PreIMO 2019

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

PREIMO a_n limitata

Note Title 21/05/2019

A1. $a_n < \sum_{k=n}^{2n+2018} \frac{a_k}{k+1} + \frac{1}{2n+2019}$ (*)

Dietro: $\sum_{k=a}^{b} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b+1}$

(serie di Mengoli)

Se potessi utilizzare la tesi:

$a_n < \sum_{k=n}^{2n+2018} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{2n+2019} = \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{2n+2019}} + \cancel{\frac{1}{2n+2019}}$

Ma l'induzione non funziona così...

Idea: se $a_n > \frac{1}{n}$, ne trovo uno più avanti a_m tale che $a_m > \frac{1}{m}$ usando (*), e spero che divergano a ∞

$a_n - \frac{1}{n} = \varepsilon \geq 0$ $\quad na_n \geq 1+\varepsilon$

Ipotesi: $na_n \geq 1+\varepsilon$ per un qualche n

Tesi: c'è un qualche a_m, $m \geq n$, con $ma_m \geq 1+\delta$

Definiamo $\delta := \max_{m \in \{n, n+1, \dots 2n+2018\}} m \cdot a_m - 1$

cioè $\delta \leq m \cdot a_m - 1$ per tutti gli $m \in \dots$

$\frac{1+\varepsilon}{n} < RHS \leq \sum_{k=n}^{2n+2018} \frac{1+\delta}{k(k+1)} + \frac{1}{2n+2019}$

$$\frac{1+\varepsilon}{n} \leq (1+\delta)\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n+2019}\right] + \frac{1}{2n+2019}$$

$$\frac{\varepsilon}{n} \leq \delta\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n+2019}\right]$$

$$(2n+2019)\,\varepsilon \leq (2n+2019-n)\,\delta$$

$$\delta \geq \varepsilon \cdot \frac{2n+2019}{n+2019} > 1.5\,\varepsilon$$

Se $n a_n \geq 1+\varepsilon$ per qualche n, allora

$m \cdot a_m \geq 1 + \varepsilon \cdot \frac{2n+2019}{n+2019}$ per qualche $m \in \{n, \dots, 2n+2019\}$

Esiste n_0 t.c. $\frac{2n+2019}{n+2019} > 1.5$ per $n > n_0$?

Sì:
$$2n + 2019 > 1.5n + 1.5 \cdot 2019$$
$$0.5n > 0.5 \cdot 2019$$
$$n > 2019$$

se n suff. grande, $2n+2019 < 3n$

$n \cdot a_n \geq 1+\varepsilon \Rightarrow m \cdot a_m \geq 1 + 1.5\,\varepsilon$ per qualche $m \leq 3n$

Induzione:

$m \cdot a_m \geq 1 + (1.5)^k \varepsilon$ per qualche $m \leq 3^k n$

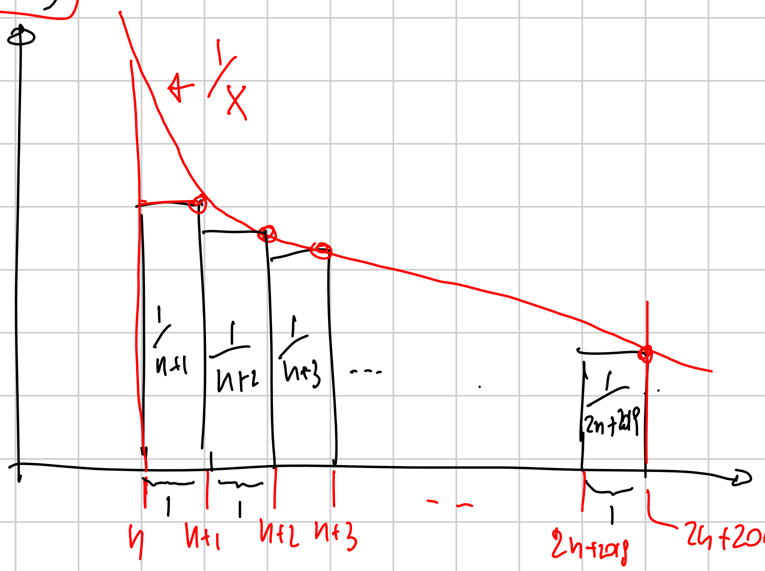
$$a_n - \frac{1}{n} = \varepsilon \qquad \max_{m\in[n,n+1,\dots,2n+2018]} a_m - \frac{1}{m} =: \delta$$

$$\cancel{\frac{1}{n}} + \varepsilon < RHS \le \sum_{k=n}^{2n+2018} \frac{1}{k+1}\left(\cancel{\frac{1}{k}}+\delta\right) + \cancel{\frac{1}{2n+2019}}$$

$$\varepsilon < \underbrace{\left(\sum_{k=n}^{2n+2018}\frac{1}{k+1}\right)}\cdot\delta \le$$

$\sum_{k=n}^{2n+2018}\frac{1}{k+1}$ = somma aree dei rettangolini

$$\le \int_n^{2n+2019}\frac{1}{x}\,dx$$



$$\left[\ln x\right]_n^{2n+2019} = \ln(2n+2019) - \ln(n)$$

$$= \underbrace{\ln(2n+2019)-\ln(2n)} + \underbrace{\ln(2n)-\ln(n)}_{=\ln(2)<1}$$

$$= \ln\left(\frac{2n+1019}{2n}\right)$$

$$\downarrow$$

$\ln(1) = 0$ per $n\to\infty$

<u>A2</u>: $\displaystyle\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a+b}{2}-ab} \ge \sqrt{2} \qquad a+b+c=2$

IDEA 1: omogeneità

$$\text{RADICALE} = \frac{2(a+b)-4ab}{4} = \frac{(a+b+c)(a+b)-4ab}{4} =$$

$$= \frac{a^2+2ab+b^2+c(a+b)-4ab}{4} = \frac{c(a+b)}{4} + \underbrace{\frac{(a-b)^2}{4}}_{\Delta_{ab}}$$

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a+b}{2}-ab} = \sum_{cyc} \sqrt{\frac{c(a+b)}{4}+\frac{(a-b)^2}{4}} \geq \sum_{cyc} \sqrt{\frac{c(a+b)}{4}} \overset{?}{\leq} \sqrt{2}$$

IDEA 2: eleva al quadrato

$$\sum_{c} \cancel{\frac{a+b}{2}} - ab + \sum_{cyc} 2\sqrt{\frac{a+b}{2}-ab}\sqrt{\frac{b+c}{2}-bc} \overset{?}{\geq} \cancel{2}$$

DISUG. EQUIVALENTE A

$$2\sum_{cyc} \sqrt{\frac{c(a+b)}{4}+\frac{(a-b)^2}{4}}\sqrt{\frac{a(b+c)}{4}+\frac{(b-c)^2}{4}} \geq \sum_{cyc} ab$$

$$\sum_{cyc} \sqrt{c(a+b)+(a-b)^2}\sqrt{a(b+c)+(b-c)^2} \overset{?}{\geq} 2\sum_{cyc} ab \qquad (*)$$

HOPE: non è che basta

$$\sum_{cyc} \sqrt{c(a+b)a(b+c)} \overset{\text{HOPE}}{\geq} 2\sum_{cyc} ab$$

$$\sum_{cyc}(a-b)^2 = [2,0,0]-[1,1,0]$$

$$\sqrt{(a+b)(b+c)} = \sqrt{b^2+(a+c)b+ac} \geq \sqrt{b^2+2\sqrt{ac}\,b+ac} = \sqrt{(b+\sqrt{ac})^2} = b+\sqrt{ac}$$

$$\sum_{cyc} \sqrt{c(a+b)a(b+c)} \geq \sum_{cyc} \sqrt{ac}\left(b+\sqrt{ac}\right) \overset{HOPE}{\geq} 2\sum_{cyc} ab$$

$$\left[1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right]+[1,1,0] \cancel{\overset{HOPE}{\geq}} 2[1,1,0] \quad \text{no!}$$

(VAIN)

$$\sqrt{(M+\varepsilon)(N+\delta)} \geq \sqrt{MN} + \sqrt{\varepsilon\delta}$$

$c(a+b)$ $(a-b)^2$ $a(b+c)$ $(b-c)^2$

$$(M+\varepsilon)(N+\delta) = MN + \underbrace{\varepsilon N + \delta M}_{AM-GM} + \varepsilon\delta \geq MN + 2\sqrt{\varepsilon\delta MN} + \varepsilon\delta$$

$$= \left(\sqrt{MN}+\sqrt{\varepsilon\delta}\right)^2$$

(*) diventa
$$\sum_{cyc} \sqrt{c(a+b)a(b+c)} + |a-b||b-c| \overset{HOPE}{\geq} 2\sum_{cyc} ab \qquad (**)$$

$$\text{LHS di } (**) \geq \sum_{cyc} \sqrt{ac}\left(b+\sqrt{ac}\right) + b^2+ac-ab-bc \overset{HOPE}{\geq} 2\sum_{cyc} ab$$

$$[2,0,0]+\left[1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \geq 2[1,1,0]$$

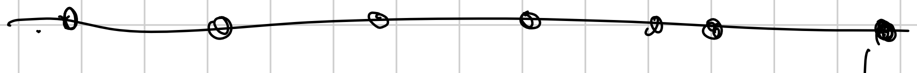
Schur ✓

A4:
$$\sum_{i<j} |a_i-a_j| + |b_i-b_j| \leq \sum_{i,j} |a_i-b_j|$$

wlog $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots \le a_n$

 $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$

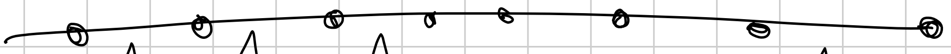
Idea 1: se sposto a sx l'ultimo valore, la disuguaglianza diventa più stretta (wlog b_n)



perché ci sono n intervalli del tipo $|b_n - \text{roba}|$ al RHS e $n-1$ al LHS

Allora, posso assumere che $b_n = \max(a_n, b_{n-1})$

Versione migliore: prendo i $2n$ punti in ordine

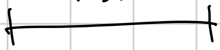


e chiamo $\Delta_1, \dots, \Delta_{2n-1}$ le differenze tra uno e il successivo

Ognuno dei termini al RHS e al LHS, $|\text{roba} - \text{roba}|$, è la somma di un po' dei Δ_i

"Double-counting": quante volte compare Δ_i?

se



h dei termini a_i stanno a sx $\quad n-h$ a dx

k dei termini b_i stanno a sx $\quad n-k$ a dx

allora Δ_i compare nella somma quante volte:

in $\sum_{i<j} |a_i - a_j|$ compare $h(n-h)$ volte

in $\sum_{i<j} |b_i - b_j|$ compare $k(n-k)$ volte

in $\sum_{i,j} |a_i - b_j|$ compare $k(n-h)+h(n-k)$

$$h(\cancel{n}-h)+k(\cancel{n}-k) \leq k(\cancel{n}-h)+h(\cancel{n}-k)$$

$$-h^2-k^2 \leq -kh-hk \quad \checkmark$$

Caso di uguaglianza: quando $h=k$ oppure $|\Delta_i|=0$, cioè quando coincidono a pacchetti della stessa dimensione

$a_1=a_2=\dots=a_{k_1}= \dots \quad a_{k_1+1}=a_{k_1+2}=\dots a_{k_2} \quad \dots$

$=b_1=b_2=\dots b_{k_1} \quad =b_{k_1+1}=b_{k_1+2}=\dots=b_{k_2}$ $\square$

$a_1=b_1 \qquad a_2=b_2 \qquad \Big| \qquad a_1=b_1=a_2=b_2$.

$\boxed{A3}$ $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $\quad f(x+y) \geq y\, \underbrace{f(f(x))}$

" $f(y) \geq$ retta in y "

Impongo le f uguali; voglio $f(x+y) = f(f(x))$

mi basta $x+y = f(x)$

ovvero $y = f(x) - x$.

Formalmente: se $f(x) > x$ pongo $y = f(x) - x$ e

ottengo $f(f(x)) \geq (f(x) - x)\, f(f(x))$

da cui $1 \geq f(x) - x$ $\quad f(x) \leq x+1$.

Quindi ho mostrato che $\forall x$ $f(x) \leq x+1$.

