A1

Titolo nota 09/09/2008

- POLINOMI
- COMPLESSI

$$p(x) = a_n x^n + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_n x^n$$

$a_i \in$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{Z}_m$	
	×	×	✓	✓	✓	solo m primo	

$\leftarrow$ anelli

$\leftarrow$ campi

ogni numero $\neq 0$ si inverte

Grado = i più alto t.c. $a_i \neq 0$

Idea: sistemo prima posti più alti

$$x^5+3x^4+2x^2+x+1 \;:\; 2x^2+5 = \frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{4}x-\frac{11}{4}$$

$$\begin{array}{l}
x^5 + \frac{5}{2}x^3 \\
\hline
// \quad 3x^4-\frac{5}{2}x^3+2x^2+x+1 \\
3x^4 + \frac{15}{2}x^2 \\
\hline
// \quad -\frac{5}{2}x^3-\frac{11}{2}x^2+x+1 \\
-\frac{5}{2}x^3 - \frac{25}{4}x \\
\hline
// \quad -\frac{11}{2}x^2+\frac{29}{4}x+1
\end{array}$$

Se il divisore è monico, basta un anello

$$
\begin{array}{r}
-\frac{11}{2}x^2 \qquad -\frac{55}{4} \\
\hline
// \qquad \frac{29}{4}x + \frac{59}{4}
\end{array}
$$

$$a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)$$

CAMPO

$r(x)$ ha grado $< \deg b(x)$ (oppure è 0)

- Fattorizzazione unica dei polinomi
- MCD
- Bézout $(a(x), b(x)) = 1 \Rightarrow \exists\, p(x), q(x)$ $ap + bq = 1$

$<\partial b$ $\quad <\partial a$

Fattorizzazione unica funziona anche:

- in più variabili
- se i coefficienti stanno in $\mathbb{Z}$

(in generale funziona tutte le volte che le costanti sono a fatt. unica)

Immagazzinare informazioni:

Th. (Ruffini) $p(a) = 0 \iff x-a \mid p(x)$

(E) $p(1) = 1, \quad p(2) = 2 \quad p(3) = 3$

$$p(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3)\,\underline{q(x)}$$

$$x-1 \mid p(1)-1$$

$$x-2 \mid p(2)-2$$

$$x-3 \mid p(3)-3$$

<u>occhio</u>

$x^2 - 1$

$x^3 - 1$

<u>conseguenze</u>

1) identità dei polinomi

<u>Se</u> $p(a_i) = q(a_i)$ per $i = 1, \dots n+1$

valori a_i diversi

e $\partial p \leq n$, $\partial q \leq n$

Allora $p \equiv q$ (coefficiente per coefficiente)

$$p(x) - q(x) = \underbrace{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n+1})\,r(x)}$$

grado $\leq n$ grado $\geq n+1$

Conseguenza 2:

Ogni polinomio p ha al più $n = \partial p$ radici

$p(a_i) = 0 \qquad p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots$

CONSEGUENZA 3:

$$x \pm y \mid x^n \pm y^n$$

$$x - a \mid x^n - a^n$$

$$x + a \mid x^n - a^n$$

$$(-a)^n - a^n = \left[(-1)^n - 1\right] a^n$$

In generale Ruffini è utile

Chiave per molti problemi:

RAPPRESENTARE somme $\longleftrightarrow$ prodotti

Radici

- $\mathbb{C}$ $\rightarrow$ sempre n radici (con molteplicità)

  a ha molteplicità k se $(x-a)^k \,\|\, p(x)$

- $\mathbb{R}$

$p(1) = -5 \qquad p(37) = 2\pi$

$\cdot\, \mathbb{Q} \qquad \sum a_i x^i = 0 \qquad a_i \in \mathbb{Z}$

Se p/q è una radice, allora

$$p \mid a_0 \qquad q \mid a_n$$

$3x^4 + 7x + 5$

$p \to \pm 1, \pm 5$

$q \to \pm 1, \pm 3$

$$3\frac{p^4}{q^4} + 7\frac{p}{q} + 5 = 0$$

$$3p^4 + \underbrace{7pq^3}_{} + \underbrace{5q^4}_{} = 0$$

dev'essere multiplo di q

multipli di q

• $\mathbb{Z} \to$ lo vedo come coefficienti razionali e applico il teorema sopra

