ALGEBRA 2 : DISUGUAGLIANZE

Titolo nota 05/09/2007

1. RIARRANGIAMENTO
2. CAUCHY - SCHWARZ
3. MEDIE
4. CONVESSITÀ

DISUGUAGLIANZA DI RIARRANGIAMENTO

$a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ n numeri reali

$b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$ "

+ grande con + grande

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

"+ grande con + piccolo"   permutazione di $\{1, \dots, n\}$

3 9 7

+ grande è 3 7 9

+ piccolo è 3 7 9

$3 \le 7 \le 9$ a_i

$1 \le 10 \le 100$

NON STO DICENDO che $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ è L'UNICO MODO DI OTTENERE IL MAX

(c'è il problema degli "=")

Dim. nel caso particolare $\quad a_1 < a_2 < \dots < a_n$

$b_1 < b_2 < \dots < b_n$

1ª OSSERVAZIONE: il massimo ESISTE!
(perché le permutazioni sono un numero finito)

Sia ora σ ~~la~~ UNA permutazione che realizza il max.

Voglio dim. che $\sigma(i) = i \quad \forall\, i = 1, \dots, n$

Questo mi darà l'unicità.

2ª OSSERVAZIONE: se dimostro che σ è crescente, cioè

se $i < j$, allora $\sigma(i) < \sigma(j)$, allora σ è l'identità.

(andrebbe dimostrato per induzione)

3ª Oss. Supponiamo per assurdo che σ non sia crescente, cioè esistono $i < j$ con $\sigma(i) > \sigma(j)$

$$\cancel{a_1 b_{\sigma(1)} + \dots} + a_i b_{\sigma(i)} + \cancel{\dots} + a_j b_{\sigma(j)} + \cancel{\dots + a_n b_{\sigma(n)}} \overset{?}{<}$$

$$\cancel{a_1 b_{\sigma(1)} + \dots} + a_i b_{\sigma(j)} + \cancel{\dots} + a_j b_{\sigma(i)} + \cancel{\dots + a_n b_{\sigma(n)}}$$

Se questa è vera, ho finito perché ho trovato una perm. che mi dà somma > di quella data da σ

$$a_i b_{\sigma(i)} + a_j b_{\sigma(j)} \overset{?}{<} a_i b_{\sigma(j)} + a_j b_{\sigma(i)}$$

$$a_i \left(b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)}\right) + a_j \left(b_{\sigma(j)} - b_{\sigma(i)}\right) \overset{?}{<} 0$$

$$(a_i - a_j)(b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)}) \overset{?}{<} 0$$

OK

$-$ perché $i < j$, quindi $a_i < a_j$

$+$ $\sigma(i) > \sigma(j)$ quindi $b_{\sigma(i)} > b_{\sigma(j)}$

Conclusione: la permutazione che realizza il max è per forza quella crescente, cioè l'identità.

— o — o —

<u>Osservazione</u> $\sigma(i) = i$ realizza sempre il max, ma se ci sono degli $=$ fra gli a_i o i b_i non è l'unica.
Idem per il minimo.

<u>Problema</u>: caratterizzare TUTTE le permutazioni che realizzano il max

Esempio 1 $\quad ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$

$$\{a \quad b \quad c\}$$
$$\{a \quad b \quad c\}$$

Esempio 2 $\quad ab + bc + cd + da \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

$$\sum_{cyc} x_1 x_2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{cyc} x_1^2$$

Esempio 3 $\quad a, b, c$ positivi

$$a^b b^c c^a \leq a^a b^b c^c$$

$$a \quad b \quad c$$
$$\log a \quad \log b \quad \log c$$

Basta prendere i log a dx e sx

$$b \log a + c \log b + a \log c \leq a \log a + b \log b + c \log c$$

Esempio 4 $\quad a_1, \dots, a_n$ positivi

$$\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_1}{a_n} \geq n$$

$$\sum_{cyc} \frac{a_2}{a_1}$$

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \dots & \frac{1}{a_n} \end{array}$$

Non conosco l'ordinamento degli a_i

Non conosco l'ordinamento degli $\frac{1}{a_i}$

Ma in ogni caso l'ordinamento sopra è l'inverso di quello sotto

Se voglio il minimo, devo accoppiare scambiando gli ordinamenti

$$a_1 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2 \cdot \frac{1}{a_2} + \dots + a_n \cdot \frac{1}{a_n} = 1 + \dots + 1 = n$$