$f(x+y) \geq y\, f(f(x))$

$x = 1 \implies f(y+1) \geq y \cdot a$ $\qquad a = f(f(1))$

per $z > 1$ $\quad f(z) \geq (z-1)a$

$(z = y+1)$

Se prendo z tale che $(z-1)a > 1$

ho anche $f(z) > 1$

da cui $f(f(z)) \geq (f(z) - 1)a \geq ((z-1)a - 1)a$

Prendo z tale che $f(f(z)) > 1$.

$$f(y+z) \geq y\, f(f(z))$$

$$\underset{y+z+1}{\vee\!\!\mid}$$

ASSURDO

Algebra pomeriggio PREIMO 2019

Note Title 20/05/2019

A5. $$\sum_{cyc} \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} \geq 3/5$$

$$\circledast \quad \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} = \frac{a^2+b^2+c^2+2bc-2ac-2bc}{a^2+b^2+c^2+2bc} = 1 - \frac{2a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}$$

se facessi $2a(b+c) \leq a^2+(b+c)^2$, non funzionerebbe per colpa dei casi di uguaglianza

---

$$\circledast \quad = 2 + \frac{-a^2-b^2-c^2-2bc-2ac-2bc}{(b+c)^2+a^2} = 2 - \frac{(a+b+c)^2}{(b+c)^2+a^2}$$

Riscrivo la disuguaglianza come

$$\sum_{c} \frac{(a+b+c)^2}{(b+c)^2+a^2} = \sum_{cyc} 2 - LHS \overset{?}{\leq} 6 - 3/5 = \frac{27}{5}$$

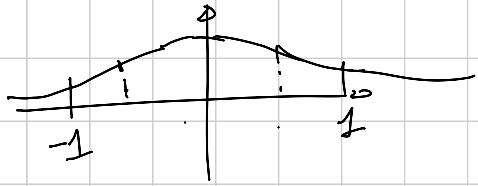
disomogenizzo: $a+b+c=1$ $\quad \alpha = \frac{a}{a+b+c}$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{(1-a)^2+a^2} \overset{?}{\geq} \frac{27}{5} \quad \text{per } a+b+c=1$$

HOPE: $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2+x^2}$ è concava

Purtroppo, non lo è (non su tutto $[0,1]$)

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



$$f(x) = \frac{1}{1-2x+2x^2} = \frac{2}{1+(1-4x+4x^2)} = \frac{2}{1+(1-2x)^2}$$

$$f(a)+f(b)+f(c) \overset{?}{\geq} \frac{27}{5}$$

$$\Updownarrow$$

$$2g(1-2a)+2g(1-2b)+2g(1-2c) \overset{?}{\geq} \frac{27}{5}$$

$$g(1-2a)+g(1-2b)+g(1-2c) \overset{?}{\geq} \frac{27}{10}$$

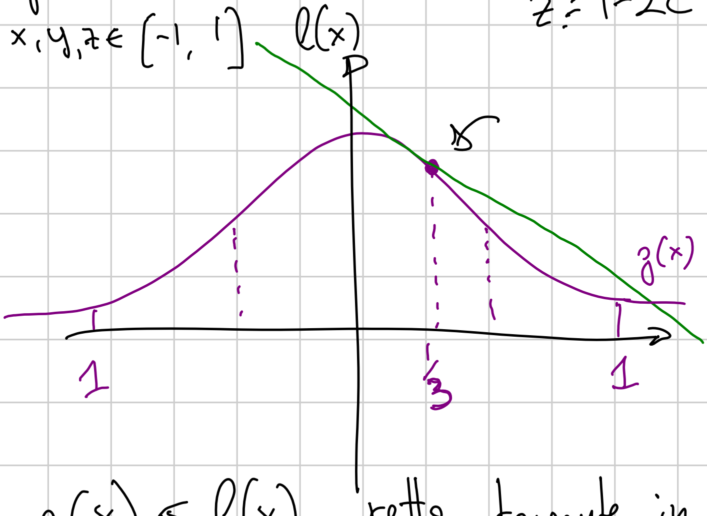
$$g(x)+g(y)+g(z) \overset{?}{\geq} \frac{27}{10} = 3g\left(\frac{1}{3}\right)$$

$x := 1-2a$ $\quad$ $y := 1-2b$ $\quad$ $z := 1-2c$

$x, y, z \in [-1, 1]$ $\quad$ $x+y+z = 1$

$x+y+z = 1$

$x, y, z \in [-1, 1]$



Se $g(x) \leq \ell(x)$ retta tangente in $x = \frac{1}{3}$, ho vinto: difatti,

$$g(x)+g(y)+g(z) \leq \ell(x)+\ell(y)+\ell(z) = m(\underbrace{x+y+z}_{=1})+3q = 3\ell\left(\frac{1}{3}\right) = 3g\left(\frac{1}{3}\right)$$

se $\ell(x) = mx+q$

Calcolo la retta tangente

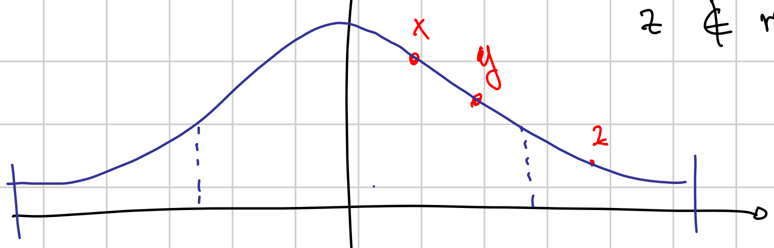
$$g(x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad g'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad g'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{-2/3}{\left(\frac{10}{9}\right)^2}=$$

$$=\frac{-2\cdot 81}{3\cdot 100}=-\frac{27}{50}$$

$$\ell(x)=-\frac{27}{50}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{9}{10}$$

<u>se</u> $x,y\in$ regione concava

$z\notin$ regione concava



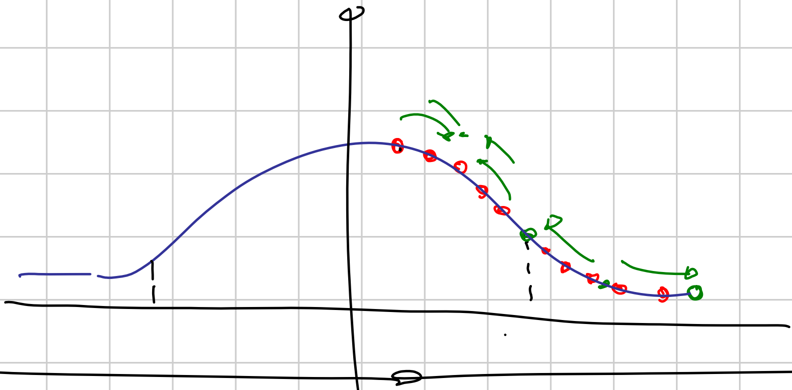
$$g(x)+g(y)+g(z)\le g\left(\frac{x+y}{2}\right)+g\left(\frac{x+y}{2}\right)+g(z)$$

$\uparrow$

(Jensen su x,y)

$$\frac{x+y}{2}:=\alpha \qquad z:=1-2\alpha$$

e a questo punto ci si è ridotti a una variabile sola α



<u>A7</u>: $c\in\mathbb{N}^+$ $\qquad x_1=c$

$$x_k = x_{k-1} + \cancel{1} + \left\lfloor \frac{2x_{k-1} - (\cancel{k}+2)}{k} \right\rfloor$$

Trovare una forma chiusa

se $c=1 \Rightarrow x_n = 1, 1, 1, 1, \dots$

se $c=2 \Rightarrow x_n = 2, 3, 4, 5, \dots$

$c=3 \Rightarrow x_n = 3, 5, 7, 10, 13, 17, \dots$ un po' e un po'

$\underbrace{3,5}_{2}\ \underbrace{5,7}_{2}\ \underbrace{7,10}_{3}\ \underbrace{10,13}_{3}\ \underbrace{13,17}_{4}\ \underbrace{17,\dots}_{4}$

tutte le parti intere sono esatte

$c=4 \Rightarrow x_n = 4, 7, 11, 16, \dots$

$\underbrace{4,7}_{3}\ \underbrace{7,11}_{4}\ \underbrace{11,16}_{5}\ \underbrace{16,\dots}_{6}\ \underbrace{\dots}_{7}\ \dots$

$c=5 \Rightarrow x_n = 5, 9, 14, 20, 27, \dots$ tutte sono sbagliate

$\underbrace{5,9}_{4}\ \underbrace{9,14}_{5}\ \underbrace{14,20}_{6}\ \underbrace{20,27}_{7}$

per $c=4$, $x_k = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$: da interpolazione, ecc.

Lo posso controllare per induzione:

$$x_{k+1} = 2\frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1 + \left\lfloor \frac{2\left(2\frac{\cancel{(k+1)}(k+2)}{2} \cancel{+1} \cancel{-1}\right)}{\cancel{k+1}} \right\rfloor = 2\frac{(k+1)(k+2)}{2} + (k+2)\ {}^{+1} = 2\frac{(k+3)(k+2)}{2}\ {}^{+1}\ \checkmark$$

$c=7$

$c=16$

$c=7$

$7, 13, 21, 31, 43, 57, \dots$

$\underbrace{7,13}_{6}\ \underbrace{13,21}_{8}\ \underbrace{21,31}_{10}\ \underbrace{31,43}_{12}$

$$2 \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1.$$

Funziona nello stesso modo per $x_1 = 3a+1$

Analogamente $x_k = a\dfrac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$

Per $\boxed{x_1 = 3a+2}$, $\quad x_k = a\frac{(k+1)(k+2)}{2} + k+1$

(inizialmente da $x_0 = 5$, poi generalizzando la dimostrazione)

$$x_{k+1} = x_k + \left\lfloor \frac{2(x_k-1)}{k+1} \right\rfloor = a\frac{(k+1)(k+2)}{2} + k+1 + \left\lfloor \frac{2a\frac{(k+1)(k+2)}{2} + 2k}{k+1} \right\rfloor$$

$$= a\frac{(k+1)(k+2)}{2} + k+1 + \frac{2a\frac{\cancel{(k+1)}(k+2)}{2} + \cancel{k+1}}{\cancel{k+1}} = \dots$$

Per $\boxed{x_0 = 3a}$, non c'è una singola espressione polinomiale, ma due una per i pari e una per i dispari (infatti le differenze finite non diventano costanti, ma lo diventano quelle di $\{x_{2k}\}$ e di $\{x_{2k+1}\}$)

per $x_0 = 3$ $+3a$

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{k^2+4k+8}{4} + a\dfrac{(k+1)(k+2)}{2} & k \text{ pari} \\[2ex] x_k = \dfrac{k^2+4k+7}{4} + a\dfrac{(k+1)(k+2)}{2} & k \text{ dispari} \end{cases} \rightarrow \text{induzione}$$

(Volendo, c'è anche un risultato generale che lega le successioni con c e $c+3$)

A6 $f(x)$ a coeff. interi

Provo a imporre $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{r}{q}$.

$$f(x) = \frac{r}{q} + (1 - qx)^M \cdot \left(-\frac{r}{q}\right)$$

Questo è a coeff. interi: il termine noto è 0, gli altri sono OK.

Quando x varia tra $\frac{1}{2q}$ e $\frac{3}{2q}$ ho che $1-qx$ varia tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ quindi

$$\left|f(x) - \frac{r}{q}\right| = \frac{r}{q} \, |1-qx|^M \le \frac{r}{q} \frac{1}{2^M}$$ e questo conclude.

A 8 $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x)-f(y) \geq (x-y)\, f(x-y)$

$f(1)\geq 0$

Innanzitutto riscrivo il testo come $f(x+z)-f(x) \geq z\, f(z)$

$f(z)-f(0) \geq z\, f(z) \qquad -f(0)\geq (z-1)\, f(z)$

per $z>1$ ottengo $f(z) \leq \dfrac{-f(0)}{z-1}$

per $z<1$ ottengo $f(z) \geq \dfrac{-f(0)}{z-1}$

e per z grande dice "$f(z)\leq 0$"

Facile induzione: $f(x+nz)-f(x) \geq nz\, f(z)$

Fissiamo $z>0$. Se fosse $f(z)>0$
allora per n grande ho un assurdo:
infatti avrei $f(x+nz) \geq f(x) + n\cdot z\, f(z)$

$\leq$

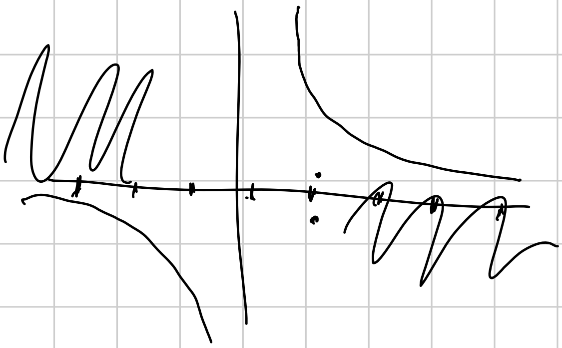
$\dfrac{-f(0)}{x+nz-1}$

Quindi ho $\left[z>0 \Rightarrow f(z)\leq 0 \right]$.

In particolare ho $f(1)\leq 0$. Ma dall'ipotesi $f(1)\geq 0$
quindi $f(1)=0$.

Se metto $z=1$ nel testo ho $f(x+1)-f(x) \geq 1\,f(1)=0$

cioè $f(x+1) \geq f(x)$



Fisso x. Se $f(x)>0$

allora $f(x+N) \geq f(x) > 0$

$$\underset{\dfrac{-f(0)}{x+N-1}}{\wedge_{|}}$$

ASSURDO

Se $f(x)<0$ allora

$$\frac{-f(0)}{x-N-1} \leq f(x-N) \leq f(x) < 0$$

ASSURDO.

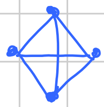
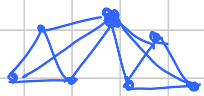
Quindi $f(x)=0$ cioè $f\equiv 0$.

Combinatoria mattina PreIMO 19

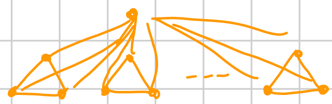
Note Title 23/05/2019

Problema 4

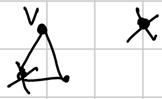
Grafo con 100 vertici. Comunque tolto un vertice, i restanti 99 si possono dividere in 33 △ disgiunti. Quanti archi al minimo?

$\boxed{m = 4}$  ⇝ 6 $\boxed{m = 7}$  ⇝ 12

Claim. La risposta è $2 \cdot 99$



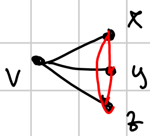
quindi $|E|_{min} \leq 2 \cdot 99$

Oss. Ogni vertice ha grado ≥ 2. Infatti 

Ma in realtà almeno 3!

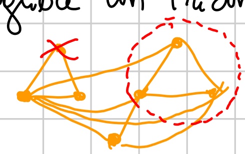
Questo ci dice che $|E| \geq \frac{3 \cdot 100}{2} = 150 < 2 \cdot 99$ .... devo fare di meglio.

