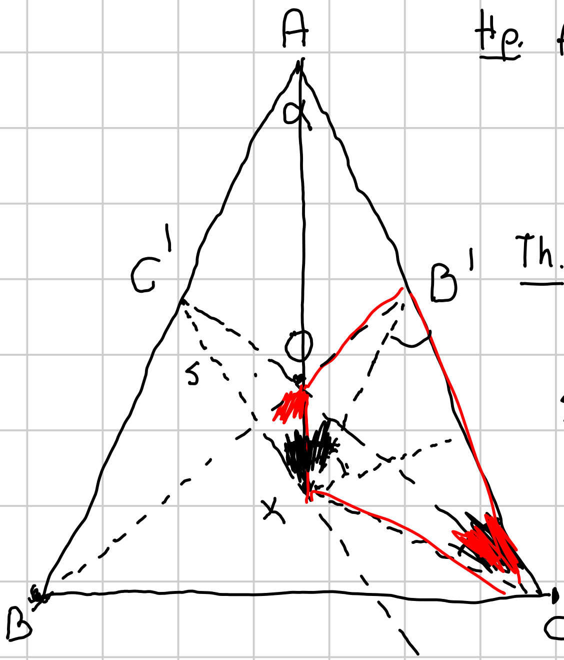
Pre IMO 2019 - Geometria Mattina

Titolo nota 22/05/2019

Problema 1



Hp. ABC isoscele con $AB=AC$

O circocentro $B' \doteq BO \cap AC$

$C' \doteq CO \cap AB$

Th. s parallela a AC per C' tange $\odot B'OC$.

Sol.

[Euristica] Percepire chi è il p.to di tangenza. Ammettiamo pure che esista.

Abbiamo $\angle B'XC = \angle B'OC = \pi - \angle BOC = \pi - 2\alpha$

e siccome $C'X$ tange ~~...~~ ed è parallela ad AC deduciamo che $C'XB' = \frac{\pi - \angle B'XC}{2} = \alpha$ ... questo ci dice che X è il punto che completa il parallelogramma (che poi è un rombo) $AC'XB'$, che sta su AO...

Soluzione Sia X il punto tale che $AC'XB'$ è un parallelogramma.

Siccome $AC' = AB'$ per simmetria, allora $AC'XB'$ è anche rombo.

Inoltre per simmetria $X \in AO$.

Claim 1 $B'OXC$ ciclico

Dim. $\angle OB'XO = \frac{1}{2}\angle B'XC' = \frac{1}{2}\angle B'AC' = \frac{1}{2}\alpha$

$\angle CB'CO = \frac{\pi - \angle AOC}{2} = \frac{\pi - 2\angle ABC}{2} = \frac{\pi - 2\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}\alpha$

Dunque $B'OXC$ ciclico.

