Senior 2006 – Algebra 1 (M.C.)

Titolo nota 12/09/2006

- Numeri complessi
- Polinomi

$$(1+i)^{180} = z^{180}$$

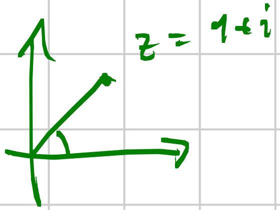
z

$$|z| = \sqrt{2} \qquad |z^{180}| = 2^{90}$$

$$\text{Arg } z = 45^\circ \qquad \text{Arg } z^{180} = 180 \text{ Arg } z = 4 \cdot 45^\circ = 180^\circ$$

$$\frac{180}{20} \equiv 4 \ (8) \qquad z^{180} = -2^{90}$$

Forma cartesiana e Forma polare



Radici dell'unità

$y = \sqrt[3]{x}$ $\qquad$ $y^3 = x$

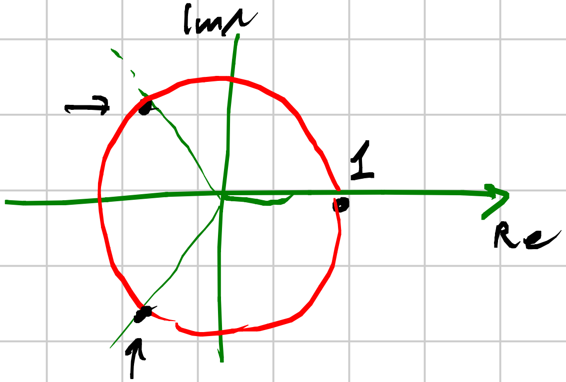
$y = \sqrt[3]{1}$ $\qquad$ $y^3 = 1$ $\qquad$ (3 radici)

Dove sono?

Polare $\qquad |y^3| = |y|^3 = 1 \iff |y| = 1$

$\mathrm{Arg}\, y^3 = 3\,\mathrm{Arg}\, y = 0°$

$\iff \mathrm{Arg}\, y = \begin{cases} 0° \\ 120° \\ 240° \end{cases}$



$|y|=1$

Arg 0 120 240

$1^3=1$

$-\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$y = |y| \left(\cos \overset{\vartheta}{\operatorname{Arg}\, y} + i \sin \overset{\vartheta}{\operatorname{Arg}\, y}\right)$$

$$x^3 = 1$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Polinomi ciclotomici

suddivisione del cerchio

$$x^n - 1 \qquad \mathbb{Q}$$

$$x^{18} - 1 = (x^6 - 1)(x^{12} + x^6 + 1)$$

$$\overset{\Phi}{(x^6+1)^2} - (x^3)^2 = x^{12} + x^6 + 1$$

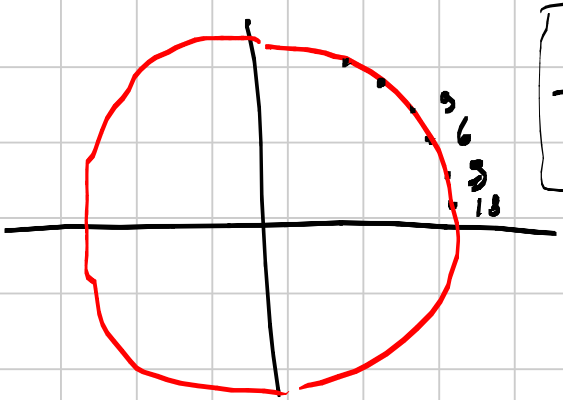
$$\omega = \cos\frac{2\pi}{18} + i \sin\frac{2\pi}{18}$$

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1)(x^{12} + x^6 + 1)$$

$$\overset{1}{(x-1)}\,\overset{3}{(x^2+x+1)}\,\overset{2}{(x+1)}\,\overset{6}{(x^2-x+1)}\,\overset{18}{(x^{12}+x^6+1)}$$

$$x^{18} - 1 = (x^9 - 1)(x^9 + 1) = \overset{9}{(x^6 + x^3 + 1)}\,\underbrace{\overset{18}{(x^6 - x^3 + 1)}}_{\Phi}$$