Se tutti i vertici hanno grado ≥ 4 ho finito.
→ supponiamo che $\exists\, v$ di grado 3.



Cosa succede se togliamo x? L'unico triangolo in cui può stare v è quello formato con y e z → c'è un arco tra y e z!

Proviamo per induzione su n (di 3 in 3)
Una possibilità è togliere un triangolo, però non funziona.



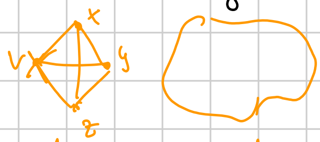
NO!

Idea! Collasso la 4-cricca in un solo vertice. 

Cioè: sostituisco v, x, y, z con un vertice u collegato a tutti i vertici che erano connessi alla 4-cricca.

Vanno verificate due cose: (i) il nuovo grafo verifichi l'ipotesi
(ii) di aver tolto almeno 6 ✓

• primo caso: tolgo u.



se tolgo v, un triangolo è x-y-z, quindi quello che rimane è triangolabile

• secondo caso: tolgo un altro vertice w

supponiamo WLOG che v-x-y sia un triangolo ma allora z forma un triangolo con altri 2 vertici ma posso ricopiare questa triangolazione nel grafo ridotto!

$\boxed{\text{C1}}$

99-agono regolare
Alberto e Barbara mettono a turno un cioccolatino su un vertice
Si può aggiungere solo in posizione adiacente ad uno già presente
Barbara vince se riesce ad ottenere un tr. equil. di un unico gusto

C'è un "arco" di cioccolatini che si allunga

I triangoli equilateri sono costituiti dai vertici a distanza 33
(in totale 33 tr. equil.)

Il gioco si può dividere in 3 fasi.

Fase 1: mosse 1-33	Fase 2: mosse 34-66	Fase 3: mosse 67-99
Si riempie il primo vertice di ogni triangolo	Si riempie il secondo	Si riempie il terzo QUI BARBARA PUÒ VINCERE

Fase 1: ci è indifferente

Fase 2: Barbara metterà un cioccolatino dello stesso gusto di quello sul suo triangolo (Fase 1)

Alberto lo metterà di gusto diverso

Fine fase 2: Barbara ha avuto le mosse pari,

nella Fase 2 abbiamo da 34 a 66.

Barbara ha fatto 17 mosse e Alberto 16.

Fase 3: se Barbara ha usato la sua strategia, ci sono

17 vertici tra i 33 liberi tali che, se Barbara deve giocare

e può farlo in quel vertice, vince.

Se ci sono 2 vertici "buoni per Barbara" consecutivi,

Barbara vince.

Resta il caso in cui sono alternati.
Cioè Barbara vince con i vertici 1 - 3 - 5 - 7 - 33

In questo caso Barbara vince subito. $\square$

C2 (m, n) è croccolatosa se

$m > n$ si scrive come somma di divisori di n

$\exists$ un insieme con 2019 interi a 2 a 2 croccolatosi?

Def: un insieme $S \subseteq \mathbb{Z}_{>0}$ è croccolatoso se ogni sua coppia lo è

Oss: una volta fissato il minimo di S
abbiamo una forte limitazione su tutti gli altri elem.

Idea: esibire una costruzione induttiva (allargando S)

Se $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ è croccolatoso, allora

anche $\{ka_1, \dots, ka_n\}$ è ancora croccolatoso

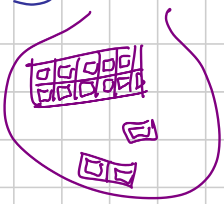
Ora posso aggiungere un elemento, per esempio $ka_n + 1$ *

$(ka_n - ka_i) + (ka_n + 1 - ka_n)$ è somma di divisori di ka_i

$\Rightarrow S' = kS \cup \{ka_n + 1\}$ è ancora croccolatoso e ho vinto.

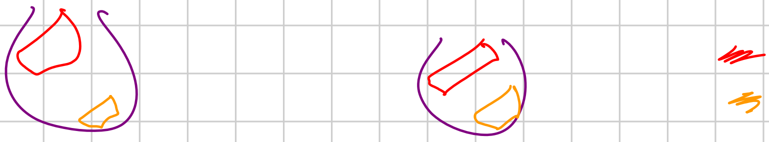
* esistono altri modi validi.

C3



le tavolette sono interi tra 1 e 2019

tutti i sacchetti hanno un peso totale diverso



$S_1 > S_2$

il più grande

il più piccolo

se tolgo allora i pesi si invertono

Quanti sacchetti ho al massimo?

Soluzione:

Confrontiamo 2 sacchetti

$$p_1 > p_2$$

$$p_1 - x_1 < p_2 - x_2 \qquad x_i = M_i + m_i \text{ del sacchetto } s_i$$

$\Downarrow$ sono numeri interi

$$p_1 \geq p_2 + 1$$

$$p_1 - x_1 + 1 \leq p_2 - x_2$$

$$\Downarrow$$

$$2 \leq x_1 - x_2$$

Ora i sacchetti $s_1, \ldots, s_n$

avranno $x_1, \ldots, x_n$

sono tali che $x_1 + 2 \leq x_2$

$x_2 + 2 \leq x_3 \quad \ldots$

inoltre $x_1 \geq 2$

$x_n \leq 2 \cdot 2019$

$\Rightarrow \quad n \leq 2019$

Rimane da mostrare che si riesce a costruire l'esempio

la guida è seguire tutte le uguaglianze in

Proviamo quindi con sacchetti con tavolette tutte uguali

ottengo questo sistema

$$t_1 \cdot 1 = p_1$$

$$t_2 \cdot 2 = p_2 = p_1 + 1$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} t_1 = k \\ 2t_2 = k+1 \\ \vdots \\ 2019\, t_{2019} = k+2018 \end{cases}$$

ha soluzione $\iff$

$$\begin{cases} k \equiv -1 \pmod 1 \\ k \equiv -1 \pmod 2 \\ \vdots \\ k \equiv -1 \pmod{2019} \end{cases}$$

Che ce l'ha banalmente (ed è abbast. grande).

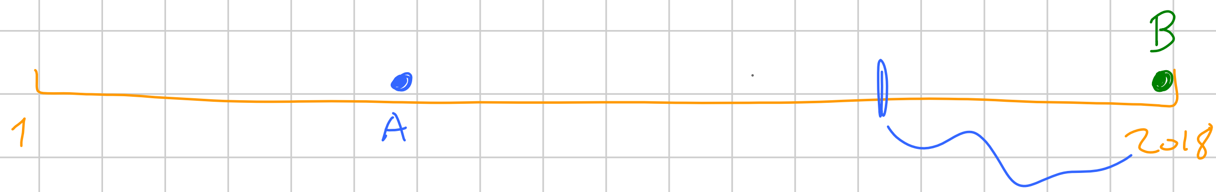
Combinatoria Pomeriggio PreIMO 19

Note Title 23/05/2019

C5 . Alberto e Barbara scrivono numeri alla lavagna. Appena esiste una progressione aritmetica lunga 3 il gioco termina con la vittoria del giocatore che ha scritto l'ultimo numero

Soluzione

Oss: se la seconda mossa è troppo vicina alla prima alla terza mossa già vince Alberto



Ora qualsiasi mossa di A genera una differenza < 1009

allora B completa facilmente la progr. aritmetica.

purché A non possa giocare esattamente a metà ma questo B lo può impedire giocando su una parità diversa

C6

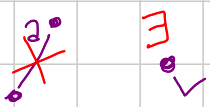
Un grafo è unione di 25-cricche e ~~se si toglie~~ un arco, non è più vero

Dimostrare che ogni arco $\in$ una 25-cricca chiusa (con almeno un vertice senza conoscenze fuori dalla cricca)

Soluzione

Euristica: tentare i casi: 2-cricche
3-cricche

Formulazione equivalente all'ipotesi:



$\forall$ 25-cricca che passa per v, a vi appartiene

Scelgo una funzione $f: E \to V$

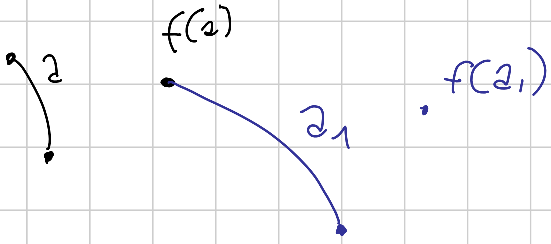
Oss: ogni arco appartiene ad una cricca

Step 1: Scelgo $a \in E$ voglio dimostrare che sta in una cricca chiusa

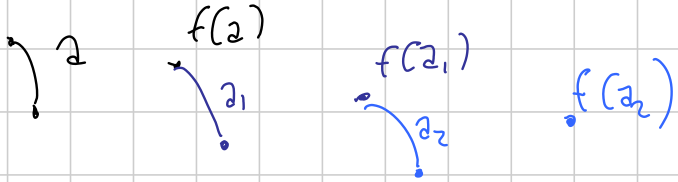
$\exists \; f(a) \in V$,

per caso $f(a)$ è lui che non ha conoscenze fuori dalla cricca. In tal caso ho finito, altrimenti

Step 2



Step 3



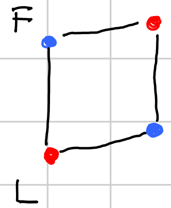
⋮

Step n

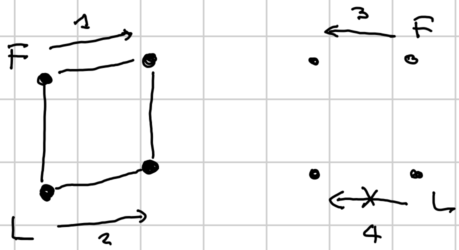
Capita che il vertice $f(a_n)$ sta in cricche con $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a$.
e il nuovo vertice che ottengo ad ogni arco è nuovo, quindi $f(a_n)$ sta in cricche con $n+1$ vertici, almeno

Non posso continuare più di 25, quindi uno degli $f(a_n)$ non ha conoscenze fuori
$\Rightarrow$ l'arco a sta in una cricca con $f(a_n)$
$\Rightarrow$ è chiusa.

C7 Grafo bipartito, con due cioccolatini che si muovono a turno. Non si possono ripetere le configurazioni già viste. Perde chi non può muovere



Il giocatore F può essere limitato dalla presenza dell'altro ma non viceversa



Se F e L sono lontani, L tenderà a perdere

Se L adotta come strategia di fare avanti e indietro su uno stesso arco, lo fa anche F e vince

Il motivo è che se si ripete la posizione iniziale, allora è colpa di L

Ci piacerebbe molto far funzionare "andare avanti e indietro"

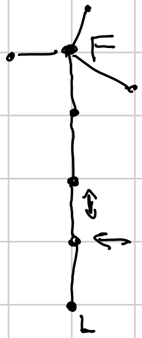
Caso semplice: se F e L partono adiacenti

All'inizio F si leva dalle scatole, e L va nella sua casella e d'ora in poi fa avanti e indietro.

Prima o poi la posizione iniziale si ripete. Chi è stato?

Se è stato L, allora prima era nell'altra casella, e visto che non si sta ripetendo la posizione iniziale, allora anche la precedente si è ripetuta, e quindi F aveva già perso.

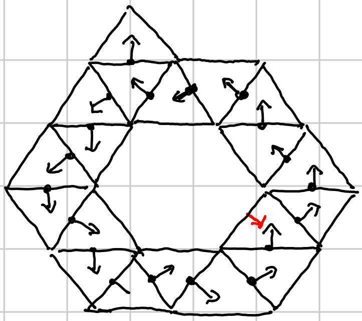
E se sono lontani?
L farà avanti e indietro su un lato che lo avvicina a F
L'unica speranza di F è di far ripetere la posizione iniziale
A un certo punto F torna nella sua pos. iniziale. Allora L fa avanti e indietro su un lato che lo avvicina ancora
Per induzione, mi avvicinerò e L occuperà la pos. iniziale di F e vince.



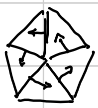
C8 Un icosaedro con una formica che gira su ogni faccia in senso antiorario. Non possono incontrarsi su un lato e in 5 non possono incontrarsi su un vertice. Possono muovere per sempre?

Il primo passo è capire che non è un problema di fisica ma di combinatoria

- A ogni istante ogni formica sta su un lato. Una mossa consiste nel muovere una formica in senso antiorario
- Due formiche non possono stare nello stesso lato
- Voglio fare infinite mosse con ciascuna formica



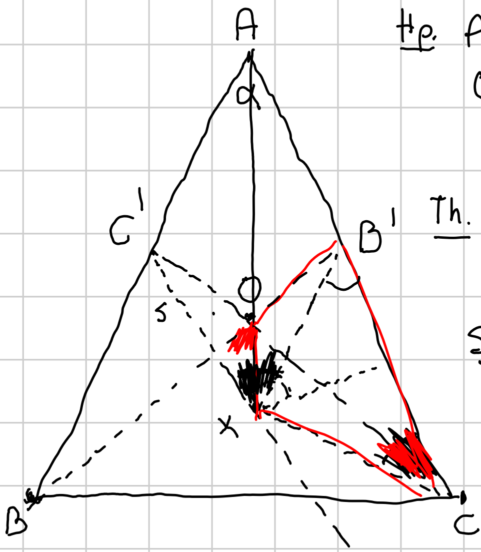
Chiudiamo un anello come in figura. Orario is the new antiorario. Ogni triangolo ha un lato libero, o fuori o dentro
Una prima o poi si muove, e deve appartenere a un triangolo che guarda verso l'interno
Il nuovo anello entra nella regione "interna"
In ogni caso la nuova regione sarà più piccola
Alla fine raggiungerò il caso in cui ho una regione interna vuota, cioè il pentagono sotto



Pre IMO 2019 - Geometria Mattina

Titolo nota 22/05/2019

Problema 1



Hp. ABC isoscele con $AB=AC$

O circocentro $B' \equiv BO \cap AC$

$C' \equiv CO \cap AB$

Th. s parallela a AC per C' tange $\odot B'OC$.