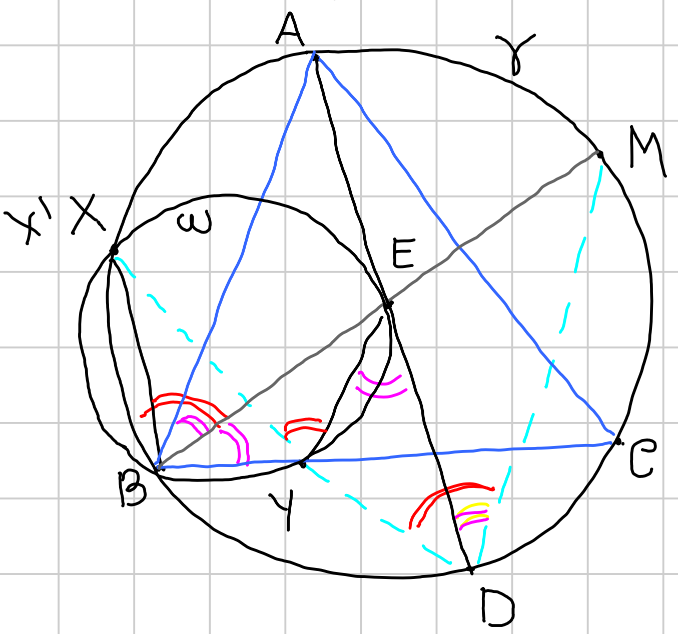
Claim 2 $C'X$ tange $\odot B'XC$

Dim $\angle C'XB' = \alpha$

$\angle XCB' = \angle XOB = \frac{1}{2}BOC = \alpha$

e quindi $C'X$ tange $\odot B'XC$

Problema 2



Tesi: XY, AE, $//EY$ per M concorrono

Mostriamo che concorrono in D.

$M\hat{D}A \simeq M\hat{B}A \simeq M\hat{B}C = Y\hat{E}D$

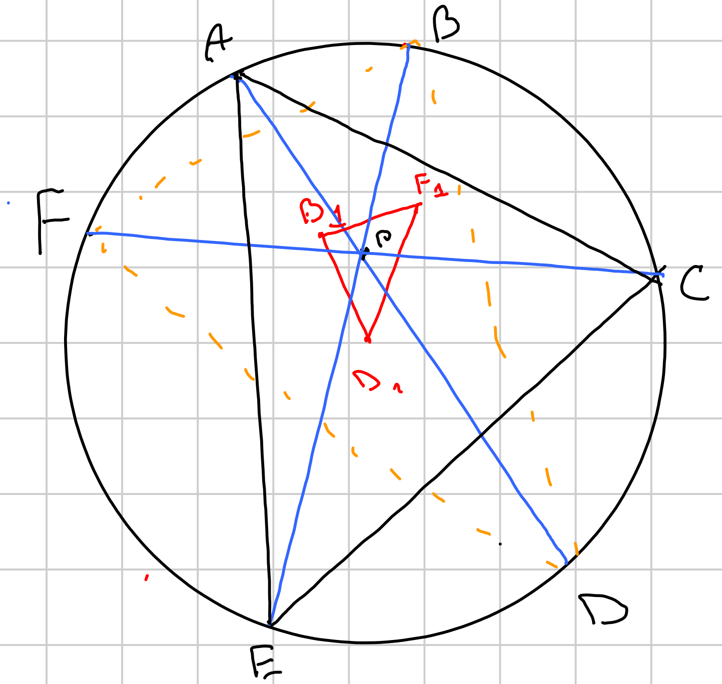
$\Rightarrow EY // MD$

$\Rightarrow$ Basta mostrare che X, Y, D sono allineati.

($X' := DY \cap \gamma$ $\quad X'\hat{Y}E \simeq X'\hat{D}M = X'\hat{B}M$

$X'BYE$ è ciclico $\Rightarrow X' \in \omega \cap \gamma \Rightarrow X' = X$. □

Problema 3



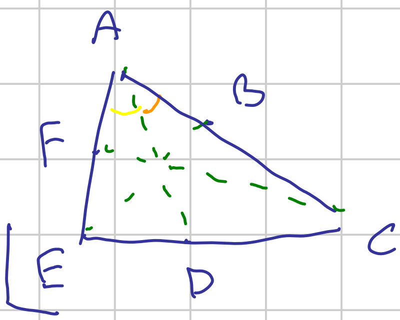
Hp: $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$

B_1 = sym di B rispetto AC

D_1, F_1 analogamente.

