ALGEBRA 1

F. Morandin

Titolo nota 04/09/2007

- Polinomi
- Numeri complessi

$\Big\}$ radici dell'unità

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq\ ?\quad \mathbb{C}$

$\sqrt{-1} =: i$ $\qquad \boxed{i^2 = -1}$

$\mathbb{R} \cup \{i\}$ $\qquad i + i = 2i \qquad 3 + i \qquad (2 - i)(3 + \sqrt{2}\, i)$

$\downarrow$ chiusura rispetto $+ , \cdot$

$i \in \mathbb{C} \quad 2i, \quad \alpha i \in \mathbb{C} \quad z := a + bi \in \mathbb{C} \quad a, b \in \mathbb{R}$

$v = c + di, \quad c, d \in \mathbb{R}$

$z + v = (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i \in \mathbb{C}$

$$z \cdot v = (a+bi)(c+di) = ac + bci + adi + bdi^2$$

$$= ac - bd + (bc+ad)i \in \mathbb{C}$$

$$= \alpha + \beta i$$

Risulta che tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ si possono scrivere nella forma

$z = \boxed{a} + \boxed{b} i$ con $a, b \in \mathbb{R}$

(chiusura anche rispetto $\div$, $\sqrt{}$ ... dopo)

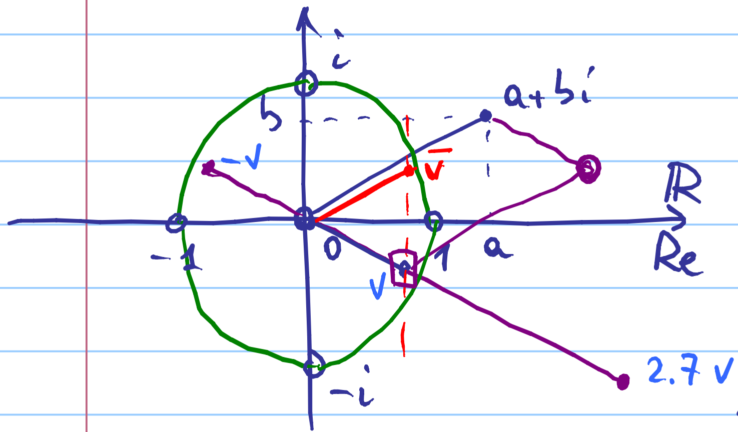
- CONIUGIO $z = a + bi$ $\bar{z} = a - bi$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{z} + \bar{v} = a - bi + c - di = a+c - (b+d)i = \overline{z+v} \\ \bar{z} \cdot \bar{v} = (a-bi)(c-di) = ac - bd - (bc+ad)i = \overline{zv} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{NON BANALE} \\ \text{che siano vere} \end{array}$$

$z = a + bi$ $\qquad a = Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $\qquad b = Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

- Forma cartesiana

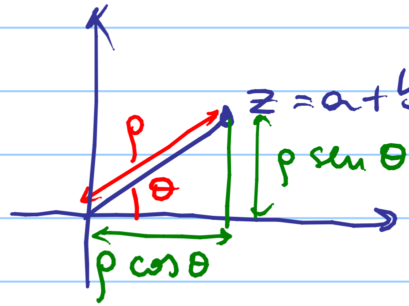
$\mathbb{C} \ni z = a + bi \longleftrightarrow (a,b) \in \mathbb{R}^2$ $\qquad \boxed{\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2}$



- somma? come i vettori $\rightarrow$ regola del parallelog.

- prodotto per reale come i vettori

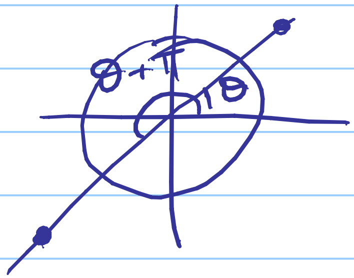
- Forma polare



$z = a + bi = \overbrace{\rho\cos\theta}^{a} + i\overbrace{\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}^{b}$

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{z\bar{z}} \qquad \text{modulo}$$

$$\theta = \operatorname{Arg}(z) = \arctan \frac{b}{a}\underset{\wedge\,+\pi}{\circledast} = \arctan \frac{z-\bar{z}}{(z+\bar{z})i}\underset{\wedge\,+\pi}{\circledast} + 2k\pi \qquad \text{argomento}$$