Sol.

[Euristica] Percepire chi è il p.to di tangenza. Ammettiamo pure che esista.

Abbiamo $\angle B'XC = \angle B'OC = \pi - \angle BOC = \pi - 2\alpha$

e siccome $C'X$ tange ~~...~~ ed è parallela ad AC deduciamo che $C'XB' = \underline{\pi - \angle B'XC} = \alpha$ ... questo ci dice che X è il punto che completa il parallelogramma (che poi è un rombo) $AC'XB'$, che sta su O...

Soluzione Sia X il punto tale che $AC'XB'$ è un parallelogramma.

Siccome $AC' = AB'$ per simmetria, allora $AC'XB'$ è anche rombo.

Inoltre per simmetria $X \in AO$.

Claim 1 $B'OXC$ ciclico

Dim. $\angle B'XO = \frac{1}{2} \angle B'XC' = \frac{1}{2} \angle B'AC' = \frac{1}{2}\alpha$

$\angle B'CO = \frac{\pi - \angle AOC}{2} = \frac{\pi - 2\angle ABC}{2} = \frac{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}\alpha$

→ Dunque $B'OXC$ ciclico.

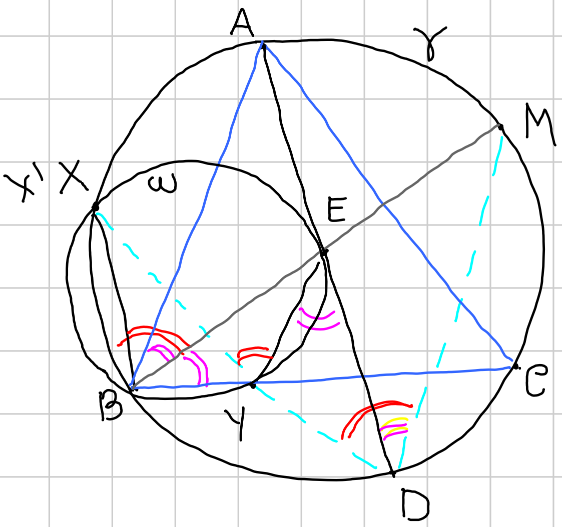
Claim 2 $C'X$ tange $\odot B'XC$

Dim $\angle C'XB' = \alpha$

$\angle XCB' = \angle XOB = \frac{1}{2} BOC = \alpha$

→ e quindi $C'X$ tange $\odot B'XC$

Problema 2



Tesi: XY, AE, $/\!/ EY$ per M concorrono

Mostriamo che concorrono in D.

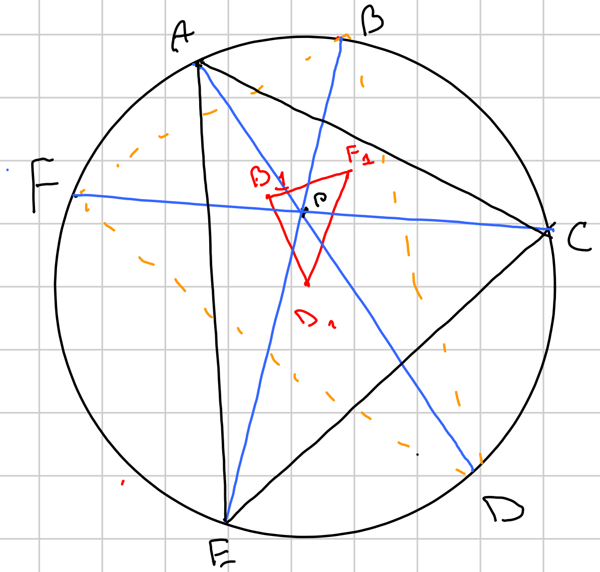
$M\hat{D}A = M\hat{B}A = M\hat{B}C = Y\hat{E}D$
$\Rightarrow EY /\!/ MD$

$\Rightarrow$ Basta mostrare che X, Y, D sono allineati.

$X' := DY \cap \gamma \qquad X'\hat{Y}E = X'\hat{D}M = X'\hat{B}M$

$X'BYE$ è ciclico $\Rightarrow X' \in \omega \cap \gamma \Rightarrow X' = X$. $\square$

Problema 3



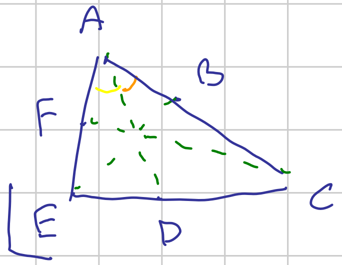
Hp: $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$

B_1 = sym di B rispetto AC

D_1, F_1 analogamente.

Tesi: $\triangle BDF \sim \triangle B_1 D_1 F_1$

[Reminder Ceva:



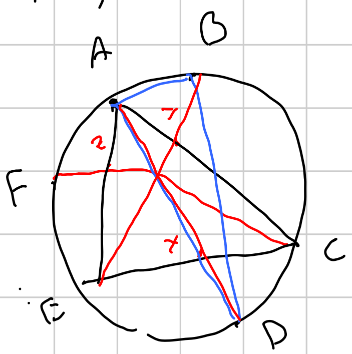
AD, BE, CF concorrenti

$$\Updownarrow$$

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA} = 1$$

Ceva trigonometrico

AD, BE, CF concorrenti $\iff \dfrac{\sin CAD}{\sin DAE}\cdot\dfrac{\sin BEC}{\sin BEA}\cdot\dfrac{\sin ECF}{\sin ACF} = 1$



$$AB = 2R\cdot\sin ADB = 2R\cdot\sin AEB$$

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}$$

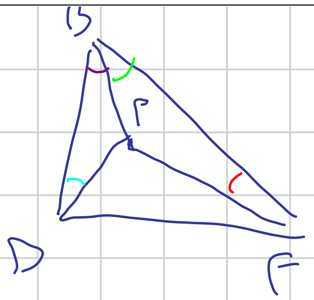
$$\parallel$$

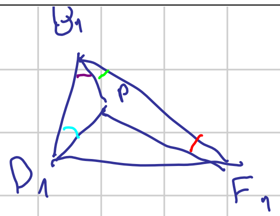
$$\frac{\sin AEB}{\sin BEC}\cdot\frac{\sin CAD}{\sin DAE}\cdot\frac{\sin ECF}{\sin ACF}$$

$\Rightarrow$ Ceva trigonometrico su $\triangle ACE$ e i punti X, Y, Z sui lati

Ipotesi $\iff$ AD, BE, CF concorrono in P

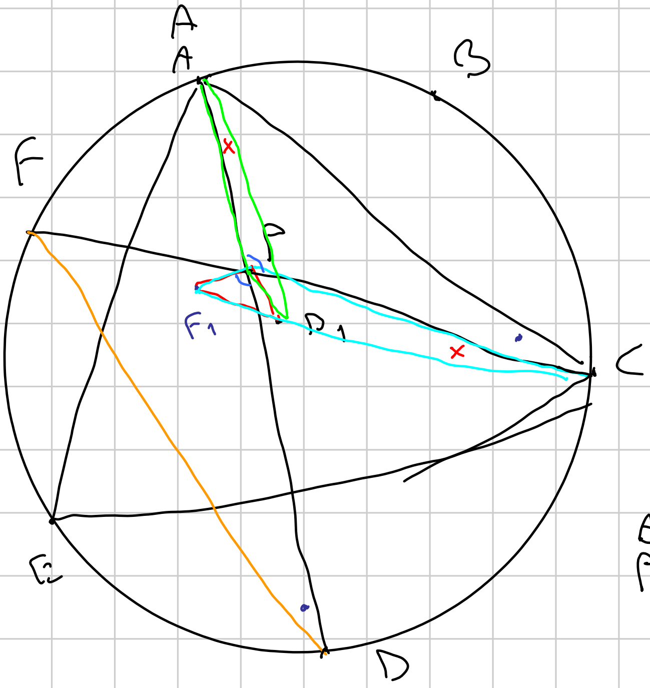
Claim: $BDFP \sim B_1 D_1 F_1 P$, cioè $\begin{cases} PDF \sim PD_1F_1 \\ PDB \sim PD_1B_1 \\ PBF \sim PB_1F_1 \end{cases}$

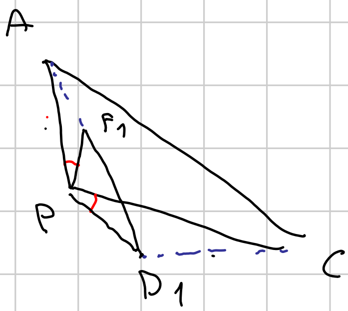




Claim: $PDF \sim PD_1F_1$

$\Delta PDF \sim \Delta PCA$





Euristica

$\angle APC = \angle D_1PF_1$

$\frac{AP}{PC} = \frac{PD_1}{PF_1} \to \Delta APF_1 \sim \Delta CPD_1$

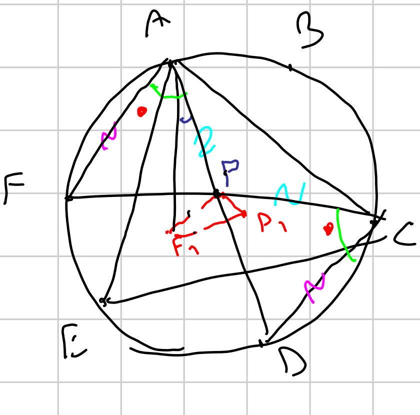
$\angle PAF_1 = \angle PAF - \angle FAF_1$

$= \angle PAF - 2\angle EAF$

$= \angle DCF - 2\angle ECF$

$= \angle DCF - \angle DCD_1$

$= \angle D_1CP$

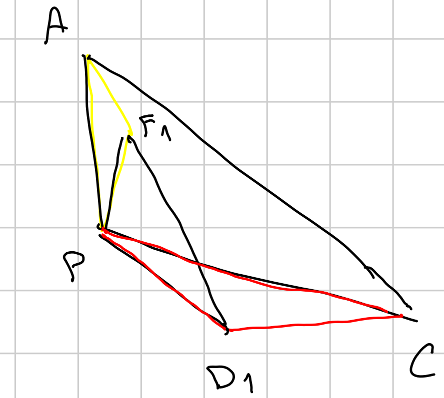


$\Delta APF_1 \sim \Delta CD_1P$

$\frac{AP}{AF_1} \overset{?}{=} \frac{CP}{CD_1} \iff \frac{AP}{AF} = \frac{CP}{CD} \Rightarrow$ vero perchè

$\Delta CPD \sim \Delta APF$

ΔCPD_1, ΔAPF_1 non simili



$\frac{AP}{PF_1} = \frac{CP}{PD_1} \rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{F_1P}{D_1P}$

$\angle APF_1 = \angle CPD_1$

$\Downarrow$

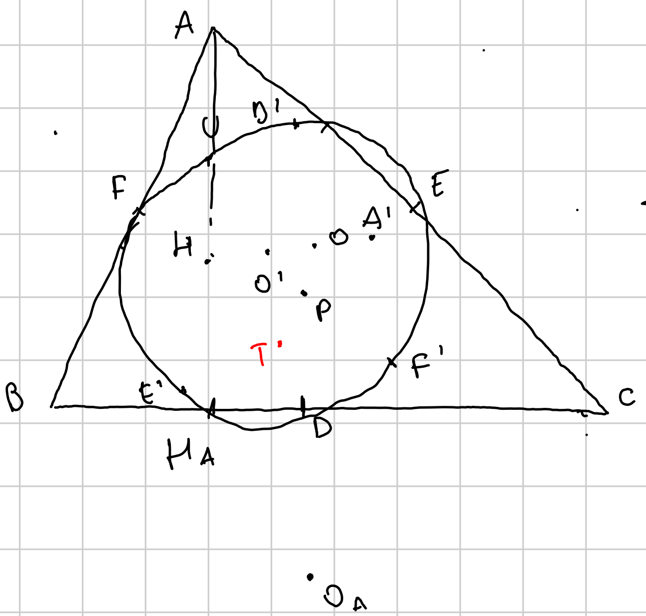
$\angle APC = \angle F_1PD$

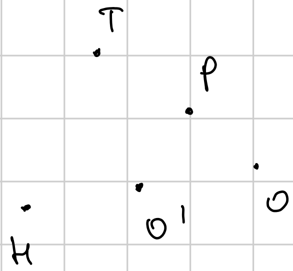
Rotomotetia di APC e F_1PD_1 $\iff$ Similitudine di APF_1 e CPD_1

$\Downarrow$

SIMILITUDINE

Problema 4





T = sym di O wrt P.