Un polinomio monico (a coeff. interi)

se ha radici razionali, allora queste in realtà sono intere

Se $\exists\, a \in \mathbb{Q}$ t.c. $p(a) = 0$

p monico a coeff. interi

allora $a \in \mathbb{Z}$

Fatto interessante:

$p(x)$ a coeff. interi

$$p(x) = a(x) \cdot b(x) \qquad a, b \in \mathbb{Q}[x]$$

Teorema (Gauss)

Allora, c'è una fattorizzazione "analoga" con

$$p(x) = \tilde{a}(x)\,\tilde{b}(x)$$

a coefficienti interi

$$\tilde{a} = a \cdot K$$

$$\tilde{b} = b / K$$

(E) $x^2 - 1 = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot (2x - 2) = (x+1)(x-1)$

Th <u>NON</u> dice che $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}[x]$

$p(x)$ a coefficienti interi,

1) definisco $c(p) = MCD(a_0, \dots a_n)$

2) $c(p) \cdot c(q) = c(pq)$

si dimostra andando su $\mathbb{Z}_p[x]$

3) $$p(x) = a(x)\cdot b(x) = \frac{\bar{a}(x)}{d}\cdot\frac{\bar{b}(x)}{e}$$

$$d\cdot e\cdot p(x) = \bar{a}(x)\,\bar{b}(x)$$

e confrontare i $C(\cdot)$

[PER CASA]

[NEL VIDEO DEL W.C.]

Relazioni RADICI/COEFFICIENTI

$$(x-a)(x-b)(x-c)=$$

$$= x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (ab+bc+ca)\,x - abc$$

Se $a_n = 1$ (monico)

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\boxed{\left(\sum_1 x_i\right)} = c_1 \qquad -(a+b+c)$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = +\boxed{\left(\sum_{i<j} x_i x_j\right)} = c_2 \qquad +(ab+bc+ca)$$

$$\frac{a_{n-3}}{a_n} = \boxed{\left(\sum_{i<j<k} x_i x_j x_k\right)} = c_3 \,,$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_0}{a_n} = \pm \boxed{x_1 x_2 \cdots x_n} = c_n \qquad - abc$$

<u>Teorema</u> se $f(x_1, \ldots x_n)$ è un polinomio simmetrico negli x_i, <u>allora</u> si scrive come polinomio nei c_i (funzioni simmetriche elementari)

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

$$a^3+b^3+c^3$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$$

$$S=a+b+c$$
$$Q=ab+bc+ca$$
$$P=abc$$

caso generico

$$\sum x_i^2=\left(\sum x_i\right)^2-2\left(\sum x_i x_j\right.$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$
$$a_{n-1} \qquad\qquad a_{n-2}$$

$$\sum \frac{1}{x_i} = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$= \underline{\underline{(a+b+c)}}\left(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\right)$$

$$a^3+b^3+x^3-3abx = p(x)$$

multiplo di: $(x+a+b)$

$\Updownarrow$ RUFFINI

$$p(-a-b)=0$$

$$\cancel{a^3}+\cancel{b^3}-\left(\cancel{a^3}+\cancel{b^3}+3a^2b+3ab^2\right)-3ab(-a-b)=0$$

4 Fattorizza su $\mathbb{R}$

$$\boxed{x^4+x^3+x^2+x+1}$$

$$\downarrow$$

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$$

$$y=x+\frac{1}{x}$$

$$y^2=x^2+2+\frac{1}{x^2} \qquad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2}=x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=$$

$$=(y^2-2)+y+1=y^2+y-1 \left\langle \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right.$$

$$\boxed{x+\frac{1}{x}=y_1} \qquad x+\frac{1}{x}=y_2 \qquad \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\downarrow$$

$$x^2+1-\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}x=0$$

(sarà un modo di calcolare $\cos\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{5}$)

---

7)

$$\begin{cases} p(x)\equiv 2 & (\bmod\ x) \\ p(x)\equiv 4 & (\bmod\ x-1) \\ p(x)\equiv 6 & (\bmod\ x-2) \end{cases}$$

$$p(x) \equiv 56 \pmod{x-3}$$

Quanto vale $p(x) \bmod x(x-1)(x-2)(x-3)$?

