Prelmo 2019 – TdN – MATTINO

Note Title 20/05/2019

(N1) $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$

$\Omega(n) = a_1 + a_2 + \dots + a_k$

Tesi: esistono 2019 interi positivi consecutivi tra i quali esattamente 1000 hanno la proprietà $\Omega(n) < 11$.

$2^{11} = 2048 > 2019$

Tutti gli interi $1, 2, \dots, 2019$ hanno la proprietà $\Omega(n) < 11$.

Oss. Dato $\ell > 0$ e $t \geq 2$ esistono ℓ interi positivi consecutivi per cui $\Omega(n) \geq t$

Dim. Induzione su t.

Caso $t = 2$ (cioè esistono ℓ interi consecutivi che non sono primi).

Un esempio è: $(\ell+1)! + 2, (\ell+1)! + 3, \dots, (\ell+1)! + (\ell+1)$

Passo induttivo: $t - 1 \Rightarrow t$

$x+1, \dots, x+\ell$ con $\geq t-1$ con $\Omega(n) \geq t-1$

e prendiamo, per esempio,

$(x+\ell)! + (x+1), \dots, (x+\ell)! + (x+\ell)$

Per ogni x considero

$f(x) =$ n° di interi che hanno $\Omega(n) < 11$

fra $x+1, \dots, x+2019$

Ho scoperto:

- $f(0) = 0$
- c'è un certo y per cui $f(y) = 2019$

Spostandomi da x a $x+1$ il valore di $f(x)$ può

variare al massimo di 1
Per arrivare da 0 a 2019 ad un certo punto devo passare per 1000.

(N2) (Sol. "elementare")

$4p^2 = 2u^2 + 2v^2$

p primo u, v interi distinti con $p^2 = \frac{u^2+v^2}{2}$

Tesi: $\exists x \in \mathbb{Z}$ t.c. $2p-u-v = x^2$ oppure $2p-u-v = 2x^2$.

$(*)$ $$(2p-u-v)(2p+u+v) = 4p^2 - u^2 - v^2 - 2uv = u^2+v^2-2uv = (u-v)^2$$

— $u \equiv v \pmod 2$

$(*)/4$ $$\frac{2p-u-v}{2} \cdot \frac{2p+u+v}{2} = \left(\frac{u-v}{2}\right)^2$$

Quindi possiamo scrivere

$(\otimes)$ $$\frac{2p-u-v}{2} = qa^2 \qquad \frac{2p+u+v}{2} = qb^2$$ q squarefree ($q>0$)

Sommiamo:

$$q \mid \frac{2p-u-v}{2} + \frac{2p+u+v}{2} = 2p.$$

Dimostriamo che $p \nmid q$. Altrimenti avremmo ..

$p \mid \frac{u+v}{2}$ Però

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = p^2$$

che contrasta con il fatto $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \geq p^2$.

Quindi $q=1$ oppure $q=2$

$q=1 \Rightarrow 2p-u-v=2a^2$
$q=2 \Rightarrow 2p-u-v=(2a)^2$.

SOLUZIONE CON GLI INTERI DI GAUSS

$$\mathbb{Z}[i]=\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$$

SOMMA E PRODOTTO SONO DATI DA $\mathbb{Z}[i]\subseteq\mathbb{C}$

NEGLI INTERI DI GAUSS ESISTE LA FATTORIZZAZIONE UNICA:

- x È UN'UNITÀ $\Leftrightarrow \exists y$ t.c. $xy=1$
  LE UNITÀ DI $\mathbb{Z}[i]$ SONO $1,-1,i,-i$;

- x È PRIMO SE $x=a\cdot b \rightarrow$ a UNITÀ O b UNITÀ;

- $x=p_1\cdots p_n\cdot u$ CON p_i PRIMI E u UNITÀ (IN UN UNICO MODO A MENO DI UNITÀ u E UNITÀ DENTRO I p_i)

(IN $\mathbb{Z}$ $\quad 9 = 3 \cdot 3, \quad 9 = (-3)\cdot(-3)$)

$$2p^2 = u^2 + v^2 = (u+iv)(u-iv)$$

$$2p^2 = 2 \cdot \underbrace{p \cdot p}$$

$\to$ VOGLIAMO SAPERE LA SCOMPOSIZIONE DI p

$$2 = (1+i)(1-i) = i(1-i)^2$$

$$1+i = i(1-i)$$

$$p \equiv 3 \ (4)$$

$p = q_1 \cdot \ldots \cdot q_n$ CON q_i PRIMI DI $\mathbb{Z}[i]$

$$|a+ib| = a^2+b^2$$

$|\ |$ È MOLTIPLICATIVA

$$|p| = |q_1| \cdot \ldots \cdot |q_n|$$

PRODOTTO DI

$p^2 =$ INTERI POSITIVI

$|q_1| = p^2$ E GLI ALTRI SONO UNITÀ $1 \quad -1 \quad i \quad -i$

$|q_1| = p \quad |q_2| = p$

(A MENO DI PERMUTARE GLI INDICI DEI q_i)