$p(x) = p_1(x)\, p_2(x) \qquad p,\ p_1,\ p_2 \in \mathbb{Q}[x]$



$$\boxed{\frac{18}{(k,18)}} = 18$$

$(-1)^{18} = 1$

$-1 \in \sqrt[18]{1}$

1 5 7
11 13 17

-1 ha ordine 2

ossia la minima potenza positiva per cui

$(-1)^t = 1$

$\omega^{18} = 1$ il periodo [ordine] è un divisore di 18

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 6_{\varphi(6)} \quad 9_{\varphi(9)} \quad 18 \quad \varphi(18)$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 6 \quad 6$$

$$\left(x^{18}-1\right)$$

6 fattori

2 di grado 6

2 " " 2

2 " " 1

$\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{C}$

Teorema Fondamentale dell'Algebra

Un pol. di grado n a coeff. in $\mathbb{C}$ possiede n radici [in $\mathbb{C}$]

$$x^{18}=0$$

$n \qquad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_n$

$$p(x) = c\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

Un poli a coeff. in $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$

disc. negativo

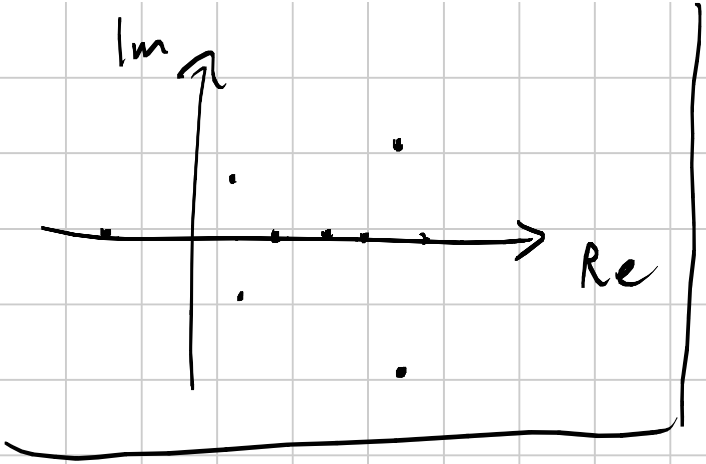
$$p(x) = c\,\underbrace{(x-\alpha_1)}(x-\alpha_2)\,(x^2+\dots)\,(x^2+\dots+)$$

$\cancel{(x-\alpha)(x-\beta)}$ non in $\mathbb{R}$

Fattori di grado 1 "radici reali"

" " 2 disc. neg.

$x^2+bx+c \qquad \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ complessi coniugati



Teorema di Fattorizzzzzione

Ogni polinomio (di $\deg p(x) > 0$) si fattorizza in polinomi irriducibili (su $\mathbb{Q}$, su $\mathbb{C}$, su $\mathbb{R}$) in modo unico

$$p(x) = c \underbrace{p_1(x)}_{\text{irriducibili}} p_2(x) \ldots$$

Due polinomi sono uguali:

- quando i coeff. sono risp. =
- quando hanno la stessa fatt. in polinomi irriducibili $\underline{\underline{e}}$ hanno lo stesso coeff. direttivo.
- quando hanno le stesse radici $\underline{\underline{e}}$ s.c.d.

Due polinomi di grado $\leq n$ sono uguali se coincidono in almeno $n+1$ punti.

$a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n$ distinti

$p(a_i) = q(a_i)$

Dimostrare l'identità:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = 1$$

$\cap$ $\mathbb{R}[x]$ ha deg ≤ 2

$\wedge$ $\mathbb{R}[x]$ deg ≤ 2

__________ o __________

- Massimo Comun Divisore
- Divisioni con resto
- Algoritmo di Euclide
- Identità di Bézout
- Congruenze
- Teorema Cinese del Resto

$100 + n^2$ $\qquad\qquad$ $100 + n^2 + 2n + 1$

$x^2 + 100$ $\qquad\qquad$ $x^2 + 2x + 101$

$\uparrow$ $\qquad\qquad$ $\uparrow$

x^2

$x^2 + 2x + 101$	$x^2 + 100$
$-x^2 \qquad -100$	1
$// \quad 2x + 1$	

$\uparrow$

1

$+ \quad - \quad \cdot \quad :$

Dati due polinomi $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_p \ldots)$

$a(x)$, $b(x)$ $\qquad$ $\deg b(x) \neq 0$

$\exists!\ q(x), r(x)$ $\qquad$ $a, b, q, r \in \mathbb{Q}[x]$

$\deg r(x) < \deg b(x)$

$x^2 + 2x + 101$

$x^2 + 100$

$2x + 1$

$\frac{401}{4}$

0

MCD

1

$x^2 + 100 \quad | \quad 2x + 1$

$-x^2 - \frac{1}{2}x \qquad \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

$// \quad -\frac{1}{2}x + 100$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

$\frac{401}{4}$

$\frac{-\frac{1}{2}x}{2x} = -\frac{1}{4}$

$S'(x)\, a(x) + T'(x)\, b(x) = 1$

$1 \quad (x^2 + 101 + 2x \; , \; 1 \; , \; 0)$

$-1 \quad (x^2 + 100 \; , \; 0 \; , \; 1)$

$2x + 1 \qquad 1 \qquad -1$

$(1 \; , \; S(x) \; , \; T(x))$

Criterio per l'esistenza di radici multiple

un pol. $p(x)$ ha r. m. $\iff$

$$\deg\left(p(x),\ p'(x)\right) > 0$$

$p(x)$ e la sua derivata hanno un fattore comune.

