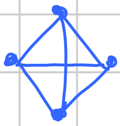
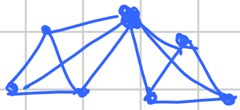
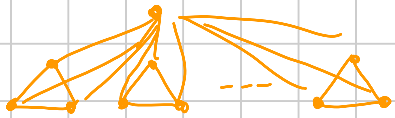
Combinatoria mattina PreIMO 19

Note Title 23/05/2019

Problema 4

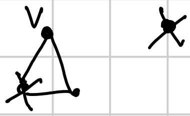
Grafo con 100 vertici. Comunque tolto un vertice, i restanti 99 si possono dividere in 33 △ disgiunti. Quanti archi al minimo?

$\boxed{n=4}$  ⇝ 6 $\boxed{n=7}$  ⇝ 12



Claim. La risposta è $2\cdot 99$

quindi $|E|_{min} \le 2\cdot 99$

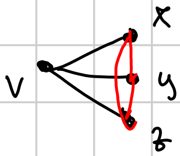
Oss. Ogni vertice ha grado ≥ 2. Infatti 

Ma in realtà almeno 3!

Questo ci dice che $|E| \ge \frac{3\cdot 100}{2} = 150 < 2\cdot 99$ ... devo fare di meglio.

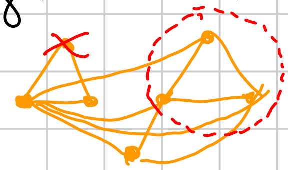
Se tutti i vertici hanno grado ≥ 4 ho finito.

⇝ supponiamo che $\exists\, v$ di grado 3.



Cosa succede se togliamo x?
L'unico triangolo in cui può stare v è quello formato con y e z → c'è un arco tra y e z!

Proviamo per induzione su n (di 3 in 3)
Una possibilità è togliere un triangolo, però non funziona.



No!

Idea! Collasso la 4-cricca in un solo vertice.

Cioè: sostituisco v, x, y, z con un vertice u collegato a tutti i vertici che erano connessi alla 4-cricca.

Vanno verificate due cose: (i) il nuovo grafo verifichi l'ipotesi
(ii) di aver tolto almeno 6 ✓

• primo caso: tolgo u,

se tolgo v, un triangolo è x-y-z, quindi quello che rimane è triangolabile

• secondo caso: tolgo un altro vertice w

supponiamo WLOG che v-x-y sia un triangolo ma allora z forma un triangolo con altri 2 vertici ma posso ricopiare questa triangolazione nel grafo ridotto!

C1

99-agono regolare
Alberto e Barbara mettono a turno un cioccolatino su un vertice
Si può aggiungere solo in posizione adiacente ad uno già presente
Barbara vince se riesce ad ottenere un tr. equil. di un unico gusto

C'è un "arco" di cioccolatini che si allunga

I triangoli equilateri sono costituiti dai vertici a distanza 33
(in totale 33 tr. equil.)

Il gioco si può dividere in 3 fasi.

Fase 1: mosse 1-33	Fase 2: mosse 34-66	Fase 3: mosse 67-99
Si riempie il primo vertice di ogni triangolo	Si riempie il secondo	Si riempie il terzo QUI BARBARA PUÒ VINCERE

Fase 1: ciò è indifferente

Fase 2: Barbara metterà un cioccolatino dello stesso grado di quello sul suo triangolo (Fase 1)

Alberto lo metterà di grado diverso

Fine fase 2: Barbara ha avuto le mosse pari, nella Fase 2 abbiamo da 34 a 66.

Barbara ha fatto 17 mosse e Alberto 16.

Fase 3: se Barbara ha usato la sua strategia, ci sono 17 vertici fra i 33 liberi tali che, se Barbara deve giocare e può farlo in quel vertice, vince.

Se ci sono 2 vertici "buoni per Barbara" consecutivi, Barbara vince.

Resta il caso in cui sono alternati.
Cioè Barbara vince con i vertici 1 - 3 - 5 - 7 - ... 33

In questo caso Barbara vince subito. $\square$

C2

(m, n) è cioccolatosa se

$m > n$ si scrive come somma di divisori di n

$\exists$ un insieme con 2019 interi a 2 a 2 cioccolatosi?

Def: un insieme $S \subseteq \mathbb{Z}_{>0}$ è cioccolatoso se ogni sua coppia lo è

Oss: una volta fissato il minimo di S
abbiamo una forte limitazione su tutti gli altri elem.

Idea: esibire una costruzione induttiva (allargando S)

Se $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ è croccolatoso, allora

anche $\{ka_1, \dots, ka_n\}$ è ancora croccolatoso

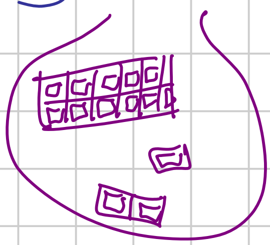
Ora posso aggiungere un elemento, per esempio $ka_n + 1$ *

$(ka_n - ka_i) + (ka_n + 1 - ka_n)$ è somma di divisori di ka_i

$\Rightarrow S' = kS \cup \{ka_n + 1\}$ è ancora croccolatoso e ho vinto.

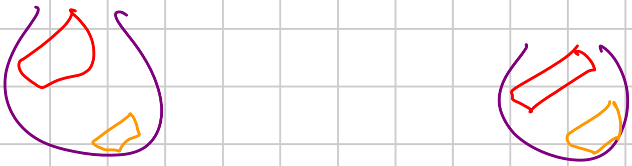
* esistono altri modi validi.

C3



le tavolette sono interi tra 1 e 2019

tutti i sacchetti hanno un peso totale diverso



$S_1 > S_2$

il più grande

il più piccolo

se tolgo allora i pesi si invertono

Quanti sacchetti ho al massimo?

Soluzione:

Confrontiamo 2 sacchetti

$p_1 > p_2$

$p_1 - x_1 < p_2 - x_2$ $\qquad x_i = M_i + m_i$ del sacchetto s_i

$\Downarrow$ sono numeri interi

$p_1 \geq p_2 + 1$

$p_1 - x_1 + 1 \leq p_2 - x_2$

$\Downarrow$

$2 \leq x_1 - x_2$

Ora i sacchetti $s_1, \dots, s_n$

avranno $x_1, \dots, x_n$

sono tali che $x_1 + 2 \leq x_2$

$x_2 + 2 \leq x_3 \quad \dots$

inoltre $x_1 \geq 2$

$x_n \leq 2 \cdot 2019$

$\Rightarrow \quad n \leq 2019$

Rimane da mostrare che si riesce a costruire l'esempio

la guida è seguire tutte le uguaglianze in •

Proviamo quindi con sacchetti con tavolette tutte uguali

ottengo questo sistema

$$t_1 \cdot 1 = p_1$$
$$t_2 \cdot 2 = p_2 = p_1 + 1$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} t_1 = k \\ 2t_2 = k+1 \\ \vdots \\ 2019\, t_{2019} = k + 2018 \end{cases}$$

ha soluzione $\iff$

$$\begin{cases} k \equiv -1 \pmod 1 \\ k \equiv -1 \pmod 2 \\ \vdots \\ k \equiv -1 \pmod{2019} \end{cases}$$

Che ce l'ha banalmente (ed è abbast. grande).