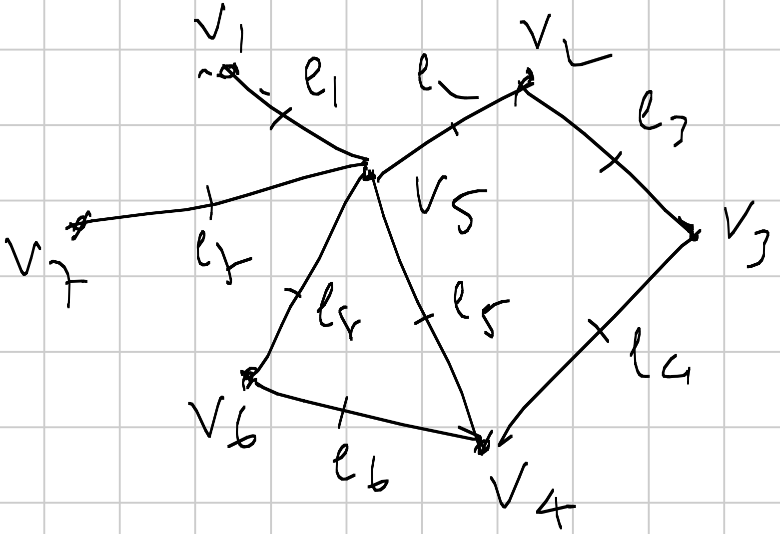
G



7 vertici $\quad v = v(G)$

8 archi $\quad e = e(G)$

$$d(v_4) = 3$$

$$\delta(G) = \min d(v_i)$$

$$\Delta(G) = \max d(v_i)$$

$$\sum_{i=1}^{v} d(v_i) = 2e$$

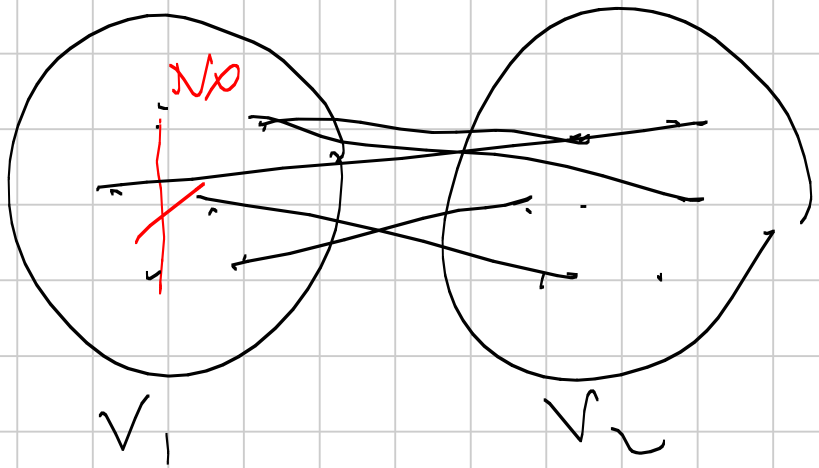
Il n° di vertici di grado dispari è pari.