- **Prodotto tra complessi**

$$z = a + bi = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

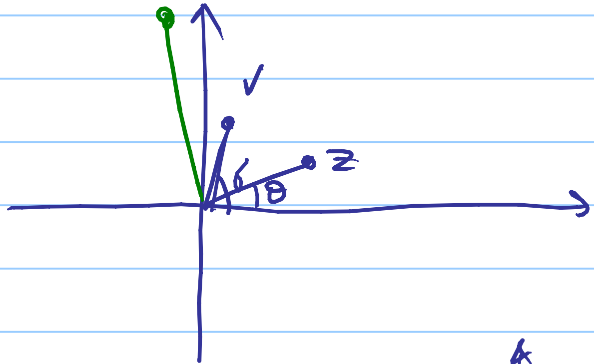
$$v = c + di = \sigma(\cos\delta + i\,\mathrm{sen}\,\delta)$$

$$zv = \boxed{ac - bd + i(ad+bc)} = \rho\sigma\left[\overbrace{\cos\theta\cos\delta - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\delta}^{\cos(\theta+\delta)} + i\left(\overbrace{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\delta + \cos\delta\,\mathrm{sen}\,\theta}^{\mathrm{sen}(\theta+\delta)}\right)\right]$$

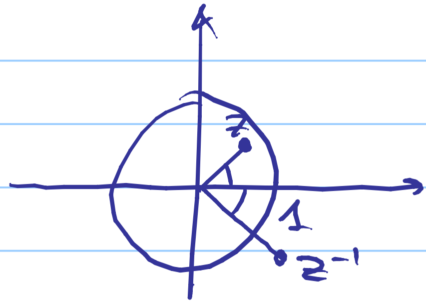
$$= \rho\sigma\left(\cos(\theta+\delta) + i\,\mathrm{sen}(\theta+\delta)\right)$$

$$|zv| = \rho\sigma = |z||v| \qquad\qquad |\bar{z}| = |z|$$

$$\mathrm{Arg}(zv) = \theta+\delta = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(v) \qquad\qquad \mathrm{Arg}\,\bar{z} = -\mathrm{Arg}\,z$$



- Reciproco



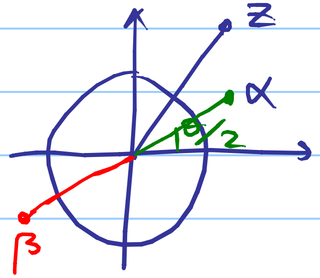
$z \neq 0$

$z \cdot z^{-1} = 1 \qquad |z| \cdot |z^{-1}| = 1 \qquad |z^{-1}| = |z|^{-1}$

$\mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z^{-1}) = 0 \qquad \mathrm{Arg}(z^{-1}) = -\mathrm{Arg}(z)$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \boxed{\frac{a-bi}{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b}\,i$$

- Radice (quadrata)



$$\alpha \cdot \alpha = z \qquad |\alpha| = \sqrt{|z|} \qquad \operatorname{Arg}(\alpha) = \frac{1}{2}\operatorname{Arg}(z)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = z$$

Anche β $\quad |\beta| = \sqrt{|z|}\,, \quad \operatorname{Arg}(\beta) = \pi + \frac{1}{2}\operatorname{Arg}(z)$

$$\Rightarrow \beta^2 = z$$

- Notazione esponenziale : $\mathbb{C} \ni z = a + ib = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \rho e^{i\theta} = e^{\log\rho + i\theta}$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \qquad e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \qquad \boxed{e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots}$$

$$zv = \rho \cdot e^{i\theta} \cdot \sigma \cdot e^{i\delta} = \rho\sigma \cdot e^{i(\theta+\delta)}$$

$$e^z = e^{a+ib} = \boxed{e^a} \cdot e^{i\boxed{b}} \qquad \cancel{z^v}$$

POLINOMI

$\neq 0$ c.d. (= 1, monico)

deg $p(x)$

t.n.

roba tipo: $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

a_i in insieme numerico: $\boxed{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \left(\boxed{\mathbb{Z}_n}\right)$

$\rightsquigarrow \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \dots$

$\to$ si sommano e si moltiplicano $\qquad \mathbb{Z}[x][y] \ni 2 + xy + y^2 - x$

- Prodotti notevoli $(x-1)(x+1) = x^2-1$

$$(x-1)(1+x+\dots+x^n) = x^{n+1}-1$$

- Si dividono! (con resto)

