Senior 2006 - Algebra 3 (A.F.)

Titolo nota 15/09/2006

1) IDENTITÀ
2) SUCCESSIONI PER RICORRENZA
3) EQ. FUNZIONALI

$a_1, a_2, a_3, \dots$

i) PROGR. ARIT. $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = d$

ii) PROGR. GEOM. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = r$

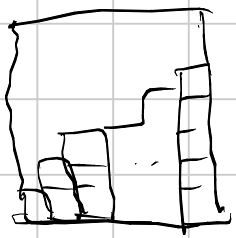
i) $a_i = a_1 + (i-1)d$

ii) $a_i = a_1 r^{i-1}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^{i-1} = a_1 \sum_{i=0}^{n-1} r^i = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1}$$

$$(1 + r + \dots + r^{n-1})(r-1) = r^n - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_1 + (i-1)d) = n a_1 + d \sum_{i=0}^{n-1} i = n a_1 + d\,\frac{n(n-1)}{2}$$



$$\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=0}^{n} i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = p(n)$$ P POLINOMIO DI GRADO $(k+1)$

$$\sum_{i=1}^{1000000} \lfloor \sqrt{i} \rfloor$$

$$\lfloor \sqrt{i} \rfloor = k \qquad k^2 \leq i < (k+1)^2$$

CI SONO $2k+1$ INTERI CHE SODDISFANO

$$1000 + \sum_{k=1}^{999} k(2k+1) = 1000 + 2\sum_{k=1}^{999} k^2 + \sum_{k=1}^{999} k = 1000 + 2 \cdot \frac{1000 \cdot 999 \cdot 1999}{6} + \frac{1000 \cdot 999}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

SOTTOINSIEMI DI $\{1, \dots, n\}$

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} x^i \binom{n}{i}$$

$x = -1$

$$\sum (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

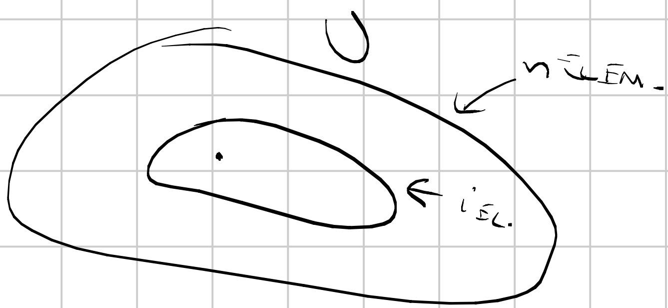
$$n(1+x)^{n-1} = \sum \binom{n}{i} i x^{i-1}$$

$x = 1$

$$\sum i \binom{n}{i} = n 2^{n-1}$$

$\{a\} \cup A$

$A \subset U \setminus \{a\}$



SUCCESSIONI PER RICORRENZA

$F_0 = 0$

$F_1 = 1$

$$\underline{F_{n+2}} = \underline{F_{n+1}} + \underline{F_n} \quad (*)$$

$F_2 = 1$

$x_{n+1} = f(x_n)$

x_0 DATO

$x_{n+1} = x_n + d$

$x_n = a^n$

$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$

$a^{n+2} = a^{n+1} + a^n$

$a^n(\underline{\underline{a^2 - a - 1}}) = 0$

$$x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{SODDISFA} \quad (*)$$

$$\lambda \quad x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$$
$$\mu \quad y_{n+2}=y_{n+1}+y_n$$
$$x_{n+2}+y_{n+2}= \quad --$$

$$\begin{cases} \lambda+\mu=0 \\ \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\mu\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=1 \end{cases}$$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \mu=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$x_0, \dots, x_{k-1}$ DATI

$$x_{n+k}=a_{k-1}x_{n+k-1}+\dots+a_0x_n \quad (**)$$

$$x_{n+3}=3x_{n+2}+x_{n+1}-5x_n$$

b^n È UNA SOL. DI $(**)$

$\Updownarrow$

$b^3 = 3b^2 + b - 5$

b_1, b_2, b_3

$\lambda b_1^n + \mu b_2^n + \eta b_3^n$

$\boxed{\lambda b_1^n + \mu b_2^n} + \eta n b^n$

SE b È UNA RADICE DOPPIA, ALLORA b^n È SOL.

$n b^n$ È SOL.