Grafi bipartiti – Alberi

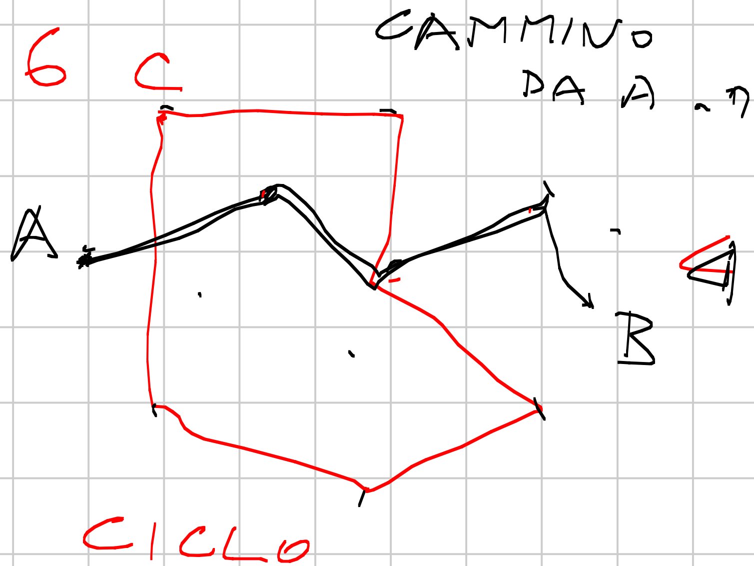
Bipartito

$V = V_1 \cup V_2$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$



NON HA CICLI DI LUNGHEZZA DISPARI

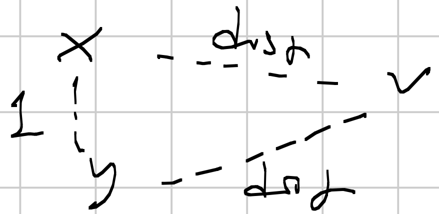


G non ha cicli di lunghezza dispari $\overset{?}{\Longrightarrow}$ G è bipartito

$v \in V$ (connesso) $\quad \forall x \in V \quad d(v,x)$ = minima lunghezza di cammino che unisce v e x

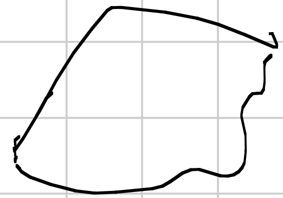
$V_1 = \{ x \mid d(v, x) \text{ dispari} \}$ $\qquad V_2 = V - V_1$

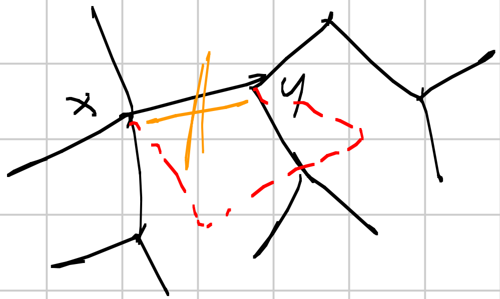
$x, y \in V_1$



Alberi

CONNESSI E SENZA CICLI





c'è al più un cammino fra due vertici

$G - xy$

- connesso minimale
- aciclico massimale

Relazione fra n = n° dei vertici ed e : $\qquad e = n - 1$

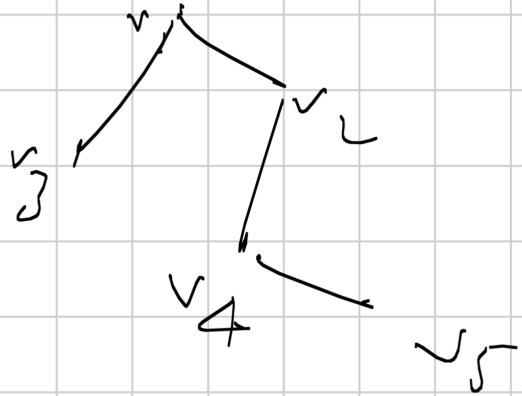
Numerazione dei vertici : $\qquad v = v_1$

V_2 collegato a v_1

v_3 collegato o a v_1 o a v_2

$\vdots$

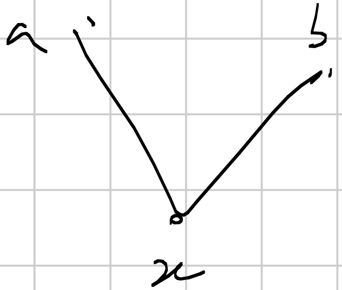
v_n



Grafo connesso

$$\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y} d(x,y)$$

$$\operatorname{rad}(G) = \min_{x \in G} \max_{y \in G} d(x,y)$$



$$\operatorname{rad}(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2 \operatorname{rad}(G)$$

Es. $\operatorname{rad}(G) \leq k \qquad \max_{v \in V} d(v) \leq d$

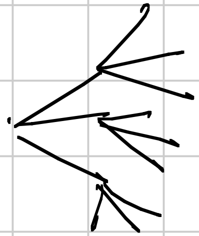
v_0

Quanti vertici al più? $\quad 1$

$V = \bigcup_{i=0}^{k} V_i$ — punti a distanza i da v_0

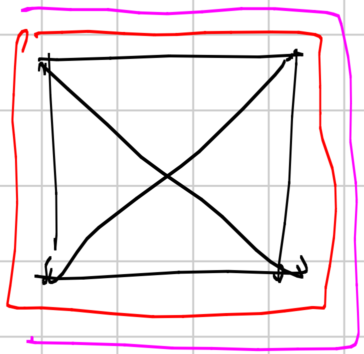
v_0 $\quad v_1$ $\quad v_2$ $\quad v_3$ $\quad \ldots \quad v_k$

