

Prelmo 2019 - TdN - MATTINO

Note Title

20/05/2019

$$(N1) \quad n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$$
$$\Omega(n) = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

Teor. : esistono 2019 interi positivi consecutivi tra i quali esattamente 1000 hanno la proprietà $\Omega(n) < 11$.

$$2^{11} = 2048 > 2019$$

Tutti gli interi $1, 2, \dots, 2019$ hanno la proprietà $\Omega(n) < 11$.

Oss. Dato $l > 0$ e $t \geq 2$ esistono l interi positivi consecutivi per cui $\Omega(n) \geq t$

Dim. Induzione su t .

Caso $t=2$ (ciò esistono l interi consecutivi che non sono primi).

Un esempio è: $(l+1)!+2, (l+1)!+3, \dots, (l+1)!+(l+1)$

Passo induttivo: $t-1 \Rightarrow t$

$x+1, \dots, x+l$ con $\geq t-1$ con $\Omega(n) \geq t-1$

e prendiamo, per esempio,

$$(x+l)! + (x+1), \dots, (x+l)! + (x+l)$$

Per ogni x considero

$f(x) = n^\circ$ di interi che hanno $\Omega(n) < 11$

fra $x+1, \dots, x+2019$

Ho scoperto:

- $f(0) = 0$
- c'è un certo y per cui $f(y) = 2019$

Spostandoci da x a $x+1$ il valore di $f(x)$ può

variazione di massa di 2

Per arrivare da 0 a 2019 ad un certo punto
devo passare per 1000.

(N2) (Sol. "elementare")

$$4p^2 = 2u^2 + 2v^2$$

p primo u, v interi distinti con $p^2 = \frac{u^2 + v^2}{2}$

Tesi: $\exists x \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } 2p - u - v = x^2$ oppure $2p - u - v = 2x^2$.

$$\begin{aligned} (*) \quad (2p - u - v)(2p + u + v) &= 4p^2 - u^2 - v^2 - 2uv \\ &= u^2 + v^2 - 2uv = (u - v)^2 \end{aligned}$$

— $u \equiv v \pmod{2}$

$$(*)/4 \quad \frac{2p - u - v}{2} \cdot \frac{2p + u + v}{2} = \left(\frac{u - v}{2}\right)^2$$

Quindi possiamo scrivere

$$(*) \quad \frac{2p - u - v}{2} = qa^2 \quad \frac{2p + u + v}{2} = qb^2 \quad q \text{ squarefree} \quad (q > 0)$$

Sommiamo:

$$q \mid \frac{2p - u - v}{2} + \frac{2p + u + v}{2} = 2p.$$

Dimostriamo che $p \nmid q$. Altrimenti avremmo ...

$$p \mid \frac{u + v}{2} \quad \text{Però}$$

$$\left(\frac{u + v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u - v}{2}\right)^2 = p^2$$

che contrasta con il fatto $\left(\frac{u + v}{2}\right)^2 \geq p^2$.

Quindi $q = 1$ oppure $q = 2$

$$q=1 \Rightarrow 2p-u-v=2a^2$$

$$q=2 \Rightarrow 2p-u-v=(2a)^2$$

SOLUZIONE CON GLI INTERI DI GAUSS

$$\mathbb{Z}[i] = \{ a+ib \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$$

SOMMA E PRODOTTO SONO DATI

$$\text{DA } \mathbb{Z}[i] \subseteq \mathbb{C}$$

NEGLI INTERI DI GAUSS ESISTE LA
FATTORIZZAZIONE UNICA:

$$- x \text{ È UN'UNITÀ} \Leftrightarrow \exists y \text{ t.c. } xy=1$$

LE UNITÀ DI $\mathbb{Z}[i]$ SONO $1, -1, i, -i;$

$$- x \text{ È PRIMO SE } x=a \cdot b \rightarrow$$

a UNITÀ O b UNITÀ;

$$- x = p_1 \cdots p_n \cdot u \quad \text{CON } p_i \text{ PRIMI}$$

E u UNITÀ (IN UN UNICO MODO A MENO

DI UNITÀ u E UNITÀ DENTRO I p_i)

$$(iN \not\equiv \quad \wp = 3 \cdot 3, \quad \wp = (-3) \cdot (-3))$$

$$2p^2 = u^2 + v^2 = (u + iv)(u - iv)$$

$$2p^2 = 2 \cdot p \cdot p$$



VOGLIAMO SAPERE LA
SCOMPOSIZIONE DI p

$$2 = (1+i)(1-i) = i(1-i)^2$$

$$1+i = i(1-i)$$

$$p \equiv 3 \pmod{4}$$

$$p = q_1 \cdot \dots \cdot q_n \quad \text{CON } q_i \text{ PRIMI DI } \mathbb{Z}[i]$$

$$|a + ib| = a^2 + b^2$$

) | È Moltiplicativa

$$|p| = |q_1| \cdot \dots \cdot |q_n|$$

PRODOTTO DI
 $p^2 =$ INTERI POSITIVI

$|q_1| = p^2$ E GLI ALTRI
SONO UNITÀ $\begin{matrix} 1 & -1 \\ i & -i \end{matrix}$