Tesi: $\triangle BDF \sim \triangle B_1D_1F_1$

[Remind Ceva:



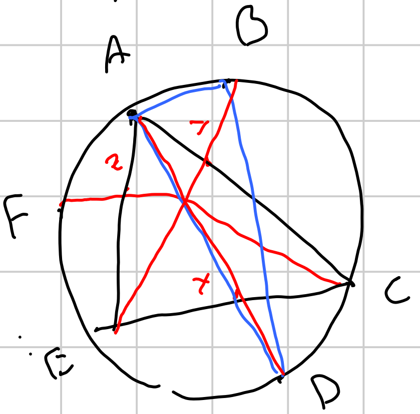
AD, BE, CF concorrenti

$\Updownarrow$

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$$

Ceva trigonometrico

AD, BE, CF concorrenti $\iff \dfrac{\sin CAD}{\sin DAE} \cdot \dfrac{\sin BEC}{\sin BEA} \cdot \dfrac{\sin ECF}{\sin ACF} = 1$



$$AB = 2R \cdot \sin ADB = 2R \cdot \sin AEB$$

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA}$$

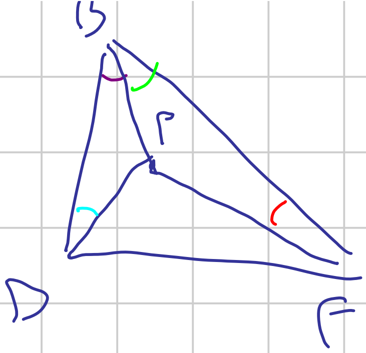
$$\parallel$$

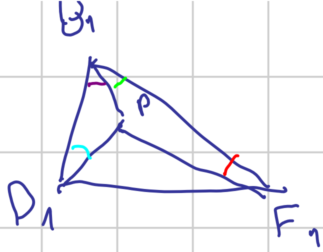
$$\frac{\sin AEB}{\sin BEC} \cdot \frac{\sin CAD}{\sin DAE} \cdot \frac{\sin ECF}{\sin ACF}$$

$\Rightarrow$ Ceva trigonometrico su $\triangle ACE$ e i punti X, Y, Z sui lati

Ipotesi $\iff AD, BE, CF$ concorrono in P

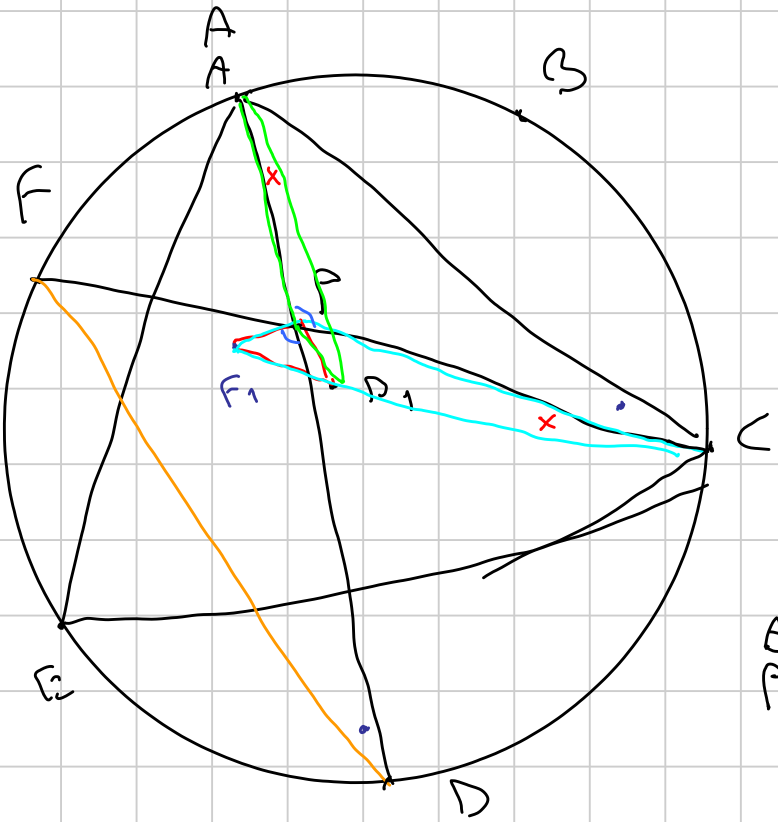
Claim: $BDFP \sim B_1D_1F_1P$, cioè $\begin{cases} PDF \sim PD_1F_1 \\ PDB \sim PD_1B_1 \\ PBF \sim PB_1F_1 \end{cases}$