$(x-1)^2 (x+2) = (x^2 - 2x + 1)(x+2) =$

$= x^3 - 3x + 2$

$\boxed{x_{n+3} = 3x_{n+1} - 2x_n}$

$1^n \quad 2^n \quad n$

$2^{n+3} = 3 \, 2^{n+1} - 2 \, 2^n$

$(n+3) = 3(n+1) - 2n$

$x_n = 1$

$x_n = n$

$x_n = 2^n$

$x_{n+1} = a x_n + b$

$y_n = x_n - k$

$y_{n+1} = x_{n+1} - k = a x_n + b - k = a y_n + \underbrace{ak + b - k}$

$ak + b - k = 0$ $\quad k = \frac{b}{1-a}$ $\quad$ se $a \neq 1$

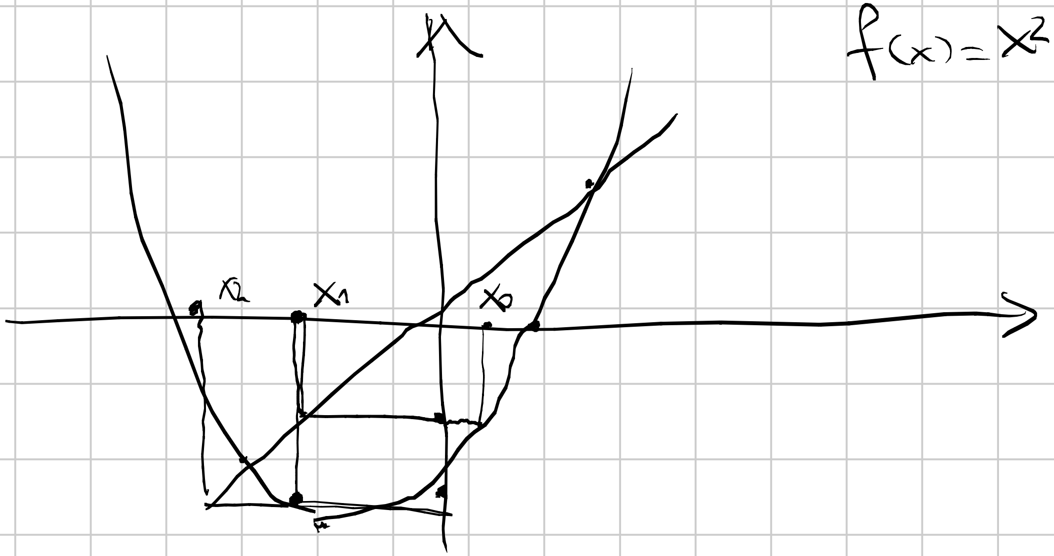
$y_{n+1} = a y_n$ $\quad y_n = a^n y_0$

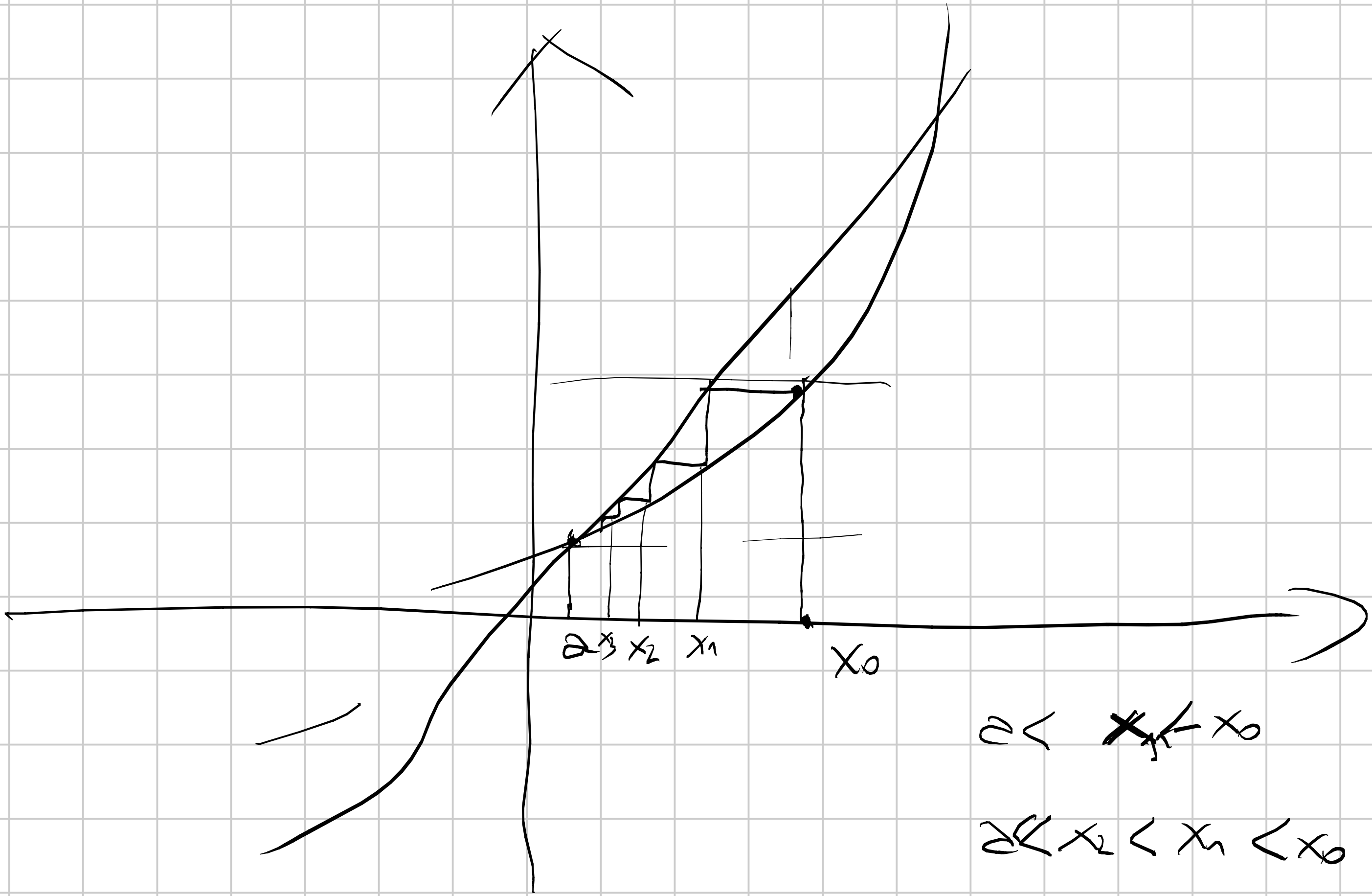