DISUGUAGLIANZA DI CHEBYCHEFF

$a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \qquad b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$

come nel riarrangiamento

$$\frac{1}{n}\sum a_i b_{n-i+1} \le \left(\frac{1}{n}\sum a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum b_i\right) \le \frac{1}{n}\sum a_i b_i$$

medie

$$\left(\sum a_i\right)\cdot\left(\sum b_i\right) \le n \sum a_i b_i$$

oppure: se $a_1 \le \dots \le a_n$; $b_1 \ge \dots \ge b_n$, allora

$$\left(\frac{1}{n}\sum a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum b_i\right) \ge \frac{1}{n}\sum a_i b_i$$

Dim. per esercizio $\rightsquigarrow$ induzione

CAUCHY - SCHWARZ

$a_1, \dots, a_n$ reali qualunque
$b_1, \dots, b_n$ " "

$$(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

$\vec{A} = (a_1, \dots, a_n)$ $\vec{B} = (b_1, \dots, b_n)$

$$(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \leq \|\vec{A}\|^2 \cdot \|\vec{B}\|^2$$

prod. scalare

prod. di numeri

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Oss. $x^2 \leq 9 \overset{NO}{\Longleftrightarrow} x \leq 3$ $-3 \leq x \leq 3$

$\Downarrow$ $\quad \overset{SI}{\Longleftrightarrow}$ $|x| \leq 3$

$x \leq 3$

$$-\sqrt{\dots}\cdot\sqrt{\dots} \le a_1b_1+\dots+a_nb_n \le \sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+\dots+b_n^2}$$

VERA

$\boxed{\text{1ª Dimostrazione}}$

$$(a_1+tb_1)^2+\dots+(a_n+tb_n)^2 \ge 0 \quad \text{per ogni valore di } t\in\mathbb{R}$$

$$\parallel$$

$$(b_1^2+\dots+b_n^2)t^2+2(a_1b_1+\dots+a_nb_n)t+(a_1^2+\dots+a_n^2)\ge 0$$

$$at^2+2bt+c\ge 0 \qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

Quindi $\Delta\le 0 \rightarrow b^2-ac\le 0$, $b^2\le ac$

C.S.

$a>0 \leftarrow$ ovvio

$\boxed{1.5^a \text{ Dim}}$

$$\|\vec{A} + t\vec{B}\|^2 = (\vec{A} + t\vec{B}) \cdot (\vec{A} + t\vec{B})$$

$$= \vec{A} \cdot \vec{A} + t^2 \vec{B} \cdot \vec{B} + 2t \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$= \|A\|^2 + t^2 \|B\|^2 + 2 \vec{A} \cdot \vec{B}\, t$$

$$\Delta \leq 0 \iff |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 - \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \leq 0$$

— o — o —

$\boxed{2^a \text{ Dimostrazione}}$ Induzione

Supponiamo vero per n $\rightarrow$ dim. per $n+1$

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} \leq \underbrace{\boxed{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}}_{A} \underbrace{\boxed{\sqrt{b_1^2 + \dots + b_n}}}_{B} + a_{n+1} b_{n+1}$$

Hope

$$\leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2 + b_{n+1}^2}$$

$$AB + a_{n+1} b_{n+1} \leq \sqrt{A^2 + a_{n+1}^2} \sqrt{B^2 + b_{n+1}^2}$$

Hope ← C.S. a $2 = n$

Basta dim. il caso 2 che non è difficile a mano ...

$\boxed{\text{3ª dimostrazione}}$ SOS Sum Of Squares

(1)
$$\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right) - \left(\sum a_i b_i\right)^2 \overset{?}{\geq} 0$$

$$\|$$

(2)
$$\sum_{i<j} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

(1)
$$\cancel{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2} + \sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 - \cancel{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2} - 2\sum_{i<j} a_i b_i a_j b_j$$

(2)
$$\sum_{i<j} a_i^2 b_j^2 + \sum_{i<j} a_j^2 b_i^2 - 2\sum_{i<j} a_i b_j a_j b_i$$

4^a DIMOSTRAZIONE OMOGENIZZARE

La disug. è omogenea rispetto agli a_i, cioè se al LHS e al RHS cambio a_i con λa_i, si moltiplicano LHS e RHS per $\lambda^{\boxed{2}}$ ← grado 2

Idem rispetto ai b_i.