$$\left(a\,x^{k}\right)' \longrightarrow a\,k\,x^{k-1} \qquad k\geq 0$$

$$(a)' \longrightarrow 0$$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$p'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1}(n-1) x^{n-2} + \dots \overset{2a_2 x}{} + a_1 \cdot 1 + 0$$

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Dimostrare che $p_n(x)$ non ha radici multiple.

$$p_n'(x) = p_{n-1}(x)$$

$$(\, p_n(x) \,,\; p_{n-1}(x) \,)$$

$$= (p_n(x), p_n(x) - p_{n-1}(x)) = (p_n(x), x^n)$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow \qquad \uparrow$$

$$\frac{x^n}{n!} \qquad\qquad x^n \qquad 0$$

Teorema di Ruffini (del testo)

$p(x)$ $\qquad$ $(x-a)$

Il resto di $p(x)$ diviso $x-a$

è $p(a)$.

$$p(x) = (x-a)\, q(x) + r$$

$$p(a) = 0 \cdot q(a) + r$$

$$r = p(a)$$

Ita MO 1990

$p(x)$

$p(a) = a$
$p(b) = b$
$p(c) = c$

a, b, c reali distinti

Calcolare il resto della div per

$(x-a)(x-b)(x-c)$

$$p(x) = C \quad)(\quad) \; (\;) \quad q(x) + Ax^2 + Bx + C$$

$$a = \qquad Aa^2 + Ba + C$$

$$q(x) = p(x) - x \qquad p(x) = q(x) + x$$

$$p(x) \equiv x \pmod{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$\left.\begin{array}{l} (x-a) \mid q(x) \\ (x-b) \mid q(x) \\ (x-c) \mid q(x) \end{array}\right\} \Rightarrow (x-a)(x-b)(x-c) \mid q(x)$$

$$q(x) = \underline{(x-a)(x-b)(x-c)} \cdot q'(x)$$

Relazioni radici - coefficienti

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$$

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n$$

$$= a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

x^{n-1}

$$a_{n-1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \cdot a_n$$

$$a_{n-2} = a_n (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_4 + \dots + \alpha_2 \alpha_3 + \dots \alpha_{n-1} \alpha_n)$$

$$\vdots$$

$$a_0 = \pm a_n (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$$

$x^2 - 6x + 1$

$\alpha\beta = 1$

$\alpha + \beta = 6$

$(\alpha+\beta)^2 = 36$

$\shortparallel$

$\alpha^2+\beta^2+2\underbrace{\alpha\beta} = \underbrace{\alpha^2+\beta^2}+2$

$\alpha^n + \beta^n = s_n$

α, β

$\alpha^2+\beta^2$

$\alpha^2+\beta^2 = 36-2 = 34$

$\forall n$ s_n è intero

$5 \nmid s_n$

$n=0$ $\qquad s_0 = 2$ ✓

$n=1$ $\qquad s_1 = \alpha+\beta = 6$

$s_2 = s_1^2 - 2s_0$

$s_3 \qquad \alpha^3+\beta^3$

$\alpha^2+\beta^2 -$

$\alpha+\beta -$

$1+1$

$s_n \cdot s_1 = (\alpha^n+\beta^n)(\alpha+\beta) = \alpha^{n+1}+\beta^{n+1} + \alpha\beta^n + \alpha^n\beta$

$\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$

$= s_3 + s_1$

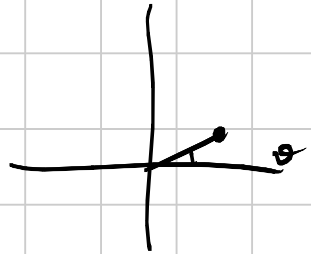
6

$s_3 = s_2 \cdot s_1 - s_1 \qquad s_{n+1} = s_n s_1 - s_{n-1}$

$s_{n+1} = 6 s_n - s_{n-1} \equiv s_n - s_{n-1} \pmod 5$ $\square$

$2 \quad 1 \quad -1 \quad -2 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \quad -2 \quad -1 \quad \ldots$

Formula di De Moivre



$$z = \rho\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)$$

$$z^n = \rho^n\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)^n$$

$$\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z$$

$$z^n = \rho^n\left(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta\right)$$

$$\cos 3\vartheta = \mathrm{Re}\left[(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)^3\right]$$

$$\parallel$$

$$\mathrm{Re}\,(\cos 3\vartheta + i \sin 3\vartheta)$$

$$\mathrm{Re}\left[\cos^3\vartheta + i\,\underbrace{\ldots} + 3\cos\vartheta\, i^2 \sin^2\vartheta + i^3 \ldots\right]$$

$$= \cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta\,\underbrace{\sin^2\vartheta}_{1-\cos^2\vartheta}$$