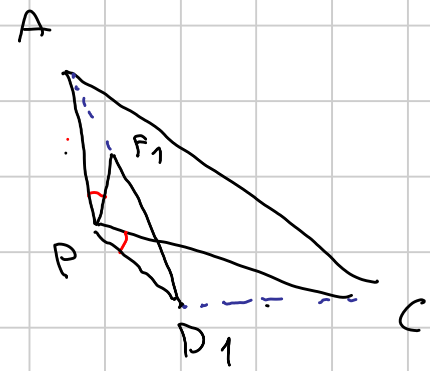




Claim: $PDF \sim PD_1F_1$

$\triangle PDF \sim \triangle PCA$

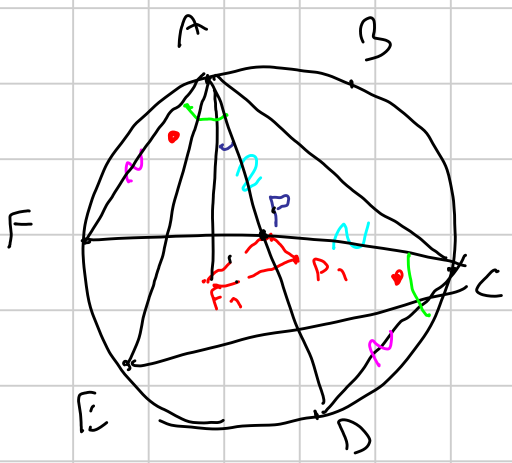




Eunicita

$\angle APC = \angle D_1PF_1$

$\frac{AP}{PC} = \frac{PD_1}{PF_1} \rightarrow \triangle APF_1 \sim \triangle CPD_1$



$\angle PAF_1 = \angle PAF - \angle FAF_1$

$= \angle PAF - 2\angle EAF$

$= \angle DCF - 2\angle ECF$

$= \angle DCF - \angle DCD_1$

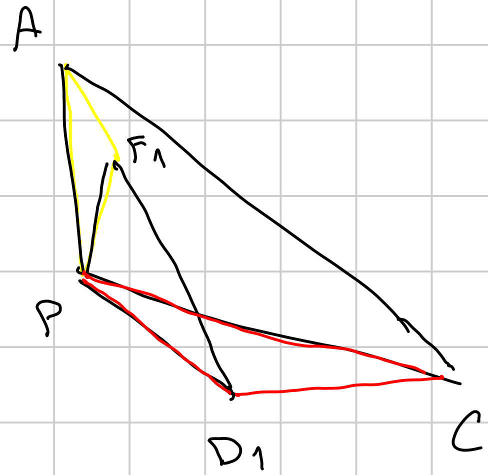
$= \angle D_1CP$

$\Delta APF_1 \sim \Delta CD_1P$

$$\frac{AP}{AF_1} \stackrel{?}{=} \frac{CP}{CD_1} \iff \frac{AP}{AF} = \frac{CP}{CD} \Rightarrow \text{vero perché}$$

$$\Delta CPD \sim \Delta APF$$

ΔCPD_1, ΔAPF_1 sono simili



$$\frac{AP}{PF_1} = \frac{CP}{PD_1} \longrightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{F_1P}{D_1P}$$