TEOREMA CINESE DEL RESTO

$$p(x) = q(x) \cdot x(x-1)(x-2)(x-3) + R(x)$$

$\uparrow$

≤ 3

VALUTO in $x = 0, 1, 2, 3$

*) $R(0) = 2 \quad R(1) = 4 \quad R(2) = 6 \quad R(3) = 56$

$R(x)$ è l'unico polinomio di grado ≤ 3 che soddisfa $(*)$

Come si trova esplicitamente R?

$$R(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{cases} d = 2 \\ a + b + c + d = 4 \\ a \cdot 8 + b \cdot 4 + c \cdot 2 + d = 6 \\ a \cdot 27 + b \cdot 9 + c \cdot 3 + d = 56 \end{cases}$$

FATTO GENERALE

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdot \\ 1 & b & b^2 & b^3 & \cdots \\ 1 & c & c^2 & c^3 & \\ 1 & d & d^2 & d^3 & \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

quadrata

MATRICE di VANDERMONDE

Allora M non singolare

$$\det M = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

$x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4$

$$\text{def } M = \prod_{i<j} (x_j - x_i) \qquad \text{(EXTRA)}$$

$R(0) =$

$\cancel{x})$ $R(0) = 2 \quad R(1) = 4 \quad R(2) = 6 \quad R(3) = 56$

RISOLVIAMO CASO PIÙ SEMPLICE

$a(0) = 0 \quad a(1) = 0 \quad \underline{a(2) = 1} \quad a(3) = 0$

$(a \text{ di grado } \leq 3)$

$$a \cdot (x-3)(x-1)x$$

$$a = \frac{(x-3)(x-1)x}{(2-3)(2-1)\cdot 2}$$

"MATTONI" che fanno 1 in un punto
0 in tutti gli altri

L_2 è il polinomio che vale 0 in $x = 0, 1, 3$
1 in $x = 2$

L_1 varrà 0 in $x = 0, 2, 3,$ 1 in $x = 1$

$R(0)=2$, $R(1)=4$ $R(2)=6$, $R(3)=56$?

$$2L_0(x)+4L_1(x)+6L_2(x)+56L_3(x)$$

$$\|$$

$$R(x)$$

$$2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-1\cdot-2\cdot-3}+4\frac{x(x-2)(x-3)}{1(1-2)(1-3)}+6\frac{x(x-1)(x-3)}{2(2-1)(2-3)}$$

$$+56\frac{x(x-1)(x-2)}{3(3-1)(3-2)}$$

"L_i" t.c. $L_i \equiv 1 \mod X_i$

$L_j \equiv 0 \mod X_j \quad j \neq i$

$\boxed{\text{A CASA}}$: confronta con TEO. CINESE, ALGORITMO RISOLUTIVO (*)

$\boxed{9}$ TRUCCACCIO DISONESTO:

GUARDA MOD 2

$a_0 + a_1 X^1 + \dots a_n X^n$

$a_0 \equiv 1 \mod 2$

$$N \equiv a_0 + a_1 \cdot 13 + a_2 \cdot 13^2 + \dots + a_n \cdot 13^n \equiv$$

$$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} p(\text{DISPARI}) = \text{DISPARI} \\ p(\text{PARI}) = \text{DISPARI} \end{array}\right\} \Rightarrow p(N) = 0 \quad \underline{\text{MAI}}$$

---

8 UN PO' DI SANI CONTI

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 3 \\ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 4 \end{cases}$$

RELAZIONI RADICI COEFFICIENTI

DOBBIAMO TROVARE:

$$a_3 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = -1$$

(DECRETO: $x_1 = a$, $x_2 = b$, ...)