Vantaggio: posso moltiplicare gli a_i ed i b_i per quello che mi pare

Quindi: posso assumere proprietà particolari, tipo che

$$a_1 + \ldots + a_n = 1, 35, \ldots$$

$$b_1 \cdot \ldots \cdot b_n = 97$$

Nel nostro caso assumiamo che $\sum a_i^2 = 1$, $\sum b_i^2 = 1$

e C.S. diventa

$$\sum a_i b_i \leq 1$$

$2ab \leq a^2 + b^2$

$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

$$\sum a_i b_i \leq \sum \frac{1}{2}(a_i^2 + b_i^2)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sum a_i^2}_{1} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum b_i^3}_{1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

TO DO → capire il caso di uguaglianza

→ eventuali generalizzazioni

Uguaglianza secondo 1ª dim.

$=$ in C.S. $\iff$ $\Delta = 0$ $\iff$ $\exists$ valore di t per cui polinomio di 2° grado si annulla

$\Updownarrow$

$$a_i + t b_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$a_i = -t b_i$$

$\Updownarrow$

gli a_i sono multipli dei b_i

$\Updownarrow$

il vettore $\vec{A}$ è multiplo del vettore $\vec{B}$.

Altro caso: se gli a_i (o i b_i) sono tutti nulli

C.S. a 3 specie

$$\left|\sum a_i b_i c_i\right| \leq \sqrt[3]{\sum |a_i|^3}\ \sqrt[3]{\sum |b_i|^3}\ \sqrt[3]{\sum |c_i|^3}$$

Dim. per omog. le radici siano 1 $\quad a_i, b_i, c_i \geq 0$

$$a_i b_i c_i \leq \frac{1}{3}\left(a_i^3 + b_i^3 + c_i^3\right)$$

GM - CM
oppure
AM - GM

C.S. a 2 con esponenti diversi

$$\left|\sum a_i b_i\right| \leq \sqrt[p]{|a_1|^p + \dots + |a_n|^p} \cdot \sqrt[q]{|b_1|^q + \dots + |b_n|^q}$$

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$$

Dim.: omogenizziamo (radici = 1)

$$\boxed{ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q}$$

DISUG. DI YOUNG.

—— o —— o ——

Esempio 1 $\quad ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$

$$\underset{a_1}{a} \cdot \underset{b_1}{b} + \underset{a_2}{b} \cdot \underset{b_2}{c} + \underset{a_3}{c} \cdot \underset{b_3}{a} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + a^2}$$

Esempio 2 $\quad \sum x_i = 1, \quad \sum y_i = 1 \qquad x_i, y_i > 0$

Allora

$$\sum \frac{x_i^2}{x_i + y_i} \geq \frac{1}{2}$$

$$1 = \sum x_i = \sum \frac{x_i}{\sqrt{x_i+y_i}} \cdot \sqrt{x_i+y_i} \underset{\text{C.S.}}{\leq} \left(\sum \frac{x_i^2}{x_i+y_i}\right)^{1/2} \Big(\underbrace{\sum x_i+y_i}_{2}\Big)^{1/2}$$

$$1 \leq \left(\sum \frac{x_i^2}{x_i+y_i}\right)^{1/2} \cdot \sqrt{2}$$

Faccio i quadrati e viene

—o —o —

Esempio 3

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

$$a \cdot ab + b \cdot bc + c \cdot ca \leq$$

Uguaglianza $\Leftrightarrow$
- ↗ una delle 2 specie è nulla
- ↘ una delle 2 specie è multipla dell'altra

$$\begin{cases} ab = 0 \\ bc = 0 \\ ca = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{almeno 2 variabili nulle}$$

$\boxed{3° \text{ caso}}$

$$\begin{aligned} ab &= \lambda a \\ bc &= \lambda b \\ ca &= \lambda c \end{aligned} \rightsquigarrow$$

o $\lambda = 0$ e ritorniamo al caso prec.
oppure $a = b = c$.
(produce vera uguaglianza solo se ≥ 0)

$$\boxed{\text{MEDIE}}$$

$a_1, \dots, a_n$ $\boxed{\text{POSITIVI}}$

$$G(a_1, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \qquad \boxed{\text{"}p = 0\text{"}}$$

$$A(\quad) = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \qquad \boxed{p = 1}$$

$$Q(\quad) = \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \qquad \boxed{p = 2}$$

$$H(\quad) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \qquad \boxed{p = -1}$$

$$M_p(a_1, \dots, a_n) = \sqrt[p]{\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n}} \qquad p \neq 0$$