Step 0

P ∈ asse di O'O

Omotetia di centro O e fattore 2 ci dice che $\boxed{T \in \text{asse di } OH}$

Step 1   BHA'C è ciclico

Omotetia di centro A, fattore 2

F → B   D' → A'

E → C   U → H

E, F, D', U ∈ ω ⇒ BHA'C è ciclico

Step 2   Sia O_A il centro di ⊙BHA'C

D è pto medio di $O_A O$

⊙ABC passa per B, C, sym H wrt BC

⊙BHA'C passa per B, C, H

⊙ABC, ⊙BHA'C sym wrt BC

⇒ D pto medio di $O_A O$

Step 3 : · T sta sull'asse di HA'

Consideriamo $\triangle O T O_A$

· P pto medio di OT

· D pto medio di OO_A

$\Rightarrow O_A T \parallel DP \parallel DD'$

Consideriamo $\triangle HAA'$

D' è pto medio di AA'

U è pto medio di AH

$\Rightarrow UD' \parallel HA'$

$DD' \perp UD'$ perché UD è diametro di ω

$\Rightarrow O_A T \perp HA'$

O_A sta sull'asse di HA' perché centro di $\odot BCHA'$

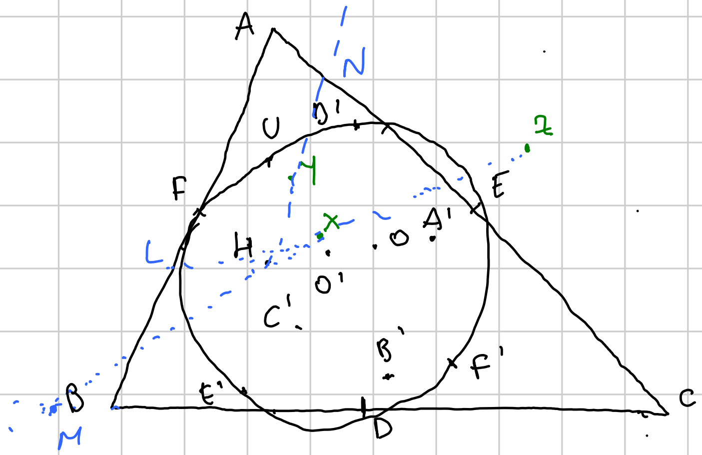
$\Rightarrow T \in$ asse di HA'

T è centro di $\odot A'OH$

$\odot B'OH$

$\odot C'OH$

$\Rightarrow$ tesi



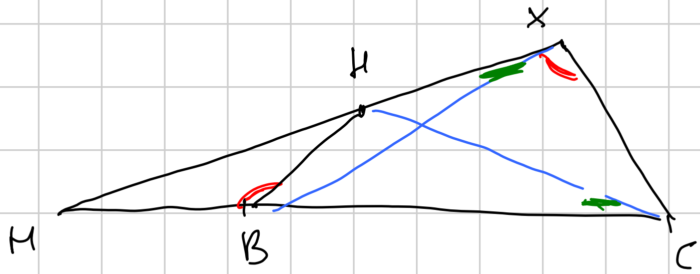
$$\left.\begin{array}{l} XB = A'C \\ XC = A'B \end{array}\right\} (*)$$

Consideriamo $\triangle A'BC$, $\triangle D'FE$: sono omotetici

$$\Rightarrow \frac{A'C}{A'B} = \frac{D'E}{D'F}$$

E per $(*)$ $$\frac{XB}{XC} = \frac{D'E}{D'F} \qquad (1)$$

Sappiamo che $BHA'C$ ciclico da parte a)
$X \in \odot BHA'C$ perché è il simmetrico
di A' wrt $O_A O$



- $\triangle MBH \sim \triangle MXC \Rightarrow \dfrac{MB}{MX} = \dfrac{HB}{XC}$

- $\triangle MCH \sim \triangle MXB \Rightarrow \dfrac{MX}{MC} = \dfrac{XB}{HC}$

Moltiplicando,

$$\frac{MB}{MC} = \frac{MB}{MX} \cdot \frac{MX}{MC} = \frac{HB}{XC} \cdot \frac{XB}{HC} = \frac{HB}{HC} \cdot \frac{XB}{XC}$$

E per (1) $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{HB}{HC} \cdot \dfrac{D'E}{D'F}$

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AL}{LB} = \left(-\frac{HB}{HC} \cdot \frac{D'E}{D'F}\right)\left(-\frac{HC}{HA} \cdot \frac{E'F}{E'D}\right)\left(-\frac{HA}{HB} \cdot \frac{F'D}{F'E}\right)$$

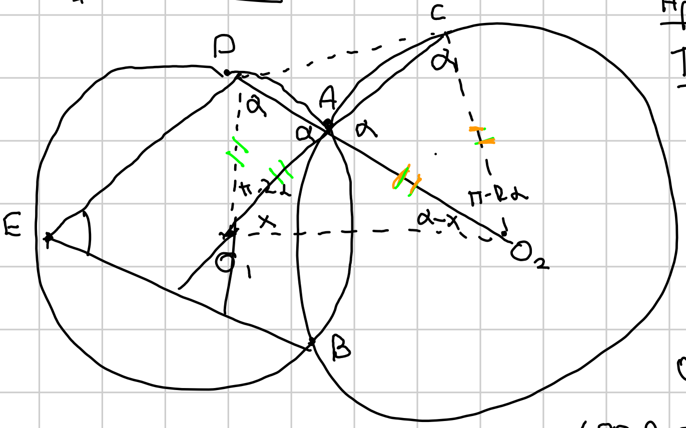
$$= -\underbrace{\frac{D'E}{D'F} \cdot \frac{E'F}{E'D} \cdot \frac{F'D}{F'E}}_{+1}$$

Menelao inverso $\Rightarrow$ M, N, L allineati

Pre-IMO Pomeriggio 2019 Geometria

Note Title 22/05/2019

Problema 1



Hp. $DE \parallel O_1A$, $BE \parallel O_2A$

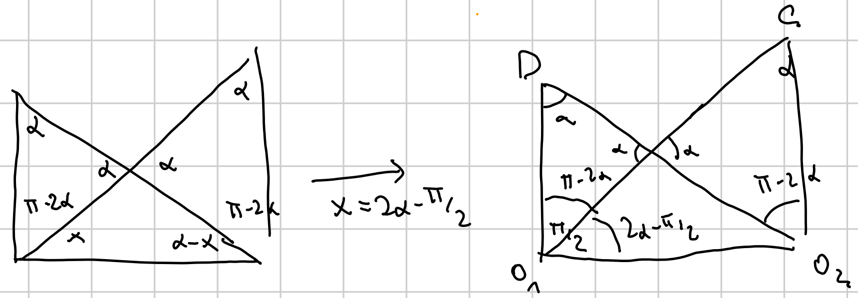
Th. $\angle DCO_2 = \frac{\pi}{2}$

Sol.

[Idea] Voglio scrivere bene gli angoli nel quadrilatero DO_1O_2C, dove sappiamo $O_1A = O_1D$, $O_2A = O_2C$. Si chiama $\alpha \doteq \angle DAO_1$. $\angle DO_1A = \pi - 2\alpha = \angle CO_2A$, si chiamo $\angle AO_1O_2 \doteq x$, allora $\angle AO_2O_1 = \alpha - x$. Quale informazione in più mi dà l'ipotesi?

Sol. Hp. mi dice $\angle DEB = \alpha \Rightarrow \angle DO_1B = 2\alpha$. Siccome $\angle DO_1B = \angle DO_1O_2 + \angle O_2O_1B = (\pi - 2\alpha + x) + x = \pi - 2\alpha + 2x$

allora $\pi - 2\alpha + 2x = 2\alpha \Rightarrow x = 2\alpha - \pi/2$

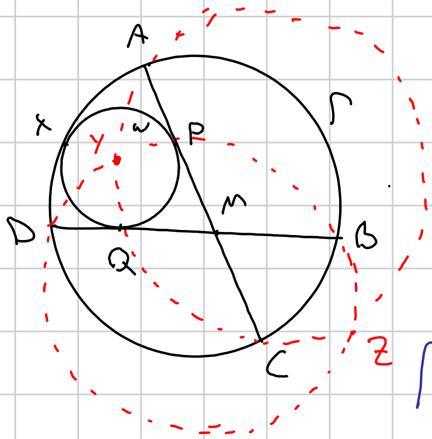


Dunque $\angle DO_1O_2 = \pi - 2\alpha + x = \pi - 2\alpha + 2\alpha - \pi/2 = \pi/2$

Inoltre $\angle DO_1C = \angle DO_2C \; (= \pi - 2\alpha) \Rightarrow DO_1O_2C$ ciclico

$\Rightarrow \angle DCO_2 = \pi - \angle DO_1O_2 = \pi - \pi/2 = \pi/2$ ■

Problema 2



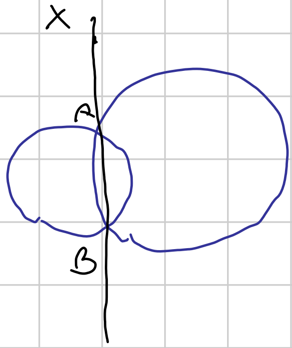
$\bigcirc_{ABC} = \omega_1$

$\bigcirc_{BPD} = \omega_2$

$\omega_1 \cap \omega_2 = Y, Z$

Tesi: $X \in YZ$

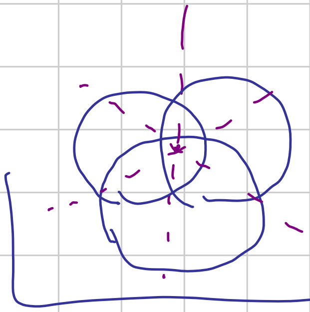
Reminder 1:



$XA \cdot XB = Pow$

$X \in$ asse rad. $\iff$

$Pow_{\Gamma_1}(X) = Pow_{\Gamma_2}(X)$

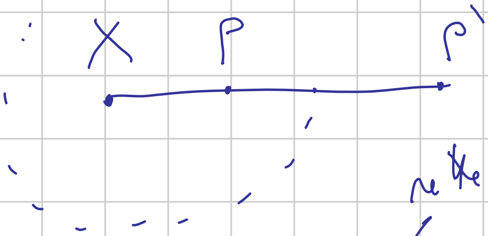


Pow Γ

$$\underbrace{MC \cdot MA}_{Pow_{\omega_1} M} = \underbrace{MB \cdot MD}_{Pow_{\omega_2} M}$$

$\Rightarrow M \in YZ$

Inversione: raggio r



$XP \cdot XP' = r^2$

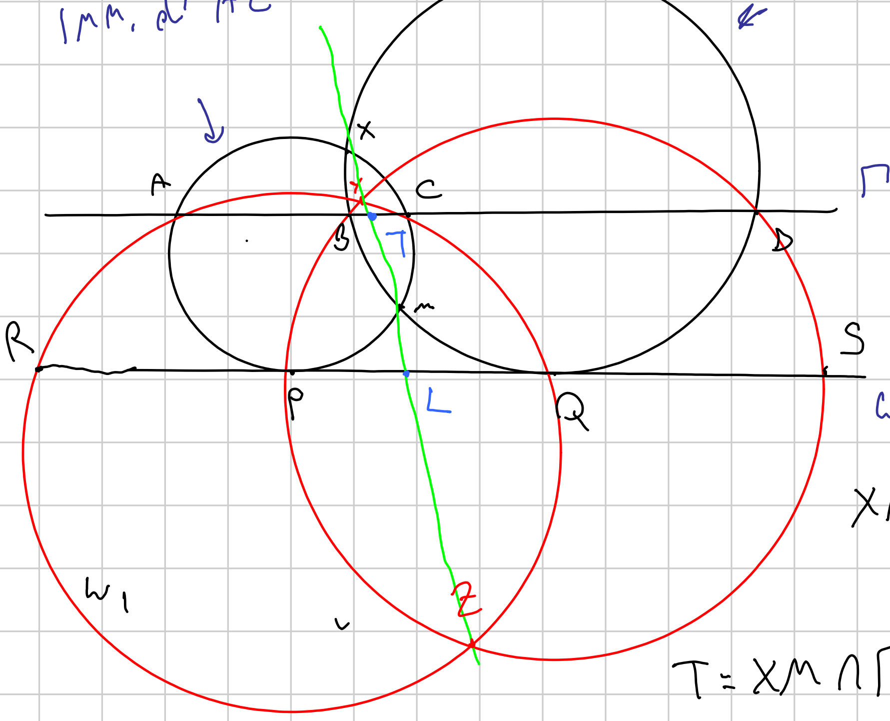
rette per X → rette per X

/ non per X → ○ per X

○ per X → / non per X

○ non per X → ○ non per X

Imm. di $\overline{AC}$ Immagine di $\overline{BD}$



Tesi XYZ

Oss M sta su questa retta

YZ = asse di ω_1 e ω_2

XM è asse di O_{APC} e di O_{BDQ}

$T = XM \cap \Gamma = XM \cap \overline{ABCD}$

$Pow_{O_{ACP}}(T) = TX \cdot TM = TC \cdot TA = pow_{\omega_1}(T)$

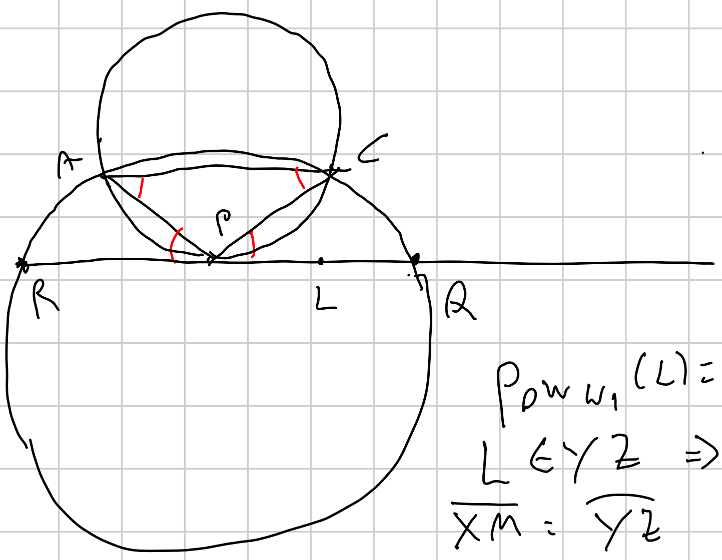
$\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$Pow_{O_{BDQ}}(T) \qquad TB \cdot TD = pow_{\omega_2}(T)$