$$a_2 = ab + bc + cd + da + ac + bd$$

$$a_1 = -(abc + abd + acd + bcd)$$

$$a_0 = abcd$$

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + bc + \dots)$$

$1 \qquad 2 \qquad -\frac{1}{2}$

$c \qquad a \qquad b$

$(a+b+c+d)(a+b+c+d)(a+b+c+d)$

$-(a^3+b^3+c^3+d^3)+(a+b+c+d)^3 =$ $\quad -2$

$= \boxed{3\sum a^2 b} + 6\sum abc$ $\quad -60 \quad -3$

$3 \cdot 4 \cdot 12 + 6 \cdot 4 \quad +60 \quad \sum abc = \frac{1}{6}$

$\longrightarrow (a^2+b^2+c^2+d^2)(a+b+c+d)$

$\longrightarrow (ab+bc+\ldots)(a+b+c+d) =$

$$2 \qquad\qquad\qquad 1$$

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(a+b+c+d\right)=$$

$$=1\sum a^3+1\sum b^2a$$

$$3$$

$$\boxed{-1}$$

$$\sum b^2a=-1 \qquad \sum abc=\frac{1}{6}$$

$$\sum ab=-\frac{1}{2}$$

$$4\cdot 4$$
$$\shortparallel$$
$$4+12$$

abcd

$$(a+b+c+d)^4$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

$$(a^3+b^3+c^3+d^3)(a+b+c+d)$$

$$\left(\sum ab\right)^2$$

$$\left(\sum abc\right)(a+b+c+d) = 4\ abcd + \underline{\underline{\sum a^2bc}}$$

1) QUESTO ERA IL MODO SBAGLIATO DI FARE L'ESERCIZIO [MODO MIGLIORE: A08.3]

2) MODO GIUSTO DI FARE I CONTI

1) sfrutta simmetrie: se c'è a^2b c'è anche a^2c

b^2a

$\vdots$

2) LAVORA CON FUNZIONI SIMMETRICHE

3) CONTROLLA SEMPRE PONENDO VARIABILI $= 1$

COMPLESSI

$$\sqrt{-5} \qquad "i^2 = -1"$$

$$(2+3i)+7i = 2+10i$$

$$(2+3i)(4+5i) = 2\cdot 4+(3+5)i+15\underbrace{i^2}_{-1}$$

NUMERI COMPLESSI SONO

"SCRITTURE" DEL TIPO

$$a + bi$$

$\uparrow \qquad \uparrow$

reali

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)(c+di) = ac + bd\underset{\shortparallel}{i^2} + (bc+ad)i$$

$$(ac-bd)+(bc+ad)i$$

$$\frac{a-bi}{a-bi} \cdot \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2-(bi)^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i \qquad a \neq 0 \text{ oppure } b \neq 0$$

$$a+bi \neq 0+0i$$

TUTTI I NUMERI COMPLESSI $\neq 0$
SI INVERTONO

$\mathbb{C}$ È UN CAMPO

CONIUGIO $\quad \underbrace{a+bi} \longmapsto a-bi$

$z \longmapsto \overline{z}$

0) $\overline{\overline{z}} = z$

1) $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$

2) $\overline{zw} = \bar{z}\ \bar{w}$

3) $z \cdot \bar{z}$ è reale $= (a^2 + b^2)$ se z è $a+bi$

Idea furba

z reale $\iff z = \bar{z}$

$$z \cdot \bar{z} = \overline{(z \cdot \bar{z})} = \bar{z} \cdot \bar{\bar{z}} = \bar{z} \cdot z$$

Stesso modo: $\dfrac{z + \bar{z}}{2}$ è reale

$$\frac{z-\overline{z}}{2} \text{ è immaginario } b \cdot i$$

z immaginario $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$

(Teo): $p(x)$ polinomio a coefficienti reali,

$p(z) = 0$ $\quad \left[x^2+1=0 \quad \begin{matrix} +i \\ -i \end{matrix} \right]$

Allora $p(\overline{z}) = 0$

COEFF. REALI

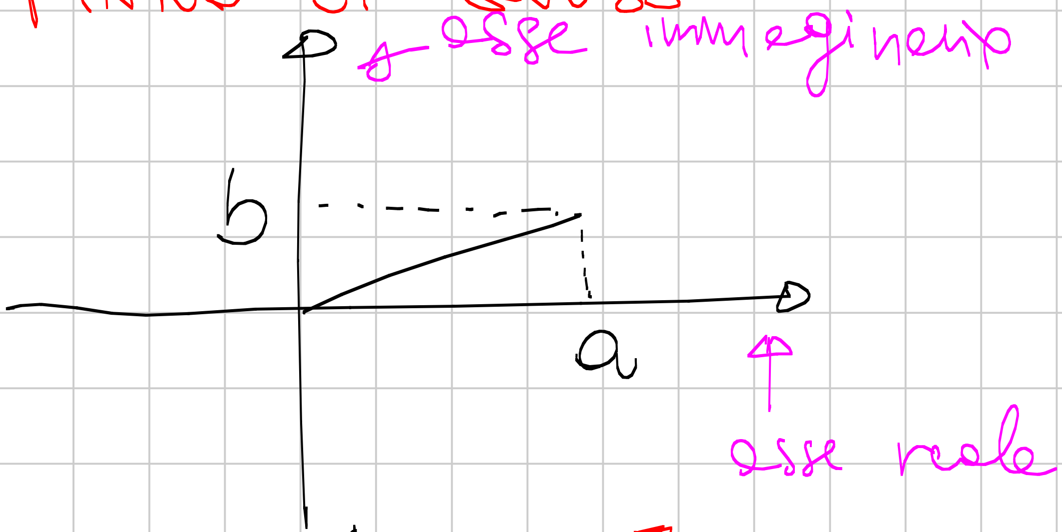
$$0 = \sum a_i z^i = \overline{\sum a_i z^i} = \sum \overline{a_i} (\overline{z})^i =$$