1 $\quad d-1$ $\quad d(d-1)$ $\quad d(d-1)^2$ $\quad \ldots \quad d^k \quad \to 1+$



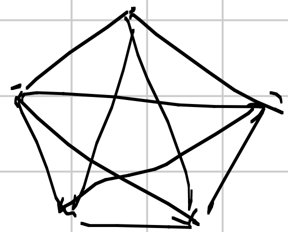
Ciclo hamiltoniano = ciclo contenente tutti i vertici del grafo

cammino $\quad n \quad$ = cammino ...



K^n = grafo completo su n vertici

$n=5$



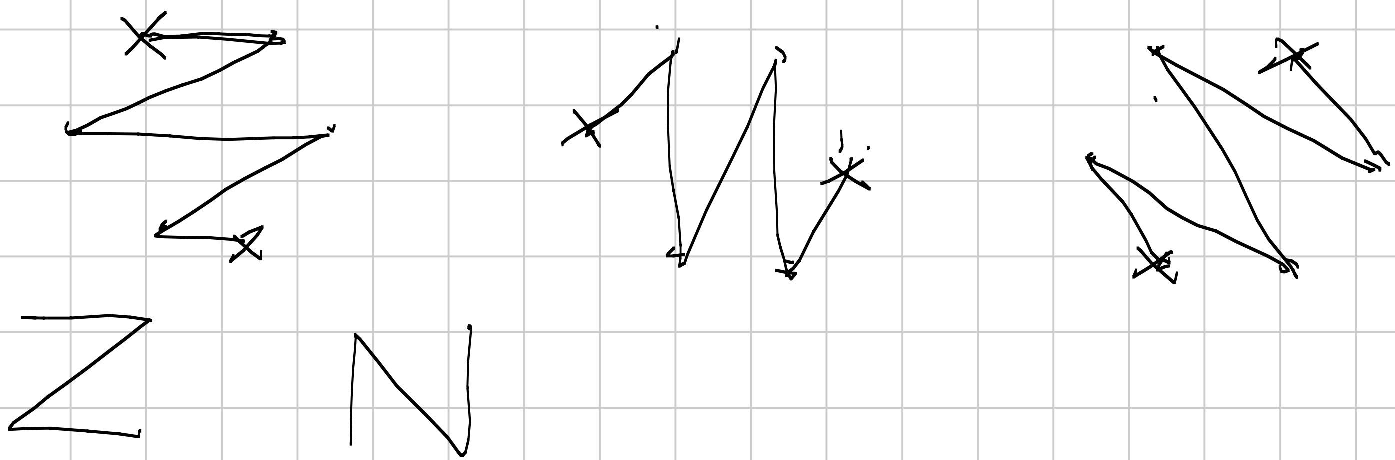
n° archi $= \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ $\quad K^n$

ciclo h. $\to n$ $\quad$ n° archi $\frac{n-1}{2}$ $\quad$ n dispari

cammino h. $\to n-1$ $\quad$ n° cam $\frac{n}{2}$ $\quad$ n pari

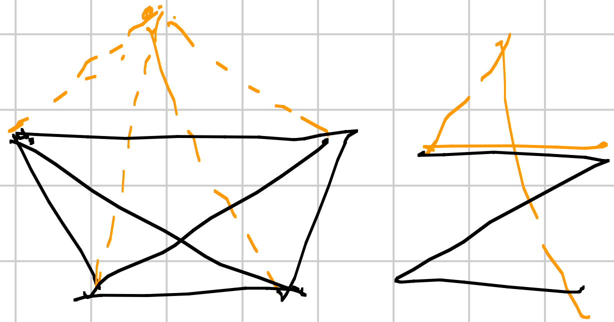
<u>TEO</u>. Si può fare se e solo se n dispari (CICLI), n <u>pari</u> (CAMMINI).