DISUG. MEDIE

$$\min\{a_1,\dots,a_n\} \leq HM \leq GM \leq AM \leq QM \leq \max\{a_1,\dots,a_n\}$$

"$p=-\infty$" $\quad$ $p=-1$ $\quad$ "$p=0$" $\quad$ $p=1$ $\quad$ $p=2$ $\quad$ "$p=+\infty$"

+ in generale $\quad M_p$ è una funzione strett. crescente di p ?

- Strett. crescente se non sono tutti uguali

Detto diversamente: vale un qualunque segno di $=$

$\Updownarrow$

valgono tutti i segni di $=$

$\Updownarrow$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

Oss. AM – QM

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

$$a_1 + \dots + a_n \le \sqrt{n}\ \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

$$1 \cdot a_1 + \dots + 1 \cdot a_n \le \sqrt{1 + \dots + 1} \cdot \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

Vale senza ipotesi di positività e anche con $|\cdot|$ al LHS.

Oss. HM ≤ GM segue da AM – GM dopo aver elevato alla (-1)

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \underset{\text{AM-GM}}{\ge} \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}$$

$\boxed{\text{AM-GM}}$

$\boxed{\text{Dimostrazione 1}}$ $\qquad G = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$

$$x_1 = \frac{a_1}{G} \qquad x_2 = \frac{a_1 a_2}{G^2} \qquad x_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{G^3} \qquad \ldots$$

$$x_n = \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}{G^n} = 1$$

$$\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \ldots + \frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_1}{a_n} \geq n$$

Uso questa con gli x_i

$$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n} \geq n$$

$$\frac{a_2}{G} + \frac{a_3}{G} + \ldots + \frac{a_n}{G} + \frac{a_1}{G} \geq n \Rightarrow \frac{\sum a_i}{n} \geq G$$

$\boxed{\text{Dimostrazione 2}}$ Induzione up and down

P_1 vera

P_n vera $\Rightarrow$ P_{2n} vera [ok per P_{2^k} vera]

P_n vera $\Rightarrow$ P_{n-1} vera

$$\sqrt[2n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}} \overset{?}{\leq} \frac{a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{2n}$$

$$\text{RHS} = \frac{\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n}}{2} \geq \sqrt{\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n}}$$

AM-GM a 2 (che si fa a mano ...)

$$\geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}} = G(a_1, \ldots, a_{2n})$$

$P_n \Rightarrow P_{n-1}$

$$\sqrt[n-1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}} \overset{?}{\leq} \boxed{\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}}$$

$\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \overset{\shortparallel}{} a_n$

Intento un n-esimo termine uguale a

Per Hp induttiva $\quad G(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \leq A(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$

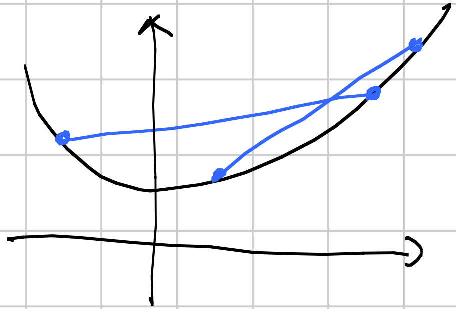
$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}} \leq \boxed{\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}} \cdot \sqrt[n]{\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$$

$$\left[G(a_1,\dots,a_{n-1})\right]^{\boxed{\cancel{\frac{n-1}{n}}}} \quad \cancel{\left[A(a_1,\dots,a_{n-1})\right]^{\frac{1}{n}}} \leq \left[A(a_1,\dots,a_{n-1})\right]^{\boxed{\cancel{1-\frac{1}{n}}}}$$