$x_n = a^n y_0 + \frac{b}{1-a} = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n - 3$$

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$





$a < \cancel{x} x_1 < x_0$

$a < x_2 < x_1 < x_0$

UN' AMEBA SI EVOLVE OGNI MINUTO

RIMANE UGUALE	CON PROB.	$1/2$	$1/2$
MUORE		$1/3$	$1/6$
SI SDOPPIA		$1/6$	$1/3$

p = PROB. CHE LA COLONIA MUOIA

$$p = \frac{1}{2} p + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} p^2$$

$$p^2 - 3p + 2 = 0$$

$$p = 1, 2$$

$p = 1$ È SOL.

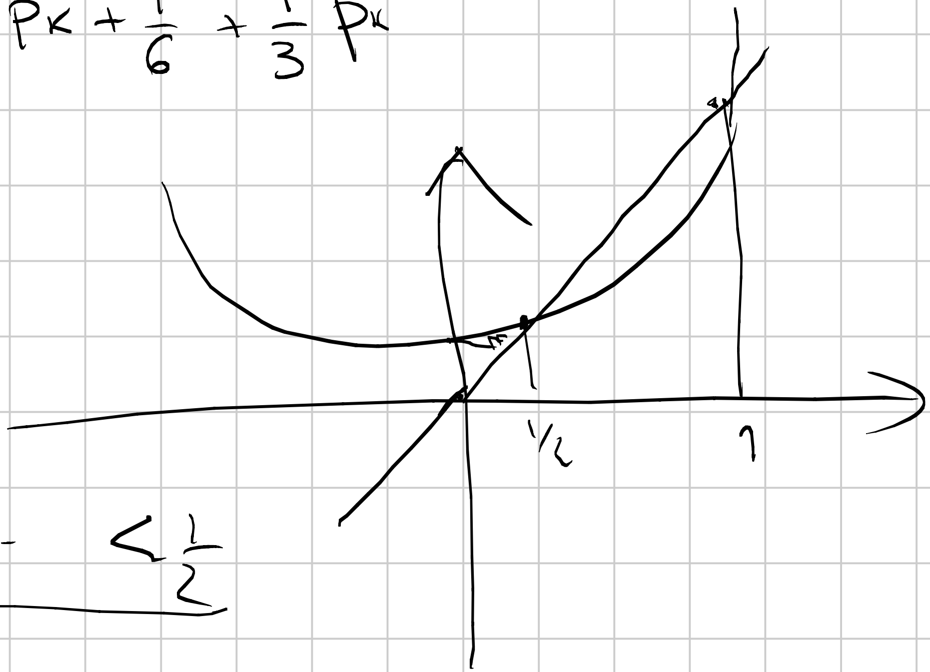
$$p^2 - \frac{3}{2} p + \frac{1}{2} = 0$$