$$\angle APF_1 = \angle CPD_1$$

$$\Downarrow$$

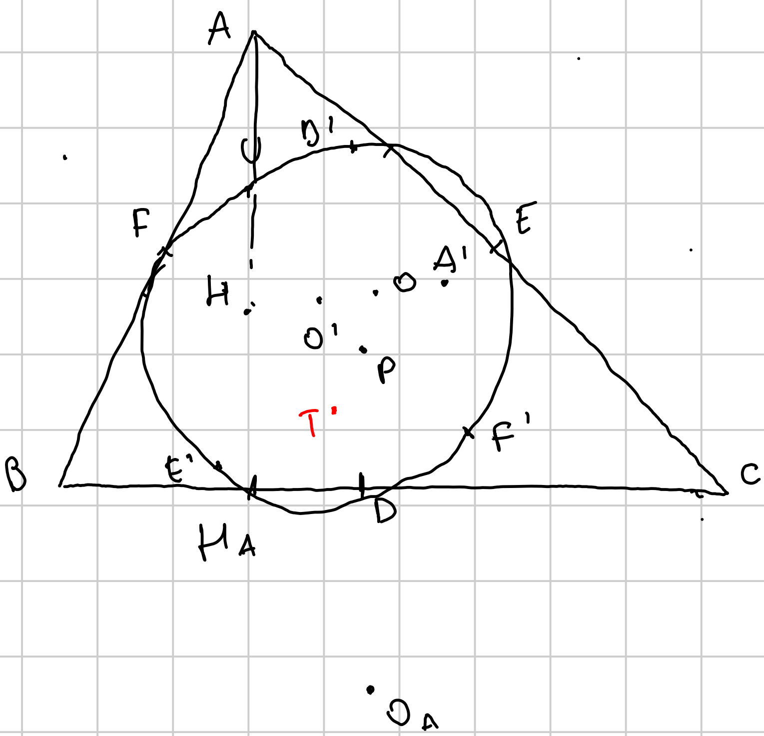
$$\angle APC = \angle F_1PD$$

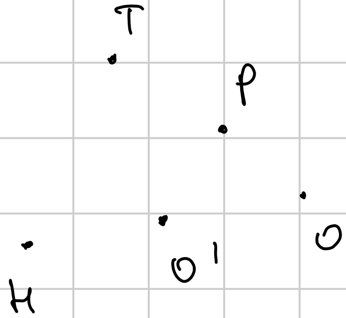
Rotomotetia di APC e F_1PD_1 $\iff$ Similitudine di APF_1 e CPD_1

||

SIMILITUDINE

Problema 4





T = sym di O wrt P.

Step ?

P ∈ asse di O'O

Omotetia di centro O e fattore 2 ci dice che $\boxed{T \in \text{asse di } OH}$

Step 1 BHA'C è ciclico

Omotetia di centro A, fattore 2

F → B D' ⇒ A'

E → C U → H

E, F, D', U ∈ ω ⇒ BHA'C è ciclico

Step 2 Sia O_A il centro di ⊙BHA'C

D è p.to medio di $O_A O$

⊙ABC passa per B, C, sym H wrt BC

⊙BHA'C passa per B, C, H

⊙ABC, ⊙BHA'C sym wrt BC

⇒ D p.to medio di $O_A O$

Step 3 : · T sta sull'asse di HA'

Consideriamo $\triangle O T O_A$

· P pto medio di OT

· D pto medio di OO_A

$\Rightarrow O_A T \parallel DP \parallel DD'$

Consideriamo $\triangle HAA'$

D' è pto medio di AA'