Es. $n=6$

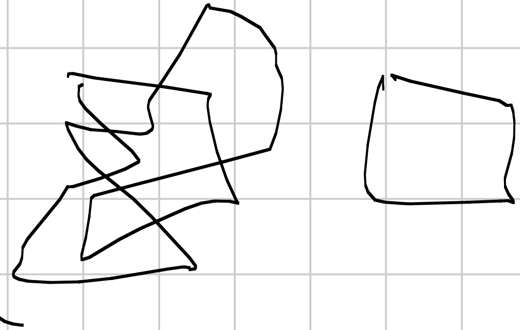


n dispari

K^n



CIRCUITO EULERIANO = cammino chiuso che contiene tutti gli archi 1 sola volta
(si passa più volte per lo stesso punto)



CAMMINO EUL = cammino con 2 estremi – – – – ———— 1 sola volta

NECESSARIO:

1 – tutti pari

2 – due vertici di grado dispari, tutti gli altri pari

SUFFICIENTE

$n = n°$ vertici

(CIRCUITO) Indut. su $e = n°$ archi.

$$\delta(G) = \min_{x \in V} d(x) > 0 \qquad \delta(G) \geq 2$$

$\Downarrow$

G contiene almeno un ciclo

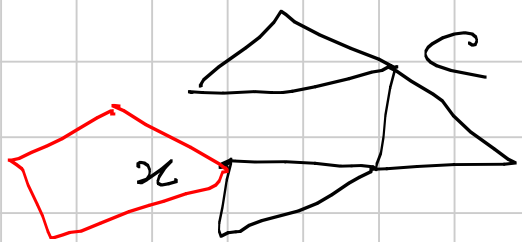
$\Downarrow$

c'è un circuito C massimale

Tesi: C è euleriano (contiene tutti gli archi)

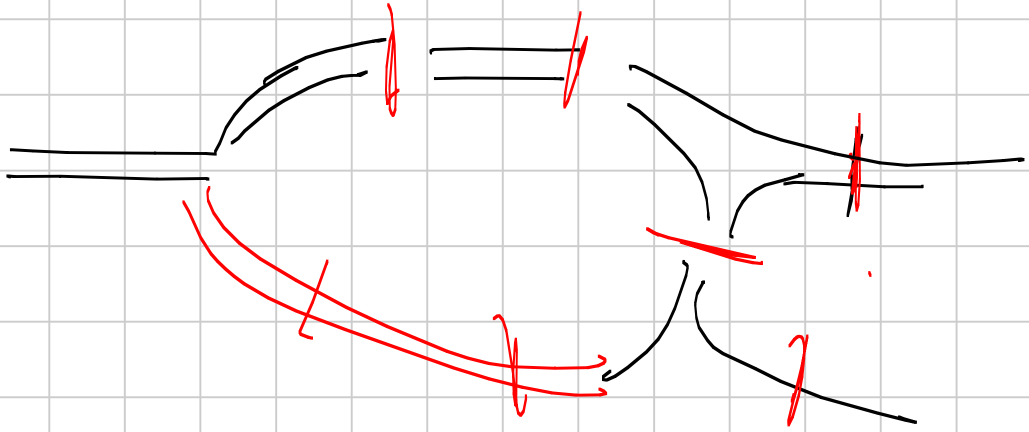
Per assurdo: no.