$(x^3-x^2+2) \div (x+2)$ $\qquad$ $(2x-1)$

$$\begin{array}{rrrr|rrr}
1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 2 & \\
\hline
1 & 2 & & & 1 & -3 & 6 \\
0 & -3 & 0 & 2 & & & \\
 & -3 & -6 & & & & \\
 & 0 & 6 & 2 & & & \\
 & & 6 & 12 & & & \\
 & & & -10 & & &
\end{array}$$

$$x^3-x^2+2 = (x+2)(x^2-3x+6)-10$$

$$p(x) \div a(x)$$

$$p(x) = a(x)\boxed{q(x)} + \boxed{r(x)}$$

$\deg r < \deg a$

MCD T.C.R. Bézout

$(p(x), q(x)) = t(x) = a(x)p(x) + b(x)q(x)$ per $a(x), b(x)$

Se $p(x)$, $a(x)$ sono in $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$

allora $q(x)$ e $r(x)$ pure

Se " " " " $\mathbb{Z}[x]$, $q(x)$ e $r(x)$ sono in $\mathbb{Q}[x]$

ma se $a(x)$ è monico, in realtà sono in $\mathbb{Z}[x]$

- Si fattorizzano (in maniera unica).

$x^7-2x^4-2x^3+4 = x^4(x^3-2) - 2(x^3-2) = (x^4-2)(x^3-2)$ $\mathbb{Q}[x]$ $\mathbb{Z}[x]$

$$= (x^2-\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2})(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}\,x+\sqrt[3]{4}) \qquad -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$=(x-\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2})\underline{(x^2+\sqrt{2})}(x-\sqrt[3]{2})\underline{(x^2+\sqrt[3]{2}\,x+\sqrt[3]{4})} \qquad \mathbb{R}[x]$$

$$=(x-\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2})(x-i\sqrt[4]{2})(x+i\sqrt[4]{2})(x-\sqrt[3]{2})(x-\sqrt[3]{2}\,\xi)(x-\sqrt[3]{2}\,\xi^2)$$

$\mathbb{C}[x]$

- Su $\mathbb{C}$ tutti i polinomi di $\mathbb{C}[x]$ si fattorizzano in n pol di grado 1 (thm fond. dell'algebra)

Su $\mathbb{R}$ " " " " $\mathbb{R}[x]$ " " in polin di grado 1 e 2

Tutti i pol di $\mathbb{Z}[x]$ si fattorizzano su $\mathbb{Z}[x]$ come su $\mathbb{Q}[x]$

$$\mathbb{Z}[x]\ni p(x) = \prod_i q_i(x) = \prod_i \frac{\overbrace{m_i q_i(x)}^{z_i(x)}}{m_i} = \frac{1}{\prod m_i}\prod z_i(x) = \frac{1}{N}\,p'(x) \searrow \mathbb{Z}[x]$$

- Radici α (in genere in $\mathbb{C}$) t.c. $p(\alpha) = 0$

se $a \in \mathbb{C}$ $p(x) = (x-a)\,q(x) + \underset{\substack{\uparrow \\ c\, =\, p(a)}}{r(x)}$

$$p(a) = 0 + c$$

$$p(x) = (x-a)\,q(x) + p(a)$$

$p(x) = (x-\alpha)\,q(x) + 0$ se α è radice   [Ruffini]

α è radice $\Longleftrightarrow$ $(x-\alpha) \mid p(x)$ (divide in $\mathbb{C}[x]$)

$\rightarrow$ su $\mathbb{C}$ $p(x)$ ha $\deg p(x)$ radici (contate con molteplic.)

- Se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice, anche $\bar{\alpha}$ è radice.

$$p(\bar{\alpha}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{\alpha}^k = \sum a_k \overline{\alpha^k} = \sum \overline{a_k \alpha^k} = \overline{\sum a_k \alpha^k} = \overline{p(\alpha)} = \bar{0} = 0$$

▷ $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})\, x + \alpha\bar{\alpha} = \underbrace{x^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)\, x + |\alpha|^2}_{\in\, \mathbb{R}[x]}$

$\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \bar{\alpha}$

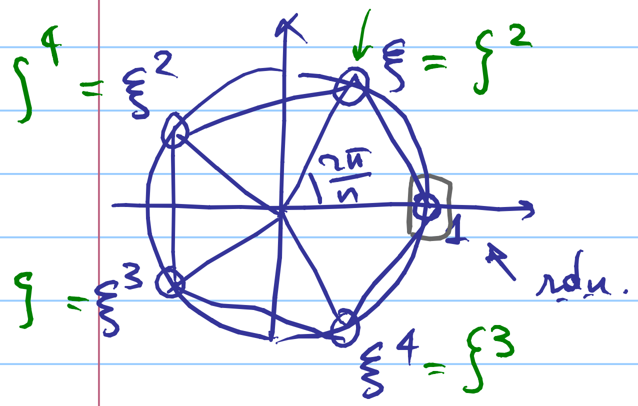
▷ Se $\deg p(x)$ è dispari ha almeno una radice reale $(p(x) \in \mathbb{R}[x])$