$|q_1| = p \quad |q_2| = p$

(A MENO DI PERMUTARE GLI INDICI DEI q_i)

SE $p \equiv 3 \pmod{4}$

$|q_1| = p \rightarrow a^2 + b^2 = p$ PER
CERTI a, b INTERI

MA $a^2 + b^2 \equiv \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \pmod{4}$

PERCHÉ $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$

SE $p \equiv 3 \pmod{4} \rightarrow p$ È PRIMO IN $\mathbb{Z}[i]$

$\exists \epsilon \quad p \equiv 3 \pmod{4} \rightarrow p \text{ È PRIMO}$

$$p \equiv 1 \pmod{4} \rightarrow p = \frac{(a+ib)(a-ib)}{\downarrow}$$

PRIMO

$$\text{È } a^2 + b^2 = p$$

$$2p^2 = u^2 + v^2$$

(ASO $p \equiv 1 \pmod{4}$)

$$2 \frac{(a+ib)^2 (a-ib)^2}{\parallel} = (u+iv)(u-iv)$$

$$\frac{(1+i)(1-i)(a+ib)^2(a-ib)^2}{\parallel}$$

SOMMA PRIMI

$$u+iv$$

\parallel

$$(1+i)(a+ib)^2$$

$$u-iv$$

\parallel

$$(1-i)(a-ib)^2$$

OPPURE

$$u+iv$$

\parallel

$$u-iv$$

\parallel

$$(1+i)(a+ib)^2(a-ib) \quad (1-i)(a-ib)$$

NON È POSSIBILE!

$$u-iv = (1-i)(a-ib)$$

↓ NORMA

$$u^2 + v^2 = 2 - p$$

\parallel
 $2p^2$

X

$u+iv$	$(1+i)(a+ib)^2$	$(1-i)(a+ib)^2$
	$(1+i) \cdot (a+ib)(a-ib)$	$(1-i)(a+ib) \cdot (a-ib)$
	$(1+i)(a-ib)^2$	$(1-i)(a-ib)^2$

Caso :

$$u+iv = (1+i)(a+ib)^2 =$$

$$= (1+i)(a^2 - b^2 + i(2ab)) =$$

$$= (a^2 - 2ab - b^2 + i(a^2 + 2ab - b^2))$$

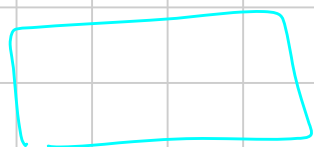
$$u = a^2 - 2ab - b^2$$

$$v = a^2 + 2ab - b^2$$

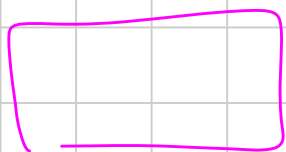
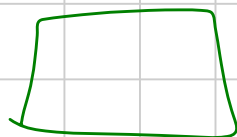
$$2p - u - v =$$

$$2(a^2 + b^2) - (a^2 - 2ab - b^2 + a^2 + 2ab - b^2)$$

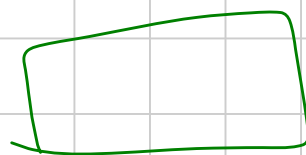
$$= 2a^2 + 2b^2 - 2a^2 + 2b^2 = 4b^2 = x^2 \quad \checkmark$$



È SEMPLICEMENTE IL
CONIUGATO DEL CASO



È $i \cdot$



$$u + iv = (1+i)(a-ib)(a+ib) =$$

$$= (1+i)(a^2 + b^2)$$

$$\rightarrow u = a^2 + b^2 = p \quad v = a^2 + b^2 = p$$

$$\left. \begin{array}{l} 2p \\ -u-v \\ = 0 \end{array} \right\}$$

N3

$a_n =$ prima cifra di 2^n

$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ è razionale?

x è razionale $\iff a_{r+s} = a_{r+s+km} \forall m$ con un certo k

cosa vuol dire che 2^m comincia con a_m ?

$$a_m \cdot 10^l \leq 2^m < (a_m + 1) \cdot 10^l$$

$$l \rightarrow \log_{10} a_m \leq m \cdot \log_{10} 2 < l + \log_{10} (a_m + 1)$$

$$\iff \{m \log_{10} 2\} \in [\log_{10} a_m, \log_{10} (a_m + 1))$$

se supponiamo $a_{r+s} = a_{r+s+km} = c$

$$\{(r+s+km) \log_{10} 2\} \in [\log_{10} c, \log_{10} (c+1))$$

$$\text{"}$$
$$(r+s) \log_{10} 2 + km \log_{10} 2$$

$$\{m k \log_{10} 2\} \in \mathbf{I} \quad \text{intervallo di lunghezza}$$
$$\log_{10} (c+1) - \log_{10} c$$

lemma: se β è irrazionale,
 $\{m\beta\}$ sono arbitrariamente vicine
a ogni numero $\in [0, 1]$