T è centro radicale $\quad T \in XM, YZ$

$L = XM \cap PQ$. $\quad pow_{O_{ACP}}(L) = LM \cdot LX = LP^2 = LQ^2$

$Pow_{\omega_1}(L) = LQ \cdot LR \qquad pow_{\omega_2}(L) = LP \cdot LS$



$RP = PQ$

$LP = LQ = \frac{1}{2} PQ$

ω. $LQ \cdot LR = LQ \cdot 3LQ$

$= 3LQ^2$

$Pow_{\omega_1}(L) = 3LP^2 = 3LQ^2 = Pow_{\omega_2}(L)$

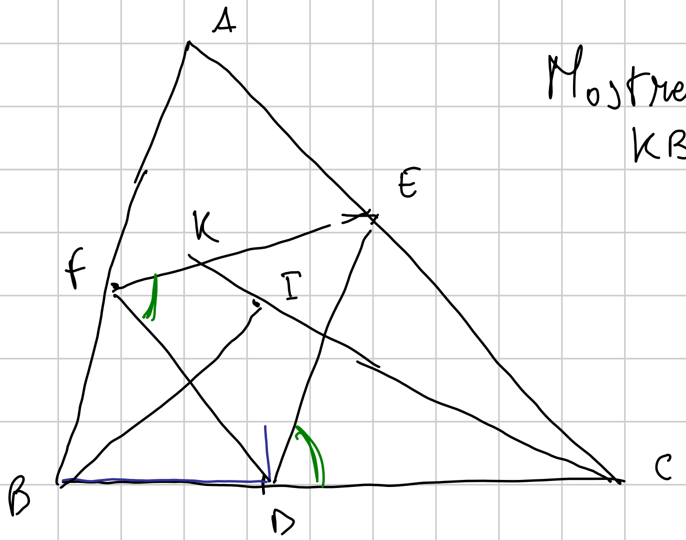
$L \in YZ \Rightarrow T, L \in YZ$

$\overline{XM} = \overline{YZ} \Rightarrow X, Y, Z$ allineati

Problema 3

Lemma: $\triangle ABC$, D, E, F p.ti di tangenza dell'incerchio con i lati
I incentro di ABC
$K = CI \cap EF$

Tesi: $\angle BKC = 90°$



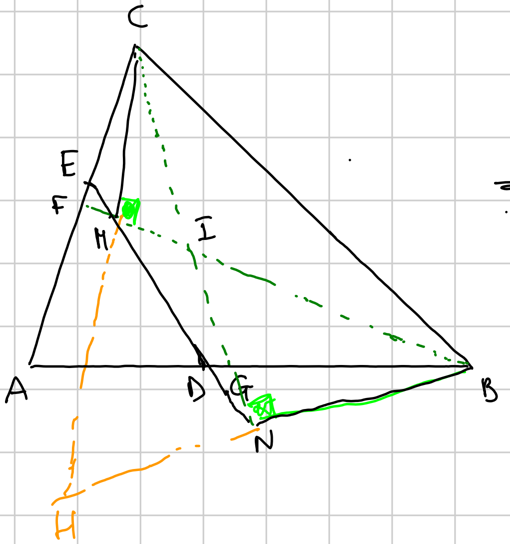
Mostreremo che KBIF ciclico

$\angle KIB = \beta/2 + \gamma/2$

$$\angle BFK = \angle BFD + \angle DFE$$
$$= \frac{\pi}{2} - \beta/2 + \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$$
$$= \pi - \beta/2 - \gamma/2 = \pi - \angle KIB$$

$\Rightarrow$ BDKF è ciclico

$\Rightarrow \angle BKC = 90°$ $\square$



Fatto: $\angle BNC = 90°$

$\angle BMC = 90°$

$\Rightarrow BNMC$ è ciclico

Allora $\triangle HNM \sim \triangle HBC$

In particolare, $\frac{MN}{BC} = \frac{HM}{BH} = |\cos \angle BHC|$

$$\angle BHC = \pi - \angle HBC - \angle HCB = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \angle ICB\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \angle IBC\right) = \angle ICB + \angle IBC = \pi - \angle BIC = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

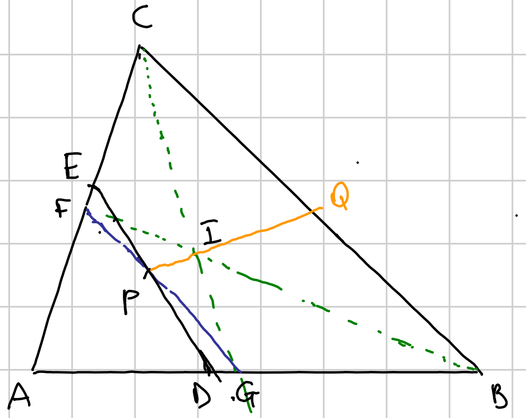
$\alpha = \angle BAC$

$$\frac{MN}{BC} = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right| = \left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|$$

$\Rightarrow 2MN = BC \iff \angle BAC = 60°$

Titolo nota 22/05/2019

Dimostriamo $2IP = IQ \iff \angle BAC = 60°$



Baricentriche su $\triangle ABC$

Ansatz

Le coordinate baricentriche di P rispetto al triangolo $\triangle ABC$ sono

$$\left([PBC], [APC], [ABP] \right)$$ o un suo multiplo

Coord esatte $\left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \ldots \right)$

$D = [s-a : s-b : 0]$ $\quad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$E = [s-a : 0 : s-c]$

$F = [a, 0, c]$

$G = [a, b, 0]$

Calcoliamo P!

$$FG: \quad \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{FG: \quad -bcx + acy + abz = 0}$$

$$DE: \quad \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ s-a & s-b & 0 \\ s-a & 0 & s-c \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{DE: \quad (s-b)(s-c)x - (s-a)(s-c)y - (s-a)(s-b)z = 0}$$

$$P = \left[\frac{a(s-a)}{bc}, \frac{(a-c)(s-b)}{c(b-c)}, \frac{(b-a)(s-c)}{b(b-c)} \right]$$

$$I = \left[\frac{a}{2s} ; \frac{b}{2s} , \frac{c}{2s} \right]$$

$$Q = \left[0, \text{roba}_1, \text{roba}_2 \right]$$

$$\overrightarrow{IP} = \left[\frac{a(s-a)}{bc} - \frac{a}{2s}, \ldots, \ldots \right]$$

$$\overrightarrow{IQ} = \left[-\frac{a}{2s}, \text{altra roba}_1, \text{altra roba}_2 \right]$$

$$\left|\frac{\overrightarrow{IP}}{\overrightarrow{IQ}}\right| = \left| \frac{\frac{a(s-a)}{bc} - \frac{a}{2s}}{-\frac{a}{2s}} \right|$$

$$= \left| \frac{\frac{2s\cancel{a}(s-a) - \cancel{a}bc}{2sbc}}{\frac{-\cancel{a}}{2s}} \right|$$

$$= \left| \frac{4s(s-a) - 2bc}{2bc} \right|$$

$$= \left| \frac{4s^2 - 4sa - 2bc}{2bc} \right|$$

$$= \left| \frac{(a+b+c)^2 - 2a(a+b+c) - 2bc}{2bc} \right|$$

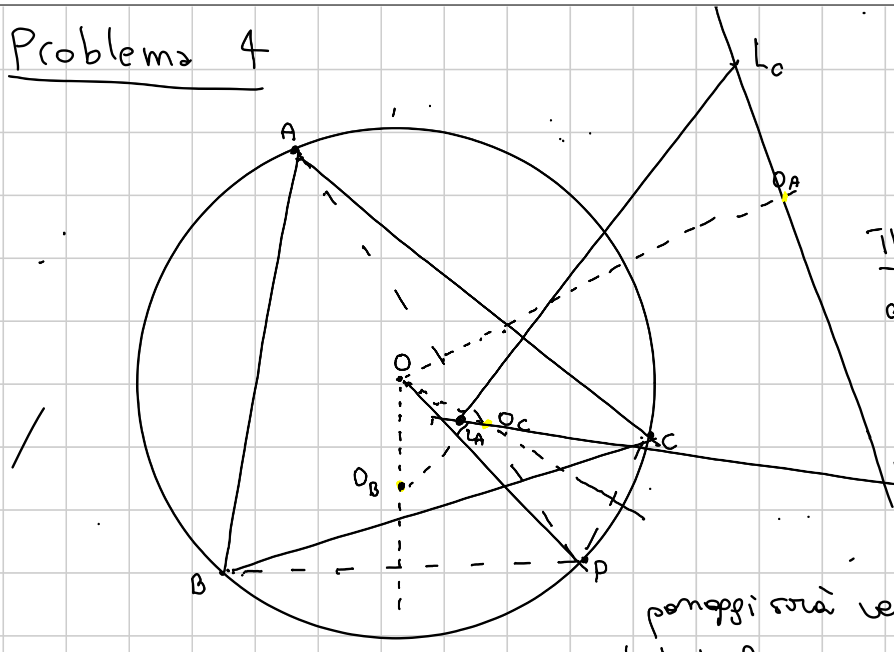
$$= \left| \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right|$$

$$= \left| \cos \angle BAC \right|$$

$$\frac{IP}{IQ} = \frac{1}{2} \iff \cos \angle BAC = \frac{1}{2}$$

$$\iff \angle BAC = 60^\circ$$

Problema 4

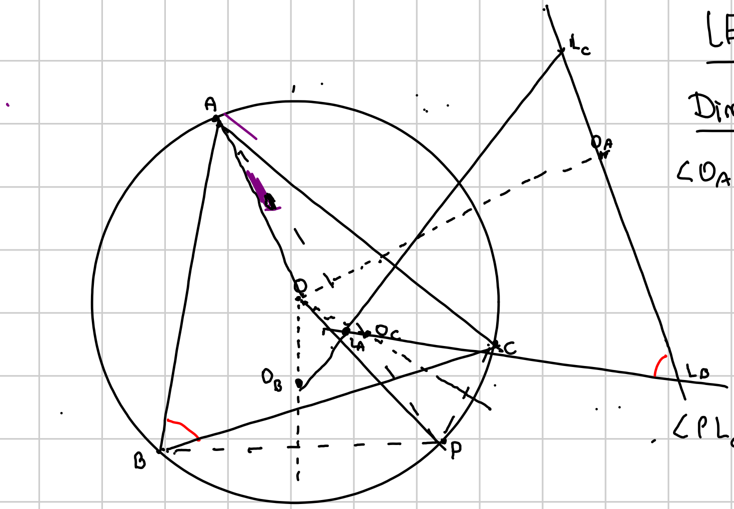


Oss. O_A, O_B, O_C allineati perchè sono sull'asse di OP

Th. OP tange la cfr circoscritta a $L_AL_BL_C$

Sol. [Idea] Disperata ma funziona
OP tange $OL_AL_BL_C$ in P, quindi uno dei passaggi sarà vedere la ciclicità $L_AL_BL_CP$.

Remind $\angle ABC = \angle(AB, BC)$ = quanto ruotare AB in senso antiorario per finire su BC. Ad esempio così vale ABCD ciclico $\iff$ $\angle ABC = \angle ADC$ e in generale sistema i problemi di conf. [e ciclicità]



LEMMA 1 P, O_A, O_C, L_B conciclici

Dim.

$OO_A \perp AP$, $OO_C \perp PC$ APBC ciclico

$\angle O_APO_C = \angle O_AOO_C = \angle APC = \angle ABC$

O_AO_C asse OP

$= \angle O_AL_BO_C$

$O_AL_B \perp BC$, $O_CL_B \perp AB$

LEMMA 2 L_A, L_B, L_C, P conciclici

$\angle PL_CL_A = \angle PL_CO_B \overset{\text{LEMMA 1}}{=} \angle PO_AO_B = \angle PO_AO_C \overset{\text{LEMMA 1}}{=}$

O_B, L_A, L_C allineati $\quad$ O_A, O_B, O_C allineati

$= \angle PL_BO_C = \angle PL_BL_A$

L_A, O_C, L_B allineati

[Idea] Vogliamo per concludere $\angle OPL_A = \angle L_AL_CP$. Per girare questi angoli...

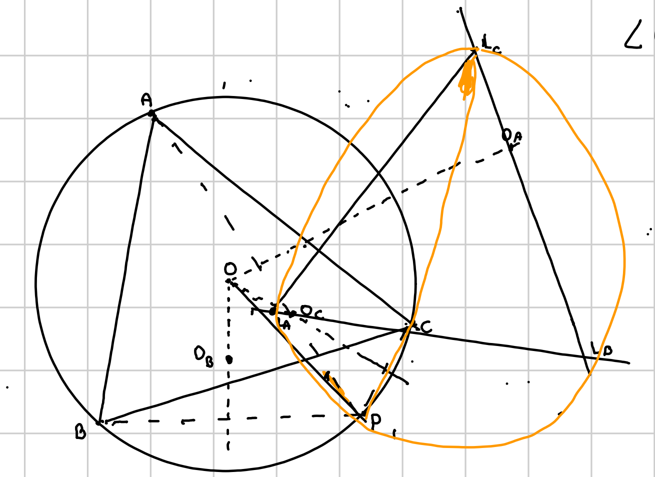
LEMMA 3 [e ciclicità] P, L_C, C allineati. Vogliamo $\angle PL_CL_A = \angle(PC, L_CL_A)$

Allora $\angle PL_CL_A = \angle PL_CO_B \overset{\text{LEMMA 1}}{=} \angle PO_AO_B = \frac{1}{2}\angle PO_AO = \angle PAO = \frac{\pi}{2} - \angle ACP$

O_B, L_A, L_C all. $\quad$ $AC \perp L_AL_C$ $\quad$ $O_AO_BO_C$ asse di OP $\quad$ T. Lamino angoli

$\overset{?}{=} \angle(PC, L_AL_C)$

Conclusione



P, A, L_A allineati

$\angle OPL_A \overset{?}{=} \angle OPA = \angle OAP = \angle L_A L_C P$ $\blacksquare$

<u>Idea</u>: Invertite in P...