$$= \sum a_i (\bar{z})^i = p(\bar{z})$$

REGOLA DEI PROBLEMI CON I COMPLESSI:

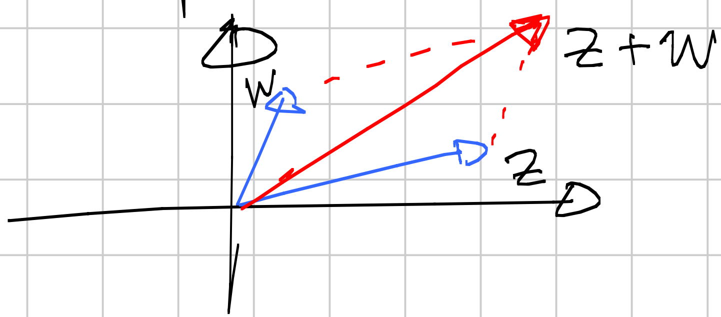
SE C'È z, C'È ANCHE $\bar{z}$

PIANO DI GAUSS

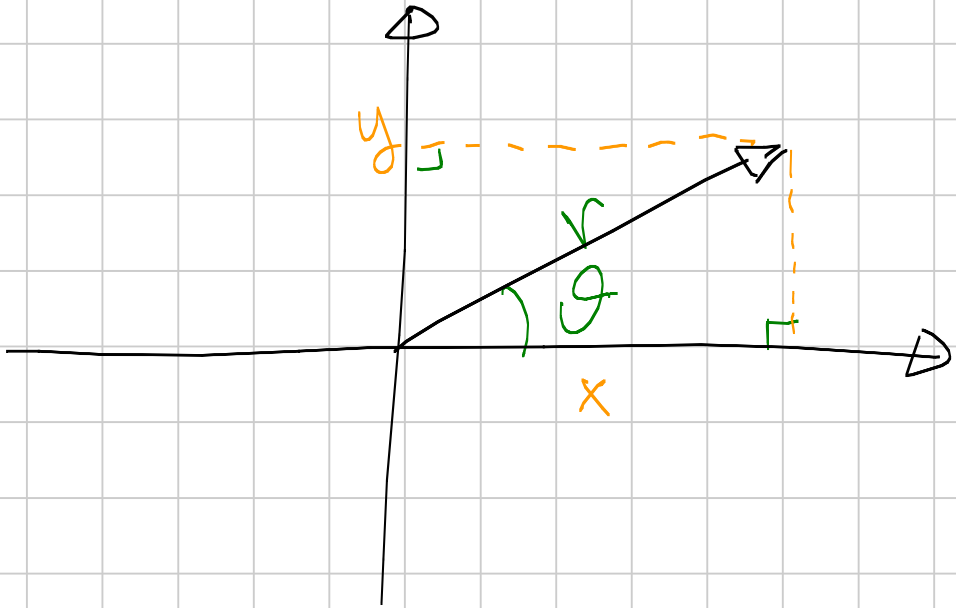


$a + bi$

(a, b)



FORMA POLARE



a, b

(x, y)

(r, ϑ)

$$x = r \cdot \cos \vartheta$$

$$y = r \cdot \sin \vartheta$$

$$x + iy = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

$$r_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1) \cdot r_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2) =$$

$$= r_1 r_2 \left[\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + i\left(\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_1\right) \right] =$$

$$= r_1 r_2 \left[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \right]$$

2 FORME:

RETTANGOLARE	x, y	$x + iy$
POLARE	r, ϑ	$r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$