$p = 1, \ 1/2$

P_K = PROB. CHE LA COLONIA MUOIA ENTRO K MINUTI

$$P_{K+1} = \frac{1}{2} P_K + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} P_K^2$$

$P_0 = 0$



PER INDUZIONE

$P_0 < P_1 < P_2 < \dots < \frac{1}{2}$

TROVARE IL MASSIMO X_0 : ESISTE UNA SUCCESSIONE

$$x_0, x_1, \dots, x_{1995}$$

- $x_0 = x_{1995}$
- $2x_i + \frac{1}{x_i} = x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}}$

$$\begin{cases} x_i = \frac{1}{x_{i-1}} \\ x_i = \frac{x_{i-1}}{2} \end{cases}$$

A L'OPERAZIONE

$x \to 1/x$

B $x \longrightarrow \frac{x}{2}$

a = # OPERAZIONI A
b = # OP. B SEGUITE DA UN # DISP. DI A
c = # OP. B " PARI DI A

$a+b+c=1995$

$$X_{1995} = X_0^{(-1)^a} \cdot 2^{b-c} = X_0$$

a PARI $\quad 2^{b-c}=1 \quad b=c$ NO! $a+b+c$ PARI

$$X_0^{-1} \cdot 2^{b-c} = X_0 \qquad \boxed{X_0^2 = 2^{b-c}}$$

$$\underbrace{B\,B \ldots B}_{1994}\,A \qquad b=1994$$

$c=0$

$X_0 = 2^{997}$

EQ. FUNZIONALI

TUTTE LE $f: A \to B$ TALI CHE ...

f

INIETTIVA, SURIETTIVA, BIUNIVOCA

CRESCENTE, DECRESCENTE (MONOTÒNA)

$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

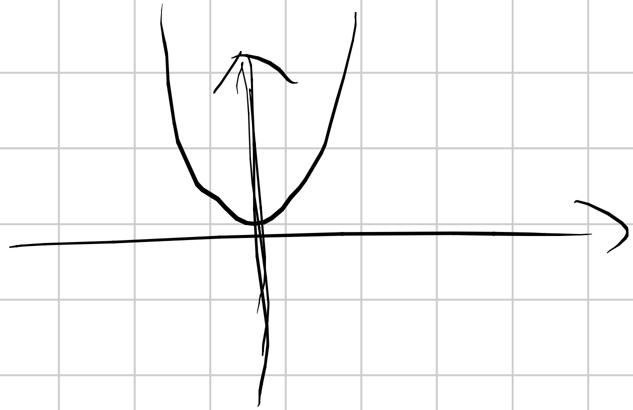
$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

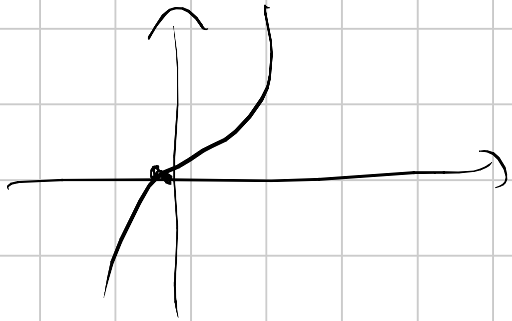
f STRETT. CRESC. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