U è pto medio di AH

$\Rightarrow UD' \parallel HA'$

$DD' \perp UD'$ perché UD è diametro di ω

$\Rightarrow O_A T \perp HA'$

O_A sta sull'asse di HA' perché centro di $\odot BCHA'$

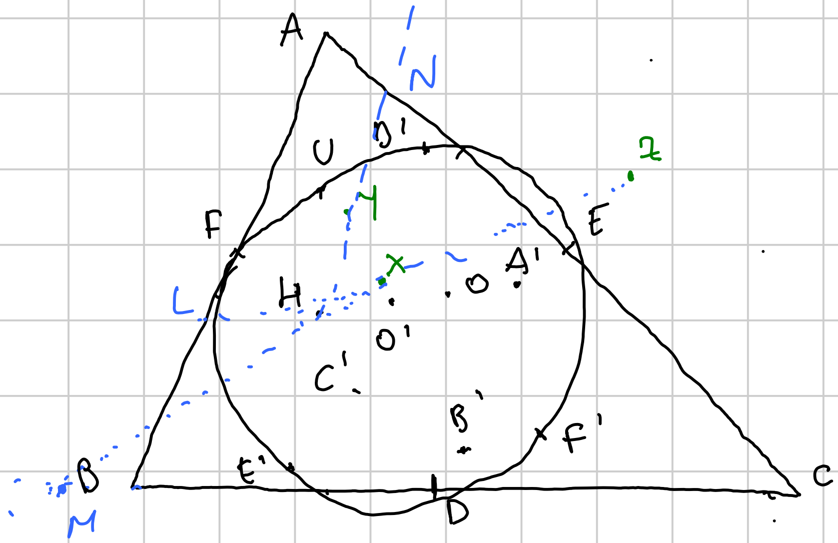
$\Rightarrow T \in$ asse di HA'

T è centro di $\odot A'OH$

$\odot B'OH$

$\odot C'OH$

$\Rightarrow$ tesi



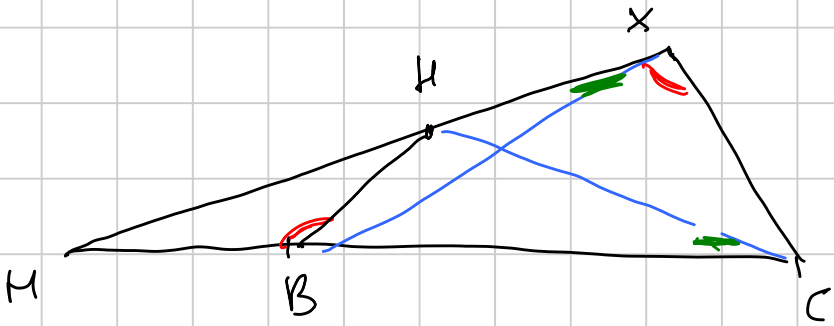
$$\left.\begin{aligned} XB &= A'C \\ XC &= A'B \end{aligned}\right\} \quad (\cancel{*})$$

Consideriamo $\Delta A'BC$, $\Delta D'FE$: sono omotetici

$$\Rightarrow \quad \frac{A'C}{A'B} = \frac{D'E}{D'F}$$

E per $(\cancel{*})$ $$\frac{XB}{XC} = \frac{D'E}{D'F} \qquad (1)$$

Sappiamo che $BHA'C$ ciclico da parte a)
$X \in \odot BHA'C$ perché è il simmetrico di A' wrt O_AO



- $\Delta MBH \sim \Delta MXC \Rightarrow \dfrac{MB}{MX} = \dfrac{HB}{XC}$

- $\Delta MCH \sim \Delta MXB \Rightarrow \dfrac{MX}{MC} = \dfrac{XB}{HC}$

Moltiplicando,

$$\frac{MB}{MC} = \frac{MB}{MX} \cdot \frac{MX}{MC} = \frac{HB}{XC} \cdot \frac{XB}{HC} = \frac{HB}{HC} \cdot \frac{XB}{XC}$$

E per (1) $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{HB}{HC} \cdot \dfrac{D'E}{D'F}$

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AL}{LB} = \left(-\frac{HB}{HC} \cdot \frac{D'E}{D'F}\right)\left(-\frac{HC}{HA} \cdot \frac{E'F}{E'D}\right)\left(-\frac{HA}{HB} \cdot \frac{F'D}{F'E}\right)$$

$$= -\underbrace{\frac{D'E}{D'F} \cdot \frac{E'F}{E'D} \cdot \frac{F'D}{F'E}}_{+1}.$$

Menelao inverso $\Rightarrow$ M, N, L allineati