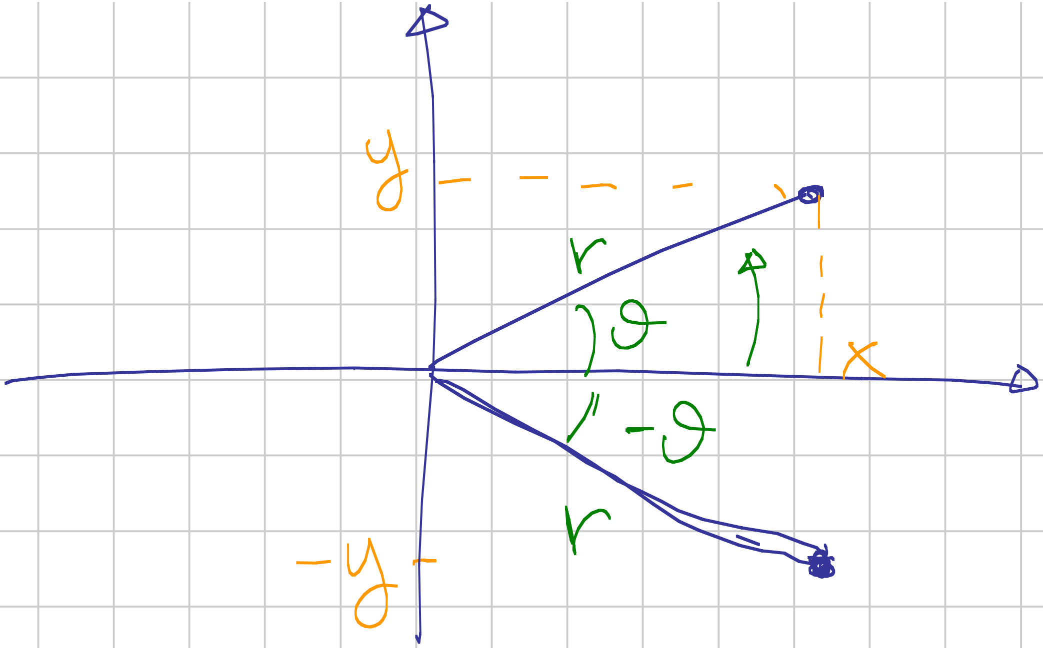
$$e^{i\vartheta} := \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

pippo$^{\vartheta}$

$$\left(r_1 e^{i\vartheta_1}\right)\left(r_2 e^{i\vartheta_2}\right) = \left(r_1 r_2\right) e^{i\left(\vartheta_1+\vartheta_2\right)}$$

$$\left(r e^{i\vartheta}\right)^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\vartheta}$$

$$\overline{\left(r e^{i\vartheta}\right)} = r e^{-i\vartheta}$$



In particolare, se $r=1$

(cioè il complesso ha modulo 1)

se ($|z|=1$) allora $z^{-1} = \bar{z}$

1) lunghezza del vettore sul piano $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ ← [PROVARE A CASA]

2) $\sqrt{z \cdot \bar{z}}$ ← OVVIO

3) r ← OVVIO

Notare che $|zw| = |z| \cdot |w|$

$\cos 5\theta = ?$

$$\cos 5\vartheta + i \sin 5\vartheta = e^{i \cdot 5\vartheta} =$$

FORMULA DI SOMMA IN FORMA POLARE

$$= \left(e^{i\vartheta}\right)^5 = \left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)^5 =$$

$$= \cos^5\vartheta + 5i\cos^4\vartheta \sin\vartheta - 10\cos^3\vartheta\sin^2\vartheta + \ldots$$

