Stage Senior 2006

Titolo nota 10/09/2006

Lezione 1 : Induzione e Pigeonhole (esercizi)

4 Trovare n t.c. $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ con fattori primi ≤ 30 ne esistono due t.c. $a_i \cdot a_j = k^2$

p_k : 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 10 primi

$$a_i = \prod_{k=1}^{10} p_k^{x_{i,k}}$$

$$k^2 = a_i \cdot a_j \iff k^2 = \prod_{k=1}^{10} p_k^{(x_{i,k} + x_{j,k})} \iff x_{i,k} + x_{j,k} \text{ pari } \forall k$$

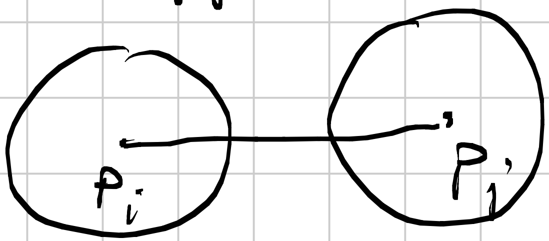
La cosa proibita $\exists\, i, j$ t.c. $x_{i,k} \equiv x_{j,k} \pmod 2$ $\forall k$

Quante sono le configurazioni delle parità $2^{10} = 1024$

il più piccolo n è 1025

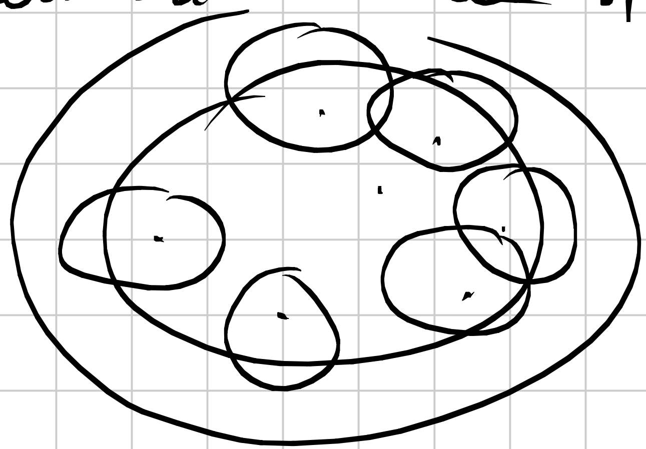
6 Dati 28 punti in una sfera di raggio 2

Se fossero tutti a distanza ≥ 2, costruendo le sfere di raggio 1 con centro nei 28 punti



Le sfere sono a due a due disgiunte

e contenute in una sfera di raggio 3



$\exists$ 28 sfere di volume $\frac{4}{3}\pi$ disgiunte dentro ad una sfera di volume $3^3 \frac{4}{3}\pi = 27 \frac{4}{3}\pi$

$\therefore$ ~~$\therefore$~~

8 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\dots+\frac{n}{4^n}<\frac{1}{2}$$

$$1+a+a^2+\dots+a^{n-1}=\frac{a^n-1}{a-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{4^k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{4^k}$$ vere perché $k\le 2^k \ \forall k\ge 1$ (induzione)

$$\| $$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1}\right)=1-\frac{1}{2^n}$$ male

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{3}{64} + \frac{4}{256} + \dots \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4^k} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{3}{64} +$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \qquad + \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-3}}\right)$$

funziona!

$$k \leq 2^k - 1 .$$

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \qquad 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \dots$

$\forall k \in \mathbb{Z}^+ \quad \exists\, i_1, i_2, \dots i_m \quad m \geq 1 \quad$ t.c.

i. $k = \sum_{j=1}^{m} a_{i_j}$ $\qquad$ ii. $|i_j - i_\ell| > 1 \quad \forall j, \ell$

iii. è unica.

1 ·

2 ·

3 ·

4 $\rightarrow$ 3 + 1

5 ·

6 $\rightarrow$ 5 + 1

7 $\rightarrow$ 5 + 2

8 ·

9 $\rightarrow$ 8 + 1

20 $\rightarrow$ 13 + 5 + 2

$\forall i$ tutti i k t.c.

$a_i \leq k < a_{i+1}$ si scrivono

- $i = 1$ ok 1 si scrive.
- $\forall j \leq i \longrightarrow i+1$

$a_{i+1} \leq k < a_{i+2}$

$k = a_{i+1} \longrightarrow$ OK

$k > a_{i+1}$ $k = a_{i+1} + \Delta$

$1 \leq \Delta < a_{i-1}$ Δ si scrive

con cose minori di a_{i-1}

restano separati