$\Rightarrow f$ INIETTIVA

PARI $f(x) = f(-x)$ Es. $x^2, x^4, |x|, \cos x$

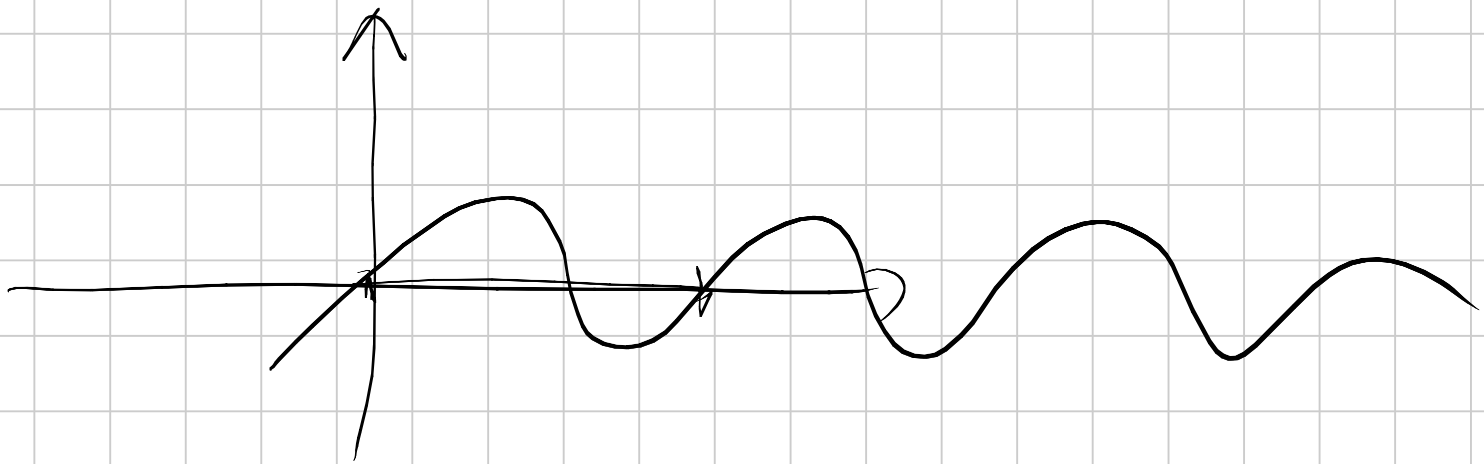
DISP. $-f(x) = f(-x)$ Es. $x, x^3, x^5, \operatorname{sen} x$





f PERIODICA SE $\exists p$ TALE CHE

$f(x+p) = f(x)$ PER OGNI x



DIMOSTRARE CHE NON C'È

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

TALE CHE $\underline{f(f(n)) = n + 1987}$

INIETTIVITÀ

SURIETTIVITÀ

$f \circ g$ INIETTIVA $\Rightarrow$ g INIETTIVA

$\not\Rightarrow$ f INIETTIVA

$f \circ g$ SURIETTIVA $\Rightarrow$ f SURIETTIVA

$\not\Rightarrow$ g SURIETTIVA

f INIETTIVA

f NON È SURIETTIVA

$= A = \mathbb{N} \setminus \{f(n),\ n \in \mathbb{N}\}$

$a \in A$

$f(f(n)) = a$

$a = f(m)$ PER UNICO m

$m \in A$

$$f(f(n)) = f(m)$$

$d = \# A$ $\qquad$ $f \circ f$ NON PRENDE AL PIÙ $2d$ VALORI

$2d \geq 1987$ $\qquad$ $d \geq 994$

$A \subset \underline{\{0, 1, \dots, 1986\}}$

$f(A) = \{f(n), n \in A\} \subset \{\underline{0, 1, \dots, 1986}\}$

$\underline{n \in A}$ $\qquad$ $f(n) \geq 1987$ $\qquad$ $f(n) = 1987 + m = f(f(m))$

$n = f(m)$ $\quad$ NO!

A È DISGIUNTO DA $F(A)$

FISSO $a, b > 0$ DIMOSTRARE CHE ESISTE UN'UNICA

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

RICORRENZE LINEARI
DISUGUAGLIANZE
IMPOSTE DAL (CO)DOMINIO

TALE CHE

$$f(f(x)) = -a f(x) + b(a+b)x \quad (*)$$

FISSO x_0 DEFINISCO $x_{n+1} = f(x_n)$

$x = x_n$

$$x_{n+2} = -a x_{n+1} + b(a+b) x_n$$

$$x^2 + ax - b(a+b)$$

$a, b > 0$

HA RADICI b, $-(a+b)$

$$x_n = \lambda \underline{b^n} + \mu \underline{(-a-b)^n} \geq 0$$

$\Rightarrow \mu = 0$ PER n MOLTO GRANDE $x_n < 0$

È PARI (O DISPARI)

$$x_n = \lambda b^n =$$

$$x_1 = \lambda b$$

$$x_0 = \lambda$$

$$f(x_0) = b x_0$$

$$\boxed{f(x) = bx}$$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ TALI CHE