- RADICI p-ESIMA

$$\sqrt[p]{5} = x \qquad x^p = 5$$

deve avere p radici (in $\mathbb{C}$)

p radici di 5

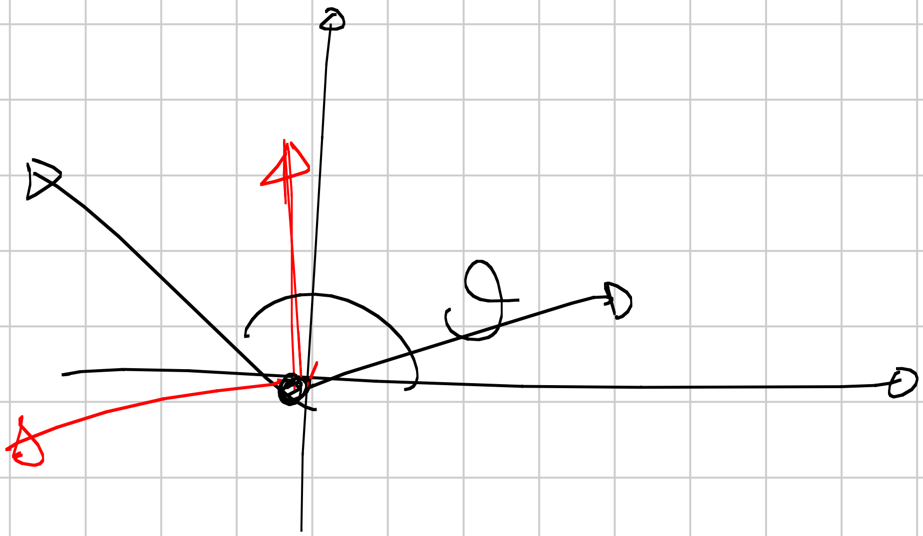
Come si calcolano?

$$\left(r \cdot e^{i\vartheta}\right)^{1/p} =$$

$$= \sqrt[p]{r} \cdot e^{i\frac{\vartheta}{p}}$$

RADICE REALE!

UHM



130°

α

$p\alpha = 130°$?