SE $p \equiv 3 \ (4)$

$|q_1| = p \rightarrow a^2 + b^2 = p$ PER CERTI a, b INTERI

MA $a^2 + b^2 \equiv 0, 1, 2 \pmod 4$

PERCHÉ $n^2 \equiv 0, 1 \ (4)$

SE $p \equiv 3 \ (4) \rightarrow p$ È PRIMO IN $\mathbb{Z}[i]$

SE $p \equiv 1 \ (4)$ SAPPIAMO CHE ESISTONO a, b INTERI TALI CHE

$$a^2+b^2=p$$

$$p = (a+ib)(a-ib)$$

$$|p| = |a+ib| \cdot |a-ib|$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$p^2 \qquad\qquad p \cdot p$$

$$a^2+b^2=p$$

$$a+ib = q_1 \cdot \ldots \cdot q_n$$

$\Downarrow$ NORMA

$$a^2+b^2 = |q_1| \cdot \ldots \cdot |q_n|$$

$$\|$$

$$p$$

$\Longrightarrow$ TUTTI I q_i TRANNE 1 HANNO NORMA 1

$\Downarrow$

SONO UNITÀ

SE $p \equiv 3\ (4) \rightarrow p$ È PRIMO

$$p \equiv 1\ (4) \rightarrow p = \underbrace{(a+ib)(a-ib)}_{\text{PRIMI}}$$

E $a^2+b^2=p$

$$2p^2 = u^2+v^2$$

CASO $p \equiv 1\ (4)$

$$2(a+ib)^2(a-ib)^2 = (u+iv)(u-iv)$$

$$\| $$

$$\underbrace{(1+i)(1-i)(a+ib)^2(a-ib)^2}_{\text{SONO PRIMI}}$$

$u+iv$ $\|$ $(1+i)(a+ib)^2$

$u-iv$ $\|$ $(1-i)(a-ib)^2$

OPPURE

$u+iv$ $\|$

$u-iv$ $\|$

$(1+i)(a+ib)^2(a-ib)$ $\qquad$ $(1-i)(a-ib)$

NON È POSSIBILE!

$u-iv=(1-i)(a-ib)$

$\downarrow$ NORMA

$u^2+v^2=2\cdot p$ $\quad$ X

$\parallel$

$2p^2$

$u+iv$ — $\boxed{(1+i)(a+ib)^2}$ $\qquad$ $(1-i)(a+ib)^2$

$(1+i)\cdot(a+ib)(a-ib)$ $\qquad$ $(1-i)(a+ib)\cdot(a-ib)$

$\boxed{(1+i)(a-ib)^2}$ $\qquad$ $\boxed{(1-i)(a-ib)^2}$

CASO $\boxed{}$:

$u+iv=(1+i)(a+ib)^2=$

$=(1+i)(a^2-b^2+i(2ab))=$

$=(a^2-2ab-b^2+i(a^2+2ab-b^2))$

$u = a^2 - 2ab - b^2$

$v = a^2 + 2ab - b^2$

$2p - u - v =$

$2(a^2 + b^2) - (a^2 - 2ab - b^2 + a^2 + 2ab - b^2)$

$= 2a^2 + 2b^2 - 2a^2 + 2b^2 = 4b^2 = x^2$ ✓

È SEMPLICEMENTE IL CONIUGATO DEL CASO

È $i \cdot$

$u + iv = (1+i)(a - ib)(a + ib) =$

$= (1+i)(a^2 + b^2)$

$\rightarrow$ $u = a^2 + b^2 = p$ $\quad v = a^2 + b^2 = p$ $\quad$ $2p - u - v = 0$

N3

$a_n =$ prima cifra di 2^n

$\alpha = 0{,}a_1 a_2 a_3 \dots$ è razionale?

α è razionale $\iff a_{r+s} = a_{r+s+kn}$ $\forall n$ con un certo k

cosa vuol dire che 2^n comincia con a_n?

$$a_n \cdot 10^{\ell} \leq 2^n < (a_n+1)\cdot 10^{\ell}$$

$$\ell + \log_{10} a_n \leq n \cdot \log_{10} 2 < \ell + \log_{10}(a_n+1)$$

$$\iff \{n \log_{10} 2\} \in [\log_{10} a_n, \log_{10} a_n+1)$$

se supponiamo $a_{r+s} = a_{r+s+kn} = c$

$$\{\underbrace{(r+s+kn)\log_{10} 2}_{=\,(r+s)\log 2 + kn\log 2}\} \in [\log_{10} c, \log_{10} c+1)$$

