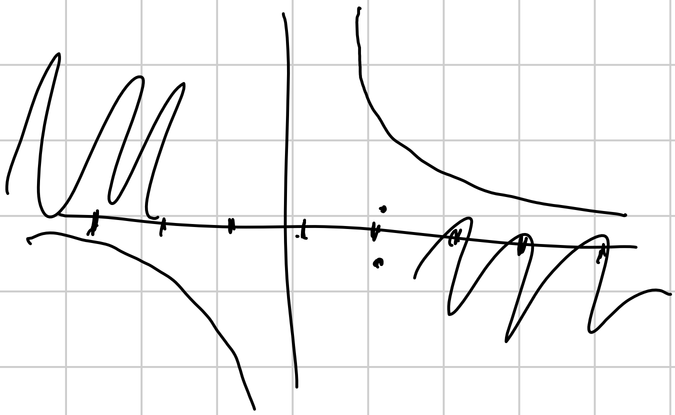
$$\leq \frac{-f(0)}{x+nz-1}$$

Quindi ho $\left[z>0 \implies f(z)\leq 0 \right]$.

In particolare ho $f(1)\leq 0$. Ma dall'ipotesi $f(1)\geq 0$
quindi $f(1)=0$.

Se metto $z=1$ nel testo ho $f(x+1) - f(x) \geq 1\, f(1) = 0$

cioè $f(x+1) \geq f(x)$



Fisso x. Se $f(x) > 0$

allora $\dfrac{-f(0)}{x+N-1} \geq f(x+N) \geq f(x) > 0$ ASSURDO

Se $f(x) < 0$ allora

$$\frac{-f(0)}{x-N-1} \leq f(x-N) \leq f(x) < 0$$ ASSURDO.

Quindi $f(x) = 0$ cioè $f \equiv 0$.