PreImo 2019 – TdN – MATTINO

Note Title 20/05/2019

(N1) $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$

$\Omega(n) = a_1 + a_2 + \dots + a_k$

Tesi: esistono 2019 interi positivi consecutivi tra i quali esattamente 1000 hanno la proprietà $\Omega(n) < 11$.

$2^{11} = 2048 > 2019$

Tutti gli interi $1, 2, \dots, 2019$ hanno la proprietà $\Omega(n) < 11$.

Oss. Dato $l > 0$ e $t \geq 2$ esistono l interi positivi consecutivi per cui $\Omega(n) \geq t$

Dim. Induzione su t.

Caso $t = 2$ (cioè esistono l interi consecutivi che non sono primi).

Un esempio è: $(l+1)! + 2, (l+1)! + 3, \dots, (l+1)! + (l+1)$

Passo induttivo: $t-1 \Rightarrow t$

$x+1, \dots, x+l$ con $\geq t-1$ con $\Omega(n) \geq t-1$

e prendiamo, per esempio,

$(x+l)! + (x+1), \dots, (x+l)! + (x+l)$

Per ogni x considero

$f(x) =$ n° di interi che hanno $\Omega(n) < 11$ fra $x+1, \dots, x+2019$

Ho scoperto:

- $f(0) = 0$
- c'è un certo y per cui $f(y) = 2019$

Spostandomi da x a $x+1$ il valore di $f(x)$ può variare al massimo di 1

Per arrivare da 0 a 2019 ad un certo punto devo passare per 1000.

(N2) (Sol. "elementare") $4p^2 = 2u^2 + 2v^2$

p primo u, v interi distinti con $p = \dfrac{u^2+v^2}{2}$

Tesi: $\exists x \in \mathbb{Z}$ t.c. $2p-u-v = x^2$ oppure $2p-u-v = 2x^2$.

$(*)$ $$(2p-u-v)(2p+u+v) = 4p^2 - u^2 - v^2 - 2uv = u^2+v^2 - 2uv = (u-v)^2$$

— $u \equiv v \pmod 2$

$(*)/4$ $$\frac{2p-u-v}{2} \cdot \frac{2p+u+v}{2} = \left(\frac{u-v}{2}\right)^2$$

Quindi possiamo scrivere

$(\otimes)$ $$\frac{2p-u-v}{2} = qa^2 \qquad \frac{2p+u+v}{2} = qb^2$$ q squarefree $(q>0)$

Sommiamo:

$$q \mid \frac{2p-u-v}{2} + \frac{2p+u+v}{2} = 2p.$$

Dimostriamo che $p \nmid q$. Altrimenti avremmo ...

$p \mid \dfrac{u+v}{2}$ Però

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = p^2$$

che contrasta con il fatto $\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2 \geq p^2$.

Quindi $q=1$ oppure $q=2$

$q=1 \Rightarrow 2p-u-v=2a^2$

$q=2 \Rightarrow 2p-u-v=(2a)^2$.

SOLUZIONE CON GLI INTERI DI GAUSS

$$\mathbb{Z}[i]=\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$$

SOMMA E PRODOTTO SONO DATI DA $\mathbb{Z}[i]\subseteq\mathbb{C}$

NEGLI INTERI DI GAUSS ESISTE LA FATTORIZZAZIONE UNICA:

- X È UN'UNITÀ $\Leftrightarrow \exists y$ t.c. $XY=1$

  LE UNITÀ DI $\mathbb{Z}[i]$ SONO $1,-1,i,-i$;

- X È PRIMO SE $X=a\cdot b \rightarrow$ a UNITÀ O b UNITÀ;

- $X=p_1\cdot\ldots\cdot p_n\cdot u$ CON p_i PRIMI E u UNITÀ (IN UN UNICO MODO A MENO DI UNITÀ u E UNITÀ DENTRO I p_i)

$\left(\text{IN } \mathbb{Z} \quad 9 = 3 \cdot 3, \quad 9 = (-3) \cdot (-3) \right)$

$$2p^2 = u^2 + v^2 = (u + iv)(u - iv)$$

$$2p^2 = 2 \cdot p \cdot p$$

VOGLIAMO SAPERE LA SCOMPOSIZIONE DI p

$$2 = (1+i)(1-i) = i(1-i)^2$$

$$1+i = i(1-i)$$

$$p \equiv 3 \ (4)$$

$p = q_1 \cdot \ldots \cdot q_n$ CON q_i PRIMI DI $\mathbb{Z}[i]$

$$|a + ib| = a^2 + b^2$$

$|\ |$ È MOLTIPLICATIVA

$$|p| = |q_1| \cdot \ldots \cdot |q_n|$$

$p^2 =$ PRODOTTO DI INTERI POSITIVI

$|q_1| = p^2$ E GLI ALTRI SONO UNITÀ $1 \quad -1 \quad i \quad -i$

$|q_1| = p \qquad |q_2| = p$

(A MENO DI PERMUTARE GLI INDICI DEI q_i)

SE $p \equiv 3 \ (4)$

$|q_1| = p \rightarrow a^2 + b^2 = p$ PER CERTI a, b INTERI

MA $a^2 + b^2 \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \pmod 4$

PERCHÉ $n^2 \equiv 0, 1 \ (4)$

SE $p \equiv 3 \ (4) \rightarrow p$ È PRIMO IN $\mathbb{Z}[i]$

SE $p \equiv 1\ (4)$ SAPPIAMO CHE ESISTONO a, b INTERI TALI CHE

$$a^2 + b^2 = p$$

$$p = (a+ib)(a-ib)$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ p^2}}{|p|} = |a+ib| \cdot |a-ib| \qquad a^2+b^2 = p$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ p \cdot p}}{}$$

$$a + ib = q_1 \cdot \ldots \cdot q_n$$

$$\Big\Downarrow \text{ NORMA}$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ p}}{a^2+b^2} = |q_1| \cdot \ldots \cdot |q_n| \Longrightarrow$$ TUTTI I q_i TRANNE 1 HANNO NORMA 1

$$\Downarrow$$

SONO UNITÀ

SE $p \equiv 3\ (4) \Rightarrow p$ È PRIMO

$p \equiv 1\ (4) \rightarrow p = \underbrace{(a+ib)(a-ib)}_{\text{PRIMI}}$

E $a^2+b^2=p$

$2p^2 = u^2+v^2$

CASO $p \equiv 1\ (4)$

$$2(a+ib)^2(a-ib)^2 = (u+iv)(u-iv)$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{(1+i)(1-i)(a+ib)^2(a-ib)^2}_{\text{SONO PRIMI}}$$

$u+iv$ $\parallel$ $(1+i)(a+ib)^2$

$u-iv$ $\parallel$ $(1-i)(a-ib)^2$

OPPURE

$u+iv$ $\parallel$

$u-iv$ $\parallel$

$(1+i)(a+ib)^2(a-ib) \qquad (1-i)(a-ib)$

NON È POSSIBILE!

$$u - iv = (1-i)(a-ib)$$

$$\Big\downarrow \text{NORMA}$$

$$\underset{\substack{\| \\ 2p^2}}{u^2+v^2} = 2 \cdot p$$

$$u+iv \quad \begin{cases} \boxed{(1+i)(a+ib)^2} \\ (1+i)\cdot(a+ib)(a-ib) \\ \boxed{(1+i)(a-ib)^2} \end{cases}$$

$(1-i)(a+ib)^2$

$(1-i)(a+ib)\cdot(a-ib)$

$\boxed{(1-i)(a-ib)^2}$

CASO $\boxed{}$:

$$u+iv = (1+i)(a+ib)^2 =$$

$$= (1+i)(a^2-b^2+i(2ab)) =$$

$$= (a^2-2ab-b^2+i(a^2+2ab-b^2))$$

$$u = a^2 - 2ab - b^2$$

$$v = a^2 + 2ab - b^2$$

$$2p - u - v =$$

$$2(a^2 + b^2) - (a^2 - 2ab - b^2 + a^2 + 2ab - b^2)$$

$$= 2a^2 + 2b^2 - 2a^2 + 2b^2 = 4b^2 = x^2 \quad \checkmark$$

È SEMPLICEMENTE IL CONIUGATO DEL CASO

È $i \cdot$

$$u + iv = (1+i)(a - ib)(a + ib) =$$

$$= (1+i)(a^2 + b^2)$$

$$\longrightarrow \quad u = a^2 + b^2 = p \qquad v = a^2 + b^2 = p$$

$2p - u - v = 0$

N3 a_n = prima cifra di 2^n

$\alpha = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ è razionale?

α è razionale $\Leftrightarrow$ $a_{r+s} = a_{r+s+kn}$ $\forall n$ con un certo k

cosa vuol dire che 2^n comincia con a_n?

$$a_n \cdot 10^\ell \leq 2^n < (a_n+1) \cdot 10^\ell$$

$$\ell + \log_{10} a_n \leq n \cdot \log_{10} 2 < \ell + \log_{10}(a_n+1)$$

$$\Leftrightarrow \{n \log_{10} 2\} \in [\log_{10} a_n, \log_{10} a_n+1)$$

se supponiamo $a_{r+s} = a_{r+s+kn} = c$

$$\{(r+s+kn)\log_{10} 2\} \in [\log_{10} c, \log_{10} c+1)$$

$$(r+s)\log 2 + kn\log 2$$

$\{n k \log 2\} \in I$ intervallo di lunghezza $\log_{10} c+1 - \log_{10} c$

lemma: se β è irrazionale, $\{n\beta\}$ sono arbitrariamente vicine a ogni numero $\in [0,1]$

dim: per approssimazione di Dirichlet

$\exists$ infinite coppie (m, n) con $\left|\beta - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}$

$|n\beta - m| < \frac{1}{n}$.

$\{n\beta\}$ $1 - \{n\beta\}$

vogliamo approssimare γ

$0 < |n\beta - m| < \frac{1}{n}$ $\exists$ un certo ℓ per cui

$\ell |n\beta - m| < \gamma < (\ell+1)|n\beta - m|$

$\left|\{\ell n\beta\} - \gamma\right| < \frac{1}{n}$

oss: $\log_{10} 2$ è irrazionale,

$= \frac{m}{n}$ $10^m = 2^n$ X

$\boxed{N4}$ PER QUALI INTERI POSITIVI n ESISTONO INTERI POSITIVI

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ TUTTI DISTINTI

$b_1, \ldots, b_n$

t.c. $a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n$

$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = b_1 \cdot \ldots \cdot b_n$

$n=1$ $\quad a_1 = b_1$ $\quad$ NO

$\quad a_1 = b_1$

$n=2$ $\quad a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = S$

$\quad a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2 = P$

(a_1, a_2) E (b_1, b_2) SONO LE RADICI DI

$x^2 - Sx + P$ $\quad$ QUINDI O $a_1 = b_1$ O $a_2 = b_1$

SE ABBIAMO SOLUZIONI PER m ED n: ☆

$a_1, a_2, \dots, a_n$ $\quad \sum a_i = \sum b_i$

$b_1, b_2, \dots, b_n$ $\quad \prod a_i = \prod b_i$

$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m$ $\quad \sum \tilde{a}_i = \sum \tilde{b}_i$

$\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m$ $\quad \prod \tilde{a}_i = \prod \tilde{b}_i$

CREO UNA SOLUZIONE PER $m+n$:

$a_1, a_2, \dots, a_n, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m$

$b_1, b_2, \dots, b_n, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m$

$$\sum a_i + \sum \tilde{a}_i = \sum b_i + \sum \tilde{b}_i \quad \checkmark$$

$$\prod a_i \prod \tilde{a}_i = \prod b_i \prod \tilde{b}_i \quad \checkmark$$

SAPPIAMO CHE

$a_i \neq b_j$ MA NON SAPPIAMO

$$a_i \neq \tilde{a}_j \qquad a_i \neq \tilde{b}_j$$

SE

$$\begin{matrix} \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m \\ \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m \end{matrix} \text{ È SOL.} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda\tilde{a}_1, \lambda\tilde{a}_2, \dots, \lambda\tilde{a}_m \\ \lambda\tilde{b}_1, \lambda\tilde{b}_2, \dots, \lambda\tilde{b}_m \end{matrix}$$

È SOL.

$$\sum \lambda \tilde{a}_i = \lambda \sum \tilde{a}_i$$

$$\prod \lambda \tilde{a}_i = \lambda^m \prod \tilde{a}_i$$

SCEGLIENDO λ OPPORTUNO (ENORME)

ABBIAMO LA $\star$

HQE: TROVARE SOL. PER $n=3,4,5$

$6=3+3 \longrightarrow 9=3+6$

$7=3+4$ ... E COSÌ VIA

$8=3+5$

$n=3$:

$8+21+24=53$ $\quad \Pi = 2^6\cdot 3^2\cdot 7$

$16+9+28=53$ $\quad \Pi = 2^6\cdot 3^2\cdot 7$

$n=4$:

$a_1+a_2=b_1+b_2+1$

$a_1\cdot a_2=b_1\cdot b_2$

1	2
3	4
6	8
10	12
15	18
21	24
28	32
36	40
45	50
55	60

$12\cdot 15 = 10\cdot 18$

$(12+15)+1=(10+18)$

$21\cdot 32 = 24\cdot 28$

$(21+32)=(24+28)+1$

$\Sigma+1$ $\boxed{10 \quad 18}$ $\boxed{24 \quad 28}$ Σ

Σ $\boxed{12 \quad 15}$ $\boxed{21 \quad 32}$ $\Sigma+1$

$\Pi =$ $\Pi =$

$n = 5$

3	5	8	16	21	32	53	
2	6	10	18	24	28	52	-2

IL PRODOTTO

È UGUALE

42	64
48	56

$\Pi =$ $\Pi =$

Σ $\boxed{3 \quad 5 \quad 8}$ $\boxed{42 \quad 64}$ Σ $\Sigma+2$

$\Sigma+2$ $\boxed{2 \quad 6 \quad 10}$ $\boxed{48 \quad 56}$ Σ Σ

$$A_1 = (2N-2)!!\,(N-1)$$

$$A_i = (2i-3)\left[(2N-2)!! - (2N-3)!!\right]$$

$$2 \leq i \leq N$$

$$B_1 = (2N-3)!!\,(N-1)$$

$$B_i = (2i-2)\left[(2N-2)!! - (2N-3)!!\right]$$

$$2 \leq i \leq N$$

$A_1 \quad k \quad 3k \quad 5k \ldots$

$B_1 \quad 2k \quad 4k \quad 6k \ldots$

PreImo 2019 - TdN - Pomeriggio

Note Title 21/05/2019

$\boxed{N5}$ $n > 1$ $2^n+1 = p$ primo $\iff p \mid 3^{2^{n-1}}+1$

$\Leftarrow$ $p \mid 3^{2^{n-1}}+1 \implies p \mid (3^{2^{n-1}}+1)(3^{2^{n-1}}-1) = 3^{2^n}-1$

$3^{2^n} \equiv 1 \pmod p$

p può dividere uno solo dei due altrimenti $p \mid 2$ impossibile

$\mathrm{ord}_p 3 \mid 2^n$

$\mathrm{ord}_p 3 \nmid 2^{n-1}$ $\implies = 2^n$.