$\exists$ vertice x che contiene un "altro" arco

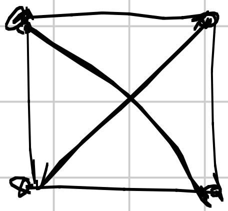


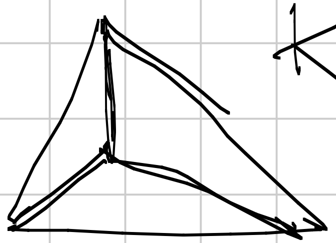
$H = G - C$ componente connessa

Rosso + Nero = circuito più grande

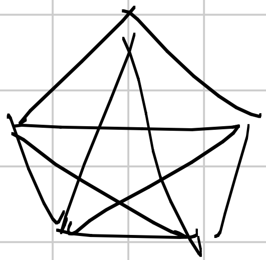


GRAFI PLANARI

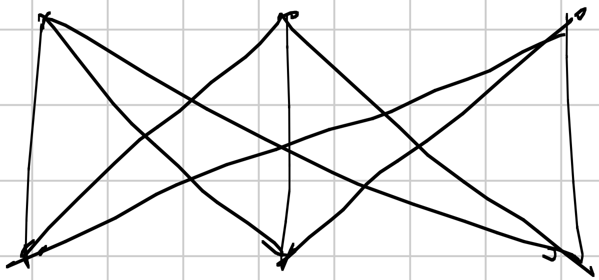




K^4

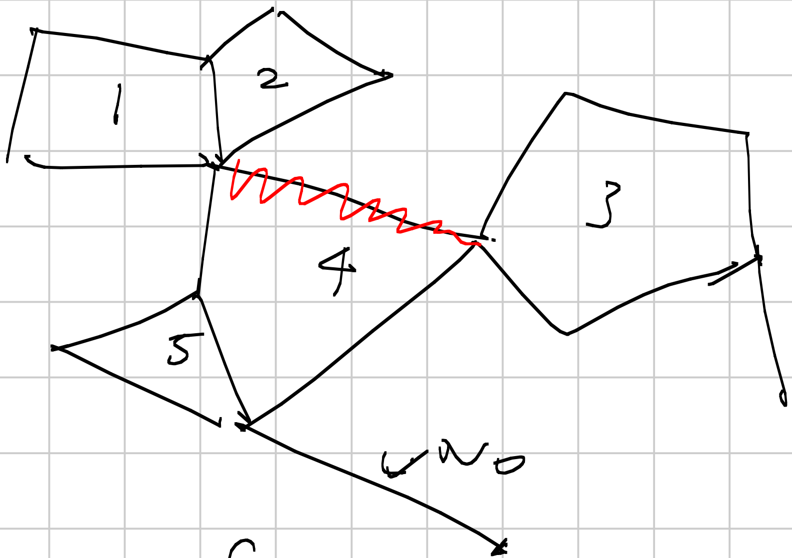


K^5



$K^{3,3}$

6



vertici n

spigoli / archi e

facce f

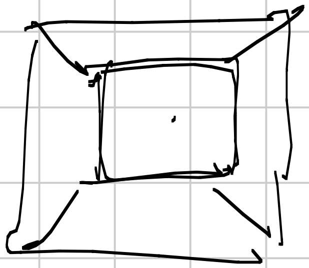
$$n - e + f = 2$$

Induzione su f

Caso iniziale: $f = 1$ ALBERO $e = n - 1$, $f = 1$

$f > 1$ ($f' < f$ O.K.) cancello un arco che separa due facce

G' $n' = n$ $e' = e - 1$ $f' = f - 1$



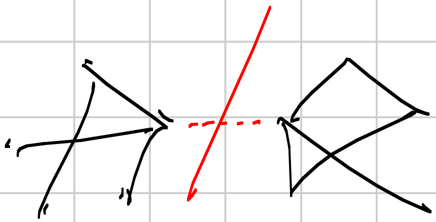
f_i = n° di facce con i archi

$$\sum_i f_i = f$$

G senza "bridges" ponti

$$\sum_i i f_i = 2e$$

n° archi



g (girth) = minima lunghezza di un ciclo nel grafo G.

$g(G)$

Se G non ha "bridges" ed è planare,
allora $\boxed{e \leq \frac{g}{g-2}(n-2)}$ $n = n°$ vertici, $e = n°$ archi

$$2e = \sum_i i f_i = \sum_{i \geq g} i f_i \geq \sum_{i \geq g} g f_i = g \sum_{i \geq g} f_i$$

$$f \leq \frac{2e}{g} \qquad = g f$$

Eulero

$$e + 2 = n + f \leq n + \frac{2e}{g}$$

$$e\left(1 - \frac{2}{g}\right) \leq n - 2$$

K^5 $n = 5$
$e = 10$
$g = 3$ $10 \leq 3 \cdot 3$

$K^{3,3}$ $n = 6$ $g = 4$
$e = 9$
$9 \leq 2 \cdot 4$

Grafo bipartito

Matching

$V_1 \quad V_2$

$x \in V_1$

$\Gamma(x) \subseteq V_2$
$\shortparallel$
$\{ y \mid xy \text{ è un arco} \}$

NECESSARIO: $\forall S \subseteq V_1$

$\Gamma(S) = \bigcup_{x \in S} \Gamma(x)$ ha almeno $|S|$ elementi

È SUFFICIENTE?