$\{n k \log 2\} \in I$ intervallo di lunghezza $\log_{10} c+1 - \log_{10} c$

lemma: se β è irrazionale, $\{n\beta\}$ sono arbitrariamente vicine a ogni numero $\in [0,1]$

dim: per approssimazione di Dirichlet

$\exists$ infinite coppie (m, n) con $\left|\beta - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}$

$$\underbrace{|n\beta - m|}_{\{n\beta\} \quad 1-\{n\beta\}} < \frac{1}{n}$$

vogliamo approssimare γ

$0 < |n\beta - m| < \frac{1}{n}$ $\quad$ $\exists$ un certo ℓ per cui

$$\ell |n\beta - m| < \gamma < (\ell+1) |n\beta - m|$$

$$\left|\{\ell n \beta\} - \gamma\right| < \frac{1}{n}$$

OSS: $\log_{10} 2$ è irrazionale,

$= \frac{m}{n}$ $\quad$ $10^m = 2^n$ $\times$

$\boxed{N4}$ PER QUALI INTERI POSITIVI n ESISTONO INTERI POSITIVI

$a_1, a_2, \dots, a_n$ $\quad$ TUTTI DISTINTI
$b_1, \dots, b_n$

t.c. $\quad a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = b_1 \cdot \ldots \cdot b_n$$

$n=1$ $\quad a_1 = b_1$ $\quad$ NO

$a_1 = b_1$

$n=2$ $\quad a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = S$

$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2 = P$

(a_1, a_2) E (b_1, b_2) SONO LE RADICI DI

$x^2 - Sx + P$ QUINDI O $a_1 = b_1$ O $a_2 = b_1$

SE ABBIAMO SOLUZIONI PER m ED n: ☆

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ $\quad \sum a_i = \sum b_i$

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ $\quad \prod a_i = \prod b_i$

$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_m$ $\quad \sum \tilde{a}_i = \sum \tilde{b}_i$

$\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_m$ $\quad \prod \tilde{a}_i = \prod \tilde{b}_i$

CREO UNA SOLUZIONE PER $m+n$:

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_m$

$b_1, b_2, \ldots, b_n, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_m$

$$\sum a_i + \sum \tilde{a}_i = \sum b_i + \sum \tilde{b}_i \quad \checkmark$$

$$\prod a_i \prod \tilde{a}_i = \prod b_i \prod \tilde{b}_i \quad \checkmark$$

SAPPIAMO CHE

$a_i \neq b_j$ MA NON SAPPIAMO

$a_i \neq \tilde{a}_j$ $\quad$ $a_i \neq \tilde{b}_j$

SE

$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m$ È SOL. $\Rightarrow$ $\lambda \tilde{a}_1, \lambda \tilde{a}_2, \dots, \lambda \tilde{a}_m$
$\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m$ $\quad$ $\lambda \tilde{b}_1, \lambda \tilde{b}_2, \dots, \lambda \tilde{b}_m$
È SOL.

$$\sum \lambda \tilde{a}_i = \lambda \sum \tilde{a}_i$$

$$\prod \lambda \tilde{a}_i = \lambda^m \prod \tilde{a}_i$$

SCEGLIENDO λ OPPORTUNO (ENORME)

ABBIAMO LA ☆

IDEE: TROVARE SOL. PER $n=3,4,5$

$6 = 3+3 \longrightarrow 9 = 3+6$

$7 = 3+4$ ... E COSÌ VIA

$8 = 3+5$

$n=3$:

$8 + 21 + 24 = 53$ $\quad \Pi = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$

$16 + 9 + 28 = 53$ $\quad \Pi = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$

$n=4$:

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + 1$$

$$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$$

1	2
3	4
6	8
10	12
15	18
21	24
28	32
36	40
45	50
55	60

$12 \cdot 15 = 10 \cdot 18$

$(12+15)+1 = (10+18)$

$21 \cdot 32 = 24 \cdot 28$

$(21+32) = (24+28)+1$

$\Sigma+1$ $\boxed{10 \quad 18}$ $\quad$ $\boxed{24 \quad 28}$ Σ

Σ $\boxed{12 \quad 15}$ $\quad$ $\boxed{21 \quad 32}$ $\Sigma+1$

$\Pi =$ $\quad$ $\Pi =$

$n = 5$

3	5	8	16	21	32	53
2	6	10	18	24	28	52

$\cdot 2$

IL PRODOTTO

È UGUALE

42	64
48	56

$\Pi =$ $\quad$ $\Pi =$

Σ $\boxed{3 \quad 5 \quad 8}$ $\boxed{42 \quad 64}$ $\quad \Sigma \quad \Sigma+2$

$\Sigma+2$ $\boxed{2 \quad 6 \quad 10}$ $\boxed{48 \quad 56}$ $\quad \Sigma \quad \Sigma$

$$A_1 = (2N-2)!!\,(N-1)$$

$$A_i = (2i-3)\left[(2N-2)!! - (2N-3)!!\right]$$

$$2 \leq i \leq N$$

$$B_1 = (2N-3)!!\,(N-1)$$

$$B_i = (2i-2)\left[(2N-2)!! - (2N-3)!!\right]$$

$$2 \leq i \leq N$$

A_1 k $3k$ $5k$ . . . .

B_1 $2k$ $4k$ $6k$ . . .