$2^n = p-1$

$\mathrm{ord}_m a \mid \phi(m)$ $= m-1 \iff m$ è primo.

$\Rightarrow$ p primo $p \mid 3^{2^n}-1$ $2^n = \phi(p)$

divide ~~esattamente~~ uno fra

$3^{2^{n-1}}-1$ e $3^{2^{n-1}}+1$

Quando si verifica questo? $\mathrm{ord}_p 3 \mid 2^{n-1}$

Se g è un generatore mod p

$\mathrm{ord}_p(g) = 2^n$ $\mathrm{ord}_p(g^i) \mid 2^{n-1} \iff i$ è pari

$\iff g^i$ quadrato

$g^i = 3$

RECIPROCITÀ QUADRATICA

In questo caso dice 3 è un quadrato mod p

$\iff p \equiv 1 \pmod 3$

$p = 2^n+1$ n è ovviamente è pari

$$2^n \equiv 1 \pmod 3$$
$$2^n + 1 \equiv 2 \pmod 3$$

$\Rightarrow$ 3 NON È QUADRATO mod p

FINE.

$\boxed{\text{RQ}}$

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & a = \square \bmod p \quad a \neq 0 \\ -1 & a \neq \square \bmod p \quad a \neq 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$ se p, q sono primi dispari

$$\left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot 1} = 1$$ perché $p \equiv 1 \pmod 4$

$$\left(\frac{3}{p}\right) = 1 \iff \left(\frac{p}{3}\right) = 1$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} +1 & p \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ -1 & p \equiv \pm 3 \pmod 8 \end{cases}$$

$\boxed{\text{N6}}$

lemma: $\# \left\{ k \in \{1, \dots p-1\} \;\middle|\; \left(\frac{k}{p}\right) = \left(\frac{k+1}{p}\right) = 1 \right\} = \left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor$

dim: $k = x^2 \quad k+1 = y^2 \ (p)$

vogliamo trovare il # di soluzioni di

$$x^2 + 1 \equiv y^2 \ (p)$$

$$\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x^2+1}{p}\right) \equiv \sum_{x=0}^{p-1}(x^2+1)^{\frac{p-1}{2}} \quad (p)$$

$$\equiv \sum_{x=0}^{p-1} x^{p-1} + \dots x^{p-2} + \dots + 1 \quad (p)$$

$$\equiv p-1 + \sum_{x=0}^{p-1} f(x) \quad (p)$$ con $\deg f \leq p-2$

$$\equiv -1 \quad (p)$$

$\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x^2+1}{p}\right) = -1$ $\quad\left(\frac{x^2+1}{p}\right) = 1$ per $\frac{p-1}{2}$ valori di

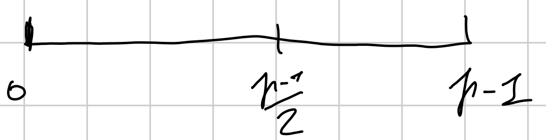
o $\frac{p-3}{2}$

(occhio a p mod 4)

$(x)^2 \equiv (-x)^2 \equiv x^2 \ (p)$

i valori assunti da x^2 t.c. x^2+1 é $\square$ mod p

sono $\frac{p-1}{2}/2 = \left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor$



per assurdo in $\left[0, \frac{p-1}{2}\right]$ ci sono $\leq \frac{p}{12}$

$\Rightarrow$ in $\left(\frac{p-1}{2}, p-1\right]$ ci sono $\geq \#RQ - \frac{p}{12}$

$$= \frac{p-1}{2} - \frac{p}{12}$$

in $\left(\frac{p-1}{2}, p-1\right]$ ci sono $\leq \frac{p}{12}$ non residui

conto le coppie $(k, k+1) = (\square, \square)$ in $\left(\frac{p-1}{2}, p-1\right]$

- NR R R R ... R NR ...

sono almeno $\frac{p}{2} - 2\frac{p}{12} = \frac{p}{2} - \frac{p}{6} = \frac{p}{3}$

ma in tutto l'intervallo $[0, p-1]$ ci sono $\frac{p}{4}$ coppie $(\square, \square)$

assurdo perché $\frac{p}{3} > \frac{p}{4}$

(SISTEMARE GLI OFF-BY-ONE)

N7) per assurdo $\exists n$ tutti i fattori primi di b_n dividono qualche b_i per $i = 1, \ldots, n-1$

$p \mid b_n$ $\exists k < n$ con $p \mid b_k$ e prendo k_0 il minimo

$v_p(b_{k_0}) = \ell$ claim: $v_p(b_n) = \ell$

$$P(b_{k_0}) = a_d b_{k_0}^d + \ldots + a_2 b_{k_0}^2 + a_0 \equiv \left(p^{\ell+1}\right)$$

$$\equiv a_0 \left(p^{\ell+1}\right) \quad \text{perché } 2\ell \geq \ell+1$$

$b_{k_0+s} \equiv b_s \left(p^{\ell+1}\right) \rightarrow b_i$ periodici di periodo k_0

$p \mid b_n \Rightarrow k_0 \mid n$ e $b_n \equiv b_{k_0} \ (p^{\ell+1})$

$\Rightarrow v_p(b_n) = \ell$

$b_n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r} \leq \prod_{d \mid n} b_d \leq b_1 \cdots b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \left(b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

$b_n = P^{(\lceil \frac{n}{2} \rceil)}\left(b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right)$ $\qquad P(x) \geq x^d$

$\geq b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{d^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

avremmo $\left(b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{d^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}} \iff$

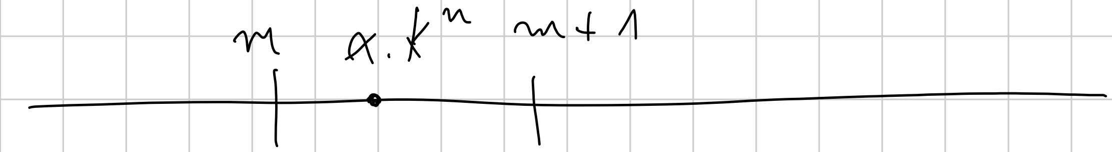
$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq d^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ falsa per $d \geq 2$

N8 M, K INTERI POSITIVI CON $K-1$ NONSQUAREFREE.

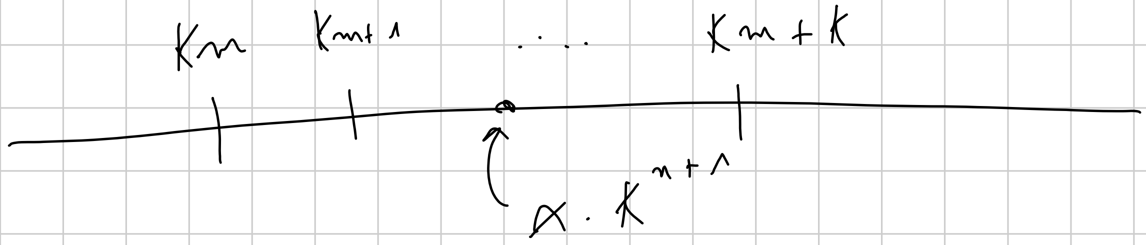
Th. ESISTE A REALE t.c.

$$(\lfloor A \cdot K^n \rfloor, M) = 1 \quad \forall n \geq 1$$

$\lfloor A \cdot k^n \rfloor$ COS'È?



$\alpha \cdot K^{n+1}$ DOVE SARÀ?



SE $\lfloor \alpha \cdot K^n \rfloor = m$ POSSIAMO

MODIFICARE "DI POCO" α IN MODO TALE CHE

$\lfloor \alpha \cdot K^{n+1} \rfloor = Km + J$ CON

$J \in \{0, \dots, K-1\}$ DI NOSTRA SCELTA

$$\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{J_i}{K^i} \quad \text{CON} \quad J_i \in \{0, \dots, K-1\}$$

$$\lfloor \alpha \cdot K^n \rfloor = J_0 \cdot K^n + J_1 \cdot K^{n-1} + \dots + J_n \cdot K^0$$

SEMPRE TRANNE QUANDO GLI J_i SONO

DEFINITIVAMENTE $K-1$

(I.E.: $0,999\ldots = 1$)

$\lfloor 0,\bar{9} \cdot 10 \rfloor = 10 \neq 9$

M

$0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad M-1$

$2K \quad 2K+1 \quad \dots \quad 3K-1$

NON DEFINITIVAMENTE

$2K^2+K \quad 2K^2+K+1 \quad \dots \quad \boxed{2K^2+2K-1}$

-1

PURTROPPO NO.

$-K \quad -K+1 \quad \dots \quad -1$

$-K \quad -K+1 \quad \dots \quad -1$

IDEE: SCEGLIAMO X COPRIMO CON M

E VORREMMO $X \rightarrow X$ CIOÈ:

$$x \equiv kx + j \quad (M)$$

$$\left.\begin{array}{l} j \neq k-1 \\ 0 \leq j \leq k-1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad 0 \leq j \leq k-2$$

POSSIAMO SCEGLIERE M SQUAREFREE:

$$M = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

$$\tilde{M} = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$$

I NUMERI COPRIMI CON M SONO I NUMERI COPRIMI CON $\tilde{M}$

- $kx + j \equiv x \quad (M)$
- $0 \leq j \leq k-2$ ✓
- M SQUAREFREE ✓
- $(x, M) = 1$

$$(k-1)\,x \equiv -j \quad (M)$$

$$MCD(k-1, M) = d \mid j$$

$J = d$ LO PRENDIAMO

$(K-1)x \equiv -d \ (M)$

$0 \leq d = MCD(K-1, M) \leq K-1$

SE $d = K-1 \rightarrow K-1 \mid M$

MA NON È POSSIBILE PERCHÉ M È SQUAREFREE E $K-1$ NO!

$\Longrightarrow 0 \leq d \leq K-2$

$(K-1)x \equiv -d \quad (M)$

$d \mid K-1$ E $d \mid M$

E $d = MCD(K-1, M)$

$\frac{(K-1)}{d} x \equiv -1 \quad \left(\frac{M}{d}\right)$

MA $\frac{(K-1)}{d}$ E $\frac{M}{d}$ SONO COPRIMI ✓

C'È UNA SOLUZIONE $\bar{X}$. E IN PARTICOLARE

$X = \left(\bar{X} + l \cdot \frac{M}{d}\right)$ È SEMPRE SOLUZIONE:

$$(K-1)\left(\bar{X} + l \cdot \frac{M}{d}\right) \equiv$$

$$(K-1)\bar{X} + M \cdot \cancel{\frac{l \cdot (K-1)}{d}} \equiv -d \quad (M)$$

INTERO

$$\equiv 0 \quad (M)$$

$\left(\bar{X} + l \cdot \frac{M}{d}, M\right) = 1$ CI BASTA TROVARE l

$$\left(\bar{X}, \frac{M}{d}\right) = 1$$

FISSIAMO UN PRIMO p. DICO CHE $\exists\, l_p$ t.c.

$p \nmid \bar{x} + l_p \cdot \frac{M}{d}$. SE PER ASSURDO

$p \mid \bar{x} + l_p \cdot \frac{M}{d} \quad \forall p \Rightarrow$

- $p \mid \frac{M}{d}$ $\qquad p \mid \bar{x}$

MA $\left(\bar{x}, \frac{M}{d}\right) = 1$

RIUSCIAMO A SCANSARE OGNI PRIMO

E SE SCANSIAMO TUTTI I PRIMI DI M

ABBIAMO VINTO: $M = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$

CI BASTA

$$\begin{cases} l \equiv l_{p_1} & (p_1) \\ \ldots & \\ l \equiv l_{p_r} & (p_r) \end{cases} \Rightarrow \bar{x} + l \cdot \frac{M}{d} \text{ NON È MULTIPLO DI } p_i \; \forall i$$