▷ Se $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ α radice razionale $\alpha = \frac{p}{q}$

▷ Se due polinomi di grado n coincidono su $n+1$ punti, sono uguali! $p(x)$ $q(x)$ $r(x) = p(x) - q(x) = 0$

RADICI DELL'UNITÀ

$p(x) = x^n - 1$ ha n radici in $\mathbb{C}$



$$\boxed{\xi = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}$$

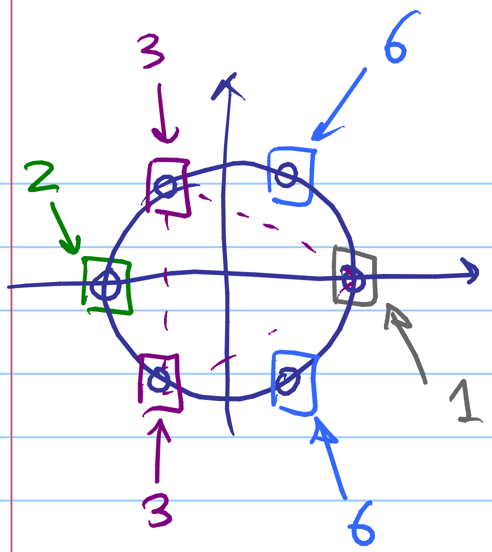
$|\xi| = 1 \qquad \operatorname{Arg}(\xi) = \frac{2\pi}{n}$

$\xi^n = 1$

ξ^k è rdu. $\qquad (\xi^k)^n = (\xi^n)^k = 1^k = 1$

$$\xi^2 = (\xi^3)^2 = \xi^6 = \xi \cdot \xi^5 = \xi$$

Se n non è primo non tutte le rdu hanno lo stesso ordine



L'ordine è sempre un divisore di n

Quelle con ordine n si chiamano r. primitive d. n.

$$x^6 - 1 = \prod_{k=1}^{6} (x - \omega^k) \qquad \omega \text{ radice prim.}$$

$$(x^6 - 1) = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = \boxed{(x-1)}\,\overbrace{\boxed{(x^2 + x + 1)}}^{f_3(x)}\,\overbrace{\boxed{(x+1)}}^{f_2(x)}\,\overbrace{\boxed{(x^2 - x + 1)}}^{f_6(x)}$$

$\mathbb{Q}[x]$
$= \mathbb{Z}[x]$

Il pol. $x^n - 1$ si fattorizza in $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ in tanti fattori quanti sono i divisori d_i di n, ciascuno di grado pari a $\varphi(d_i)$ e irriducibili.

$n=1 \qquad x-1$

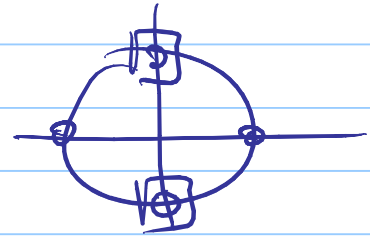
$n=2 \qquad x+1$

$n=3 \qquad x^2+x+1$

$n=4 \qquad x^2+1$

$n=5 \qquad x^4+x^3+x^2+x+1$

$n=6 \qquad x^2-x+1$



$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

Per inciso : $\boxed{\displaystyle\sum_{d\mid n}\varphi(d)=n}$

- Relazioni coeff - radici

Sia $p(x)$ monico (se no $\frac{p(x)}{a_n}$)

$\alpha_i \in \mathbb{C}$ radici $\quad (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)=x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = -(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n) \\[2mm] b_2 = \sum\limits_{i<j} \alpha_i\alpha_j \\[2mm] b_3 = -\sum\limits_{i<j<k} \alpha_i\alpha_j\alpha_k \\[2mm] \dots \\[2mm] b_n = (-1)^n \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n \end{array}\right\}$$

b_i funz. simm. elementari

$n=3$

$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$

<u>thm</u>: tutti i polinomi simmetrici in $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ si possono scrivere come polinomi delle $b_1, \dots, b_n$

<u>Esempio</u>: $a, b, c,$ radici di x^3-4x^2+5x-7

$$-\frac{3}{49} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = \frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{a^2b^2c^2}$$

$$4 = a+b+c$$

$$5 = ab+bc+ac$$

$$7 = abc$$

$$a^2b^2c^2 = (abc)^2 = b_3^2 = 49$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = \circledast = 25 - 2 \cdot 4 \cdot 7 = -3$$

$$(ab + bc + ac)^2 = \circledast + 2(a+b+c)abc$$

---

x, y incogn $\qquad s = x + y \quad p = x \cdot y$

$X^2 - sX + p$ ha radici x, y

esercizi: 6, 7, 8, 9