INDUZIONE

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$x = y$ $\qquad f(2x) = 2f(x)$

$y = 2x$ $\qquad f(3x) = f(x) + f(2x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x)$

PER INDUZIONE $\qquad \underline{f(nx) = n f(x)}$

$f(1) = a$

$f(n) = na$

$y = \frac{1}{n} x$

$$\underline{f(x)} = f(ny) = n f(y) = n \underline{f\left(\frac{1}{n}x\right)}$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n} f(x)}$$

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = m\, f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n} f(x)$$

$$f(-x) + f(x) = f(x-x) = f(0) = 0$$

$x = 0$, $y = 0$ $\qquad f(0) = f(0) + f(0)$

$$f(0) = 0$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$p \in \mathbb{Q}$ $\qquad f(px) = p\, f(x)$

$x = 1 \qquad f(1) = a$

$$f(p) = ap$$

SE f È LIMITATA SU UN INTERVALLO

CIOÉ ESISTE $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

TALE CHE $|f(x)| \leq L$ PER OGNI $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

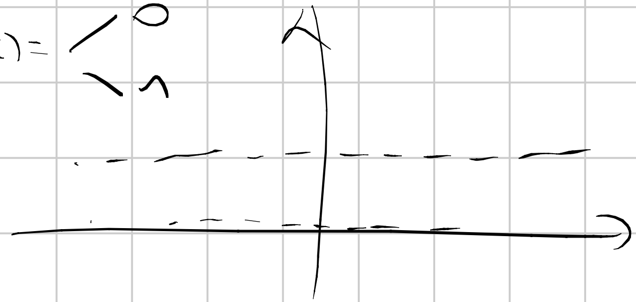
ALLORA $f(x) = ax$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

TALE CHE $(f(x))^2 = f(x)$

PER OGNI FISSATO x $\quad f(x) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



TROVARE TUTTE LE $f: \mathbb{N} \longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{N}}}$ TALI CHE

$$f(n+1) > f(f(n))$$

DISUGUAGL. DATA DAL CODOMINIO

CAMBIO DI VARIABILE

$f(1) > f(f(0)) \geq 0$ $\qquad$ $f(1) \geq 1$

$f(n) \geq 1 \quad \forall \; n \geq 1$

$$g(n) = f(\underline{n+1}) - 1$$

$$g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$g(n+1) > g(g(n))$$

$f(0) \geq 0$

$f(1) = g(0) + 1 \geq 1$

$\underline{\underline{f(n) \geq n}}$

$f(n+1) > f(\underline{f(n)}) \geq f(n)$ f CRESCENTE

$\nexists \quad f(n+1) > f(f(n)) \iff n+1 > f(n) \geq n$

$f(n) = n$

$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

- $f(x + y f(x)) = f(x) f(y)$
- IL NUMERO DI x PERCUI $f(x) = 1$ È FINITO

SIMMETRIA

SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

PERIODICITÀ

$f(\underline{x + y f(x)}) = f(\underline{y + x f(y)})$

SUPPONIAMO f INIETTIVA

ALLORA

$$x + y f(x) = y + x f(y)$$

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{f(y)-1}{y} = c$$

$$\boxed{f(x) = 1 + cx \qquad c > 0}$$

SONO SOLUZIONI

---

f NON INIETTIVA

$$a < b \qquad f(a) = f(b)$$

$$x = a$$

$$f\big(a + y f(a)\big) = f(a) f(y) = f\big(b + y f(a)\big)$$

PER OGNI $y > 0$

$$z = y f(a)$$

$f(z+a) = f(z+b)$ PER OGNI $z>0$

f È PERIODICA DI PERIODO $b-a$

$w = z+a$ $\quad w>a$

$f(w) = f(w+(b-a))$

$x>a$ ~~Sia periodo~~ $\quad y\,f(x)$ SIA UN PERIODO

$y\,f(x) = k(b-a)$

$f(x) = f(x+y\,f(x)) = f(x)f(y)$ $\quad y = \dfrac{k(b-a)}{f(x)}$

$f(y) = 1$ $\quad \dfrac{k(b-a)}{f(x)} > a$

$k > \dfrac{a\,f(x)}{b-a}$