— o — o —

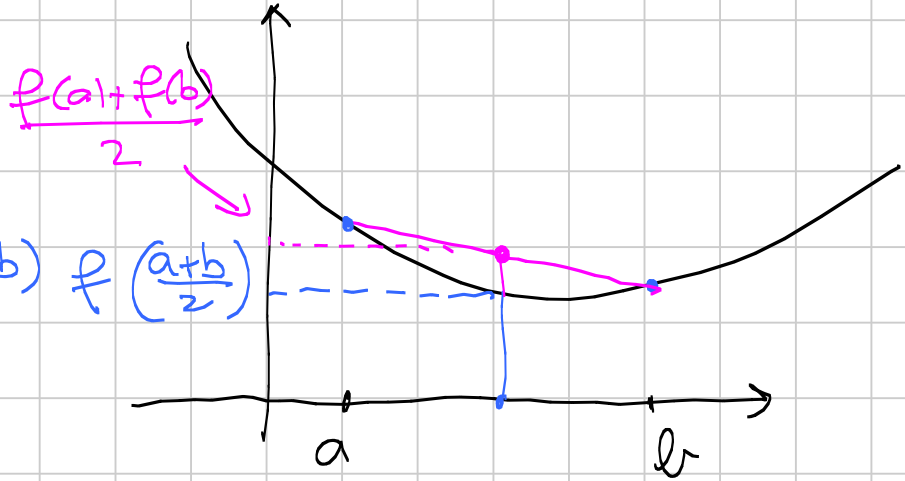
$\boxed{\text{CONVESSITÀ}}$



Più formalmente

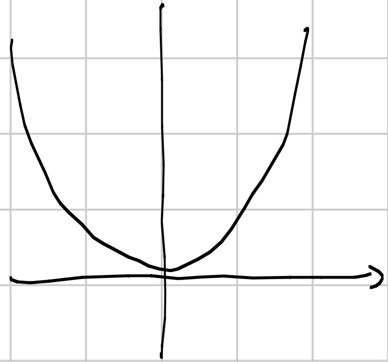
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$



$\forall \lambda \in [0,1]$

Esempio 1 $f(x) = x^2$ è convessa



$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$$

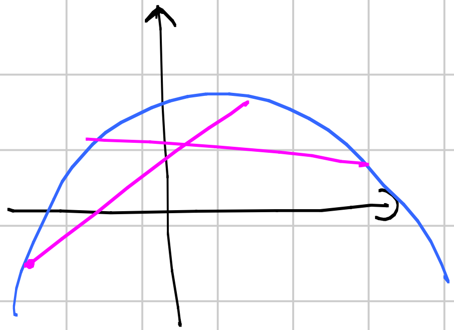
$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Esempio 2 $f(x) = \frac{1}{x}$ è convessa per $x > 0$

$$\frac{2}{a+b} \le \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$$

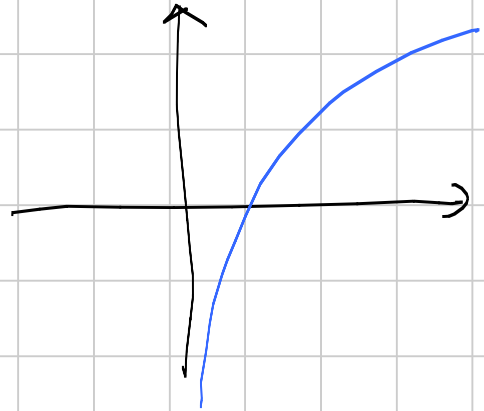
AM - HM

Concava = convessa con segno girato



$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

<u>Esempio 3</u> $f(x) = \log x$ è concava per $x>0$



$$\log\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\log(a)+\log(b)}{2}$$

$$\cancel{\log}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \cancel{\log}(ab)$$

$$\log(\lambda a + (1-\lambda) b) \geq \lambda \log a + (1-\lambda)\log b$$

$$\underset{\lambda}{\frac{1}{p}} + \underset{1-\lambda}{\frac{1}{q}} = 1$$

$$\log\left(\frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b\right) \geq \frac{1}{p}\log a + \frac{1}{q}\log b$$

$a = A^p$

$b = B^q$

$$\cancel{\log}\left(\frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q\right) \geq \frac{1}{\cancel{p}}\log A^{\cancel{p}} + \frac{1}{\cancel{q}}\log B^{\cancel{q}}$$

YOUNG

$$= \cancel{\log}(AB)$$

Disug. convessità con n variabili

$$f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + \dots + f(a_n)}{n}$$

Esercizi 3, 5, 8, 10