INDUZIONE su $n = |V_1|$

Due casi:

(1) Per ogni k con $1 \leq k < n$
e per ogni $S \subseteq V_1$ $|S| = k$ $|\Gamma(S)| \geq k+1$

(2) esiste k ed esiste $|S| = k$ t.c. $|\Gamma(S)| = k$.

(1) $x \in V_1$ qualsiasi $y \in \Gamma(x)$ qualsiasi.
In ciò che rimane ho sempre a disposizione
un n° di elementi $\geq |S|$

(2) Intanto scegliamo gli elementi di S

$T \subseteq V_1 \setminus S$ $|T| = t$ ci sono $\geq t$ el. non in S

$|\Gamma(T)| \geq |T|$ $|\Gamma(T \cup S)| \geq t + k$

$\Gamma(T)$ contiene $\geq t$ elementi non in S

$V_1 - S$ $V_2 - \Gamma(S)$

Equivalente

$A_1, \dots, A_n$ sottoinsiemi di X

Insieme di rappresentanti (distinti)

$\{x_1, \dots, x_n\}$ $x_i \in A_i$ $\forall i$ $x_i \neq x_j$

$$\left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| \geq |S| \qquad S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

$$|T(S)| \geq |S| - d$$

Riesco ad accoppiarne almeno $n-d$ elementi.

(Aggiungo d elementi in V_2 e li accoppio con tutti gli el. di V_1)

X insieme ordinato

catena : $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_k$

anticatena $\{y_1, \dots, y_h\}$ $\quad y_i \not\le y_j \quad y_j \not\le y_i$

<u>Teo.</u> Se una anticatena ha al più m elementi, allora X è unione di m catene.

<u>DIM</u> Induzione su $|X|$. Caso iniziale OK.

C catena massimale in X.

<u>$Y = X - C$</u>

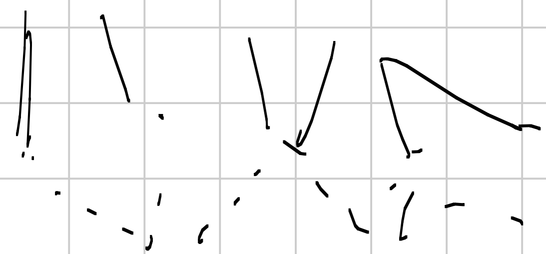
2° caso

$A = \{y_1, \dots, y_m\}$ anticatena in Y (massimale)

1° caso: in Y tutte le anticatene hanno $< m$ elementi

$\Downarrow$

induzione



$S^+ = \{x \in X \mid x \geq y_i \text{ per qualche } i\}$

$S^- = \{x \in X \mid x \leq y_i \text{ per qualche } i\}$

$S^+ \cup S^- = X$ (per la massimalità di A)

$A \subseteq S^+ \quad A \subseteq S^-$

$\max C \notin S^- \qquad C = \{x_1, \dots, x_k\}$

$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq y_i \qquad \min C \notin S^+$

$S^+ = \bigcup_{i=1}^{m} C_i^+ \qquad S^- = \bigcup_{i=1}^{m} C_i^-$

$y_i \in C_i^+ \qquad y_i \in C_i^-$

$C_i^+ \cup C_i^- = C_i^*$ è una catena

$C_i^+ \quad \max C_i^- \quad \text{MIN } C_i^+$

$a_1 < a_2 < \dots < y_i \qquad y_i < b_1 < b_2 \dots$

Se per assurdo $y_i < a$ in C_i

$a \le y_j$ $\qquad$ $y_i \le y_j$

assurdo

Teo di Menger

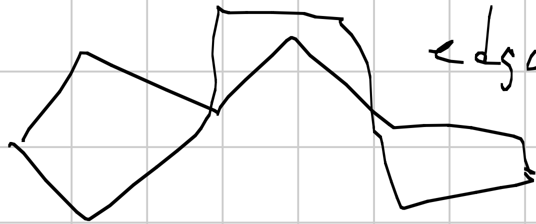
G (connesso)

x, y vertici non adiacenti
il minimo numero di vertici che separano x da y è uguale al massimo numero dei cammini indipendenti da x e y

minimo - - - - - $\qquad$ archi

massimo $\qquad$ cammini (edge-disjoint)

indip.