dim: per approssimazione di Dirichlet

\exists infinite coppie (m, n) con $|\beta - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n^2}$

$$|n\beta - m| < \frac{1}{n}$$

$$\{n\beta\} \approx \{m\beta\}$$

vogliamo approssimare γ

$$0 < |n\beta - m| < \frac{1}{n}$$

\exists un certo l per cui

$$l|n\beta - m| < \gamma < (l+1)|n\beta - m|$$

$$|\{l\beta\} - \gamma| < \frac{1}{n}$$

oss: $\log_{10} 2$ è irrazionale,

$$= \frac{m}{n}$$

$$10^m = 2^n \quad \times$$

N4

PER QUALI INTERI POSITIVI n
È SISTONO INTERI POSITIVI

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$b_1, \dots, b_n$$

TUTTI,
DISTINTI,

$$f.c. \quad a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$$

$$a_1 \dots a_n = b_1 \dots b_n$$

$$n=1$$

$$a_1 = b_1$$

NO

$$a_1 = b_1$$

$$n=2$$

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = s$$

$$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2 = p$$

(a_1, a_2) e (b_1, b_2) sono LE RADICI DI

$$x^2 - sx + p$$

$$a \cup b \quad 0 \quad a = b_1 \quad 0 \quad a_2 = b_1$$

SE ABBIAMO SOLUZIONI PER m ED n : ★

$$a_1, a_2, \dots, a_m \quad \sum a_i = \sum b_i$$

$$b_1, b_2, \dots, b_m \quad \prod a_i = \prod b_i$$

$$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m \quad \sum \tilde{a}_i = \sum \tilde{b}_i$$

$$\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m \quad \prod \tilde{a}_i = \prod \tilde{b}_i$$

CREO UNA SOLUZIONE PER $m+n$:

$$a_1, a_2, \dots, a_m, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m$$

$$b_1, b_2, \dots, b_m, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m$$

$$\sum a_i + \sum \tilde{a}_i = \sum b_i + \sum \tilde{b}_i \quad \checkmark$$

$$\prod a_i \prod \tilde{a}_i = \prod b_i \prod \tilde{b}_i \quad \checkmark$$

SAPPIAMO CHE

$a_i \neq b_j$ MA NON SAPPIAMO

$$a_i \neq \tilde{a}_j \quad a_i \neq \tilde{b}_j$$

SE

$$\begin{array}{c} \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m \\ \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m \end{array} \text{ è sol. } \Rightarrow \begin{array}{c} \lambda \tilde{a}_1, \lambda \tilde{a}_2, \dots, \lambda \tilde{a}_m \\ \lambda \tilde{b}_1, \lambda \tilde{b}_2, \dots, \lambda \tilde{b}_m \end{array} \text{ è sol.}$$

$$\sum \lambda \tilde{a}_i = \lambda \sum \tilde{a}_i$$

$$\prod \lambda \tilde{a}_i = \lambda^m \prod \tilde{a}_i$$

SCHEGLIENDO λ OPPORTUNO (È NORME)

ABBIAMO LA \star

HoPE: TROVARE SOL. PER $n=3, 4, 5$

$$6 = 3+3 \rightarrow 9 = 3+6$$

$$7 = 3+4$$

$$8 = 3+5$$

...

È COSÌ VIA

$n=3$:

$$8 + 21 + 24 = 53$$

$$\pi = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$16 + 9 + 28 = 53$$

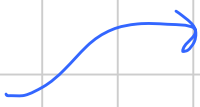
$$\pi = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$n=4$:

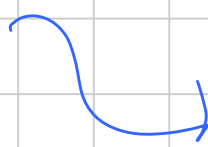
$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + 1$$

$$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$$

1	2
3	4
6	8
10	12
15	18
21	24
28	32
36	40
45	50
55	60



$$12 \cdot 15 = 10 \cdot 18$$
$$(12 + 15) + 1 = (10 + 18)$$



$$21 \cdot 32 = 24 \cdot 28$$
$$(21 + 32) = (24 + 28) + 1$$

$$\sum_{+1} \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\pi =$$

$$\sum \begin{bmatrix} 24 & 28 \\ 21 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{+1} \pi =$$

$$n = 5$$

3	5	8	16	21	32	53	}	-2
2	6	10	18	24	28	52		

IL PRODOTTO
È UGUALE

$$\begin{bmatrix} 42 & 64 \\ 48 & 56 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{+2} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 42 & 64 \\ 48 & 56 \end{bmatrix} \sum_{+2} \sum_{+2}$$

$$A_1 = (2N-2)!! (N-1)$$

$$A_i = (2i-3) \left[(2N-2)!! - (2N-3)!! \right]$$

$$2 \leq i \leq N$$

$$B_1 = (2N-3)!! (N-1)$$

$$B_i = (2i-2) \left[(2N-2)!! - (2N-3)!! \right]$$

$$2 \leq i \leq N$$

$A_n \quad k \quad 3k \quad 5k \quad \dots$

$B_n \quad 2k \quad 4k \quad 6k \quad \dots$