Notazione Esponenziale

Modo diverso per scrivere i numeri compl. che stanno sulla crf. unitaria

$$\cos\vartheta + i\sin\vartheta \qquad \vartheta \in [0, 2\pi]$$
$$\parallel \qquad\qquad \vartheta \in \mathbb{R}$$
$$e^{i\vartheta}$$

$$\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta = e^{in\vartheta} = \left(e^{i\vartheta}\right)^n$$
$$= (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n$$

z $\qquad |z| = \rho$ $\qquad z \neq 0$ $\qquad \rho$ è unico

ϑ è unico (mod 2π)

$$z = \rho\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

$\rho > 0$

$= e^{t}$ per un certo t

$$= e^{t} \cdot e^{i\vartheta} = e^{t+i\vartheta}$$

$$e^{t+i\vartheta} \cdot e^{t'+i\vartheta'}$$

$$e^{t+t'} = e^{t} \cdot e^{t'} \qquad e^{i(\vartheta+\vartheta')}$$

$$z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1 = 0$$

Risolvere su $\mathbb{C}$

———— o ————

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad a_0 \neq 0$$

Reciproco di $p(x)$

$$\bar{p}(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

α rad. $p(x) \iff \frac{1}{\alpha}$ rad $\bar{p}(x)$

$(t-1)(t+1) \rightsquigarrow t = z^2$

$$t^4 + 4t^3 - 10t^2 + 4t + 1 = 0$$

$(z^2 - 1)$

Regola per le radici razionali

Un $p(x)$ coeff interi ha una rad. $\in \mathbb{Q}$

$\frac{a}{b} \Longrightarrow$ $a \mid$ termine noto

$b \mid$ coeff. direttivo.

$t^3 + 5t^2 - 5t - 1 = 0$ $\qquad p'(1) = 0$

1 è rad. multipla

$t^2 + 6t + 1$ $\qquad -3 \pm \sqrt{8} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

1 doppia

$z^2 = t = -3 + 2\sqrt{2}$, $-3 - 2\sqrt{2}$

$z = -1$
$z = +1$ } doppie

$3 - 2\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^2$

$1^2 + (\sqrt{2})^2$

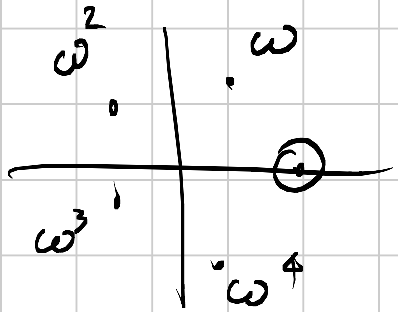
$z = i(1 - \sqrt{2})$
$z = -i(1 - \sqrt{2})$
$z = i(1 + \sqrt{2})$
$z = -i(1 + \sqrt{2})$

$$p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad \Big| \quad x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1 = q(x)$$

ciclotomico !!!

$$(x-1)\cdot p(x) = x^5 - 1$$

1



$$p(x) = (x-\omega)(x-\omega^2)$$

$x-\omega$ $\quad$ $x-\omega^3$

$x-\omega^2$ $\quad$ $x-\omega^4$

$$\Big| \quad q(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad q(\omega) = q(\omega^2) = q(\omega^3) = q(\omega^4) = 0$$

$$q(\omega) = \omega^{44} + \omega^{33} + \omega^{22} + \omega^{11} + 1$$

$$\omega^{4} + \omega^{3} + \omega^{2} + \omega^{1} + 1 = 0$$

$$\omega^{44} = \omega^{40} \cdot \omega^{4} = (\omega^{5})^{8} \cdot \omega^{4} = \omega^{4}$$

$$x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$$

$$x^{11} = t$$

$$t^{4} + t^{3} + t^{2} + t^{1} + 1 \qquad t = \omega, \omega^{2}, \omega^{3}, \omega^{4}$$

Sono radici 55-me di 1

$$q(x)(x^{11} - 1) = x^{55} - 1 \leftarrow \text{55-me}$$

~~tut~~
radici n-me

$q(x)$ ha come radici le radici 55 me di 1, che non sono radici 11 me

$$\sqrt[55]{1} \setminus \sqrt[11]{1}$$

$$p(x) \mid q(x)$$

$$\text{rad } p \subseteq \text{rad } q$$

rad $\quad \sqrt[5]{1} \setminus 1$

$\blacksquare$