edge-disjoint

Colori

vertici : $\chi(G)$ = minimo n° di colori necessari a colorare i vertici di G

$\chi(G) \geq 2$ se c'è almeno un arco

$\chi(G) \geq 3 \iff$ c'è un ciclo di lunghezza dispari

Greedy algorithm:

ordina i vertici $x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots x_n$

$x_1 \to 1$

$x_2 \xrightarrow{no} 1$ $\quad x_3$

ad $\to 2$

TEO Se $k = \max_H \delta(H)$ su tutti gli "spanned subgraphs", allora $\chi(G) \leq k+1$

$\Rightarrow \chi(G) \leq \Delta + 1$

DIM x_n = un vertice di grado $\leq k$

$H_{n-1} = G - x_n$ $\quad x_{n-1} \in H_{n-1}$ $\quad$ " $\quad$ " $\quad$ "

$H_{n-2} = G - \{x_{n-1}, x_{n-2}\}$ $\quad$ "

$\chi(G) \leq \Delta$

(esercizio se G è connesso e non Δ-regolare)

ECCETTO:

- G completo
- G è un ciclo di lunghezza dispari.

COLORARE GLI ARCHI

$\chi'(G)$ = min n° di col. per colorare gli archi di G

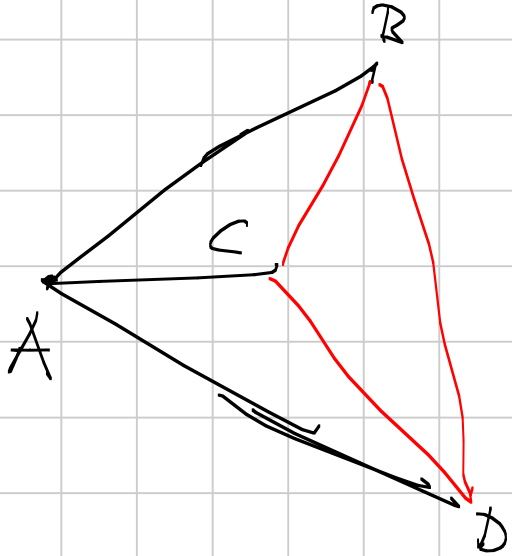
$\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$

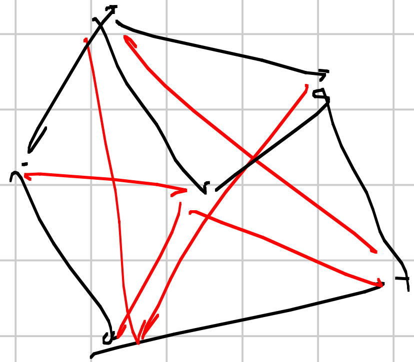
RAMSEY

6 persone

o 3 che si conoscono

o 3 che non si conoscono





K^6

2 colori

K^3 monocromatico

Problema Dato un intero r (n° colori) e grafi $G_1, \dots, G_r$ posso trovare n sufficientemente grande tale che COMUNQUE SI COLORI CON r colori K^n si ha almeno un i t.c. K^n contiene in G_i di colore i.

Teorema di Schur

$\mathbb{N}$ con un n° finito di colori, r. Allora $\exists\, x, y, z$ dello stesso colore con $x + y = z$.

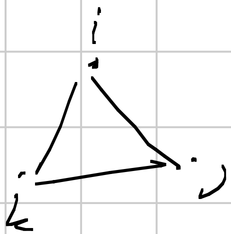
Dim

Cerco n tale che in K^{n+1} con r colori esiste sempre un triangolo monocromatico.

$$V = \{0, 1, \dots, n\}$$

$\chi : \mathbb{N} \to [1, \dots, r]$ "colorazione di $\mathbb{N}$"

$\chi^* : G \to \{1, \dots, r\}$ $\quad i > j > k$



$(i-j) + (j-k) = i-k$

$\chi^*_{ij} = \chi(|i-j|)$ $\qquad x + y = z$