$$\alpha = \frac{130°}{p}$$

$$p \cdot \alpha = 130° + 360°$$

$$p \cdot \alpha = 130° + 2 \cdot 360°$$

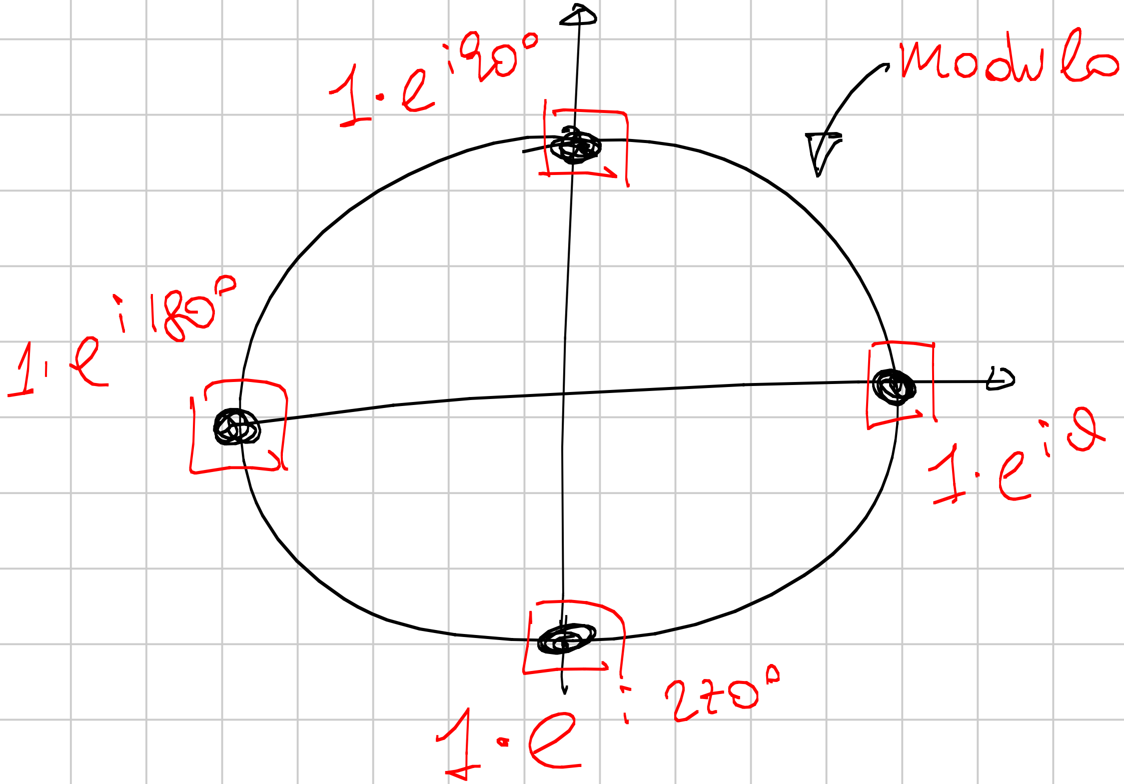
Qual è l'angolo α tale che

$$p \cdot \alpha = \beta \quad ?$$

R: ce ne sono p, e sono

$$\frac{\beta + K \cdot 360^\circ}{p} \qquad K = 0 \dots p-1$$

$$\frac{\beta + p \cdot 360^\circ}{\cancel{360^\circ}} = \frac{\beta}{p} \qquad K = p$$



$$x^4 = 1$$

1

-1

i

$-i$

$$1 = 1\cdot(\cos 0° + i\sin 0°) = 1\cdot e^{i\cdot 0}$$

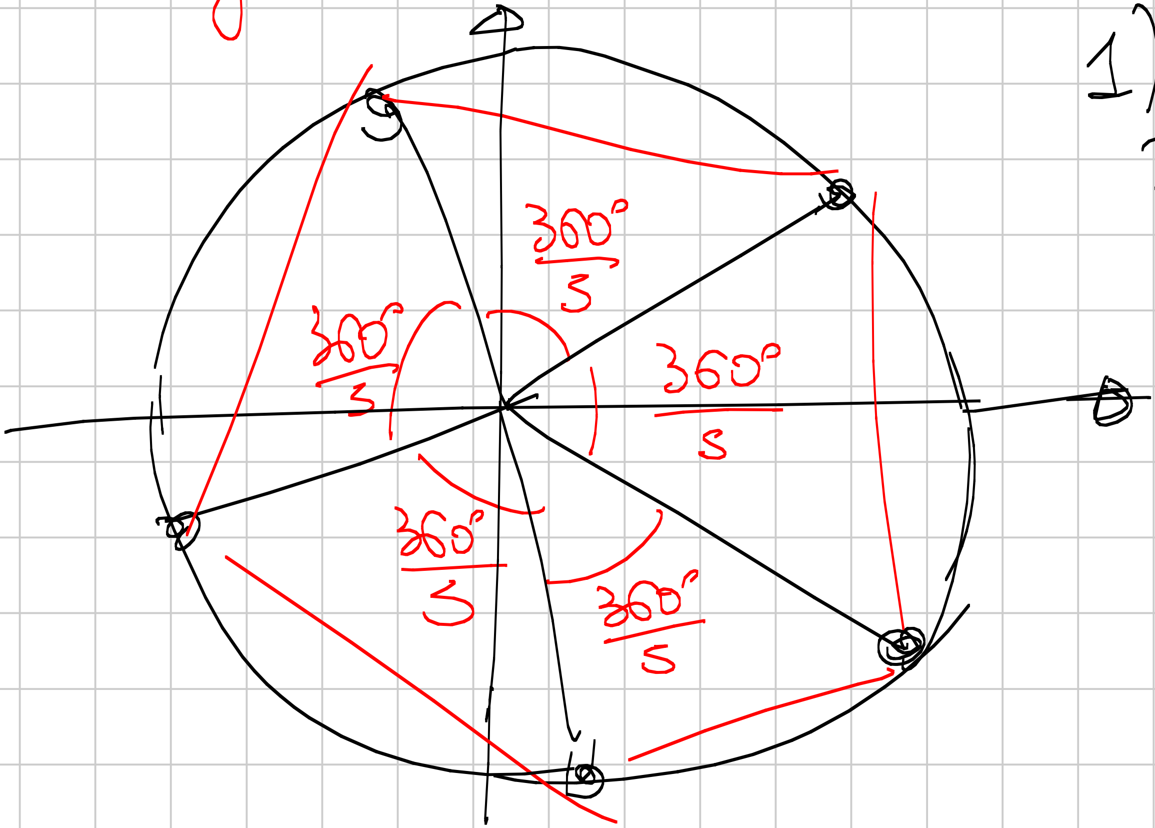
RADICI QUARTE COMPLESSE DI 1:

$$\sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\frac{0+k\cdot 360°}{4} + i\sin\frac{0+k360°}{4}\right)$$

$$1\left(\cos(k\cdot 90^\circ)+i\sin(k\cdot 90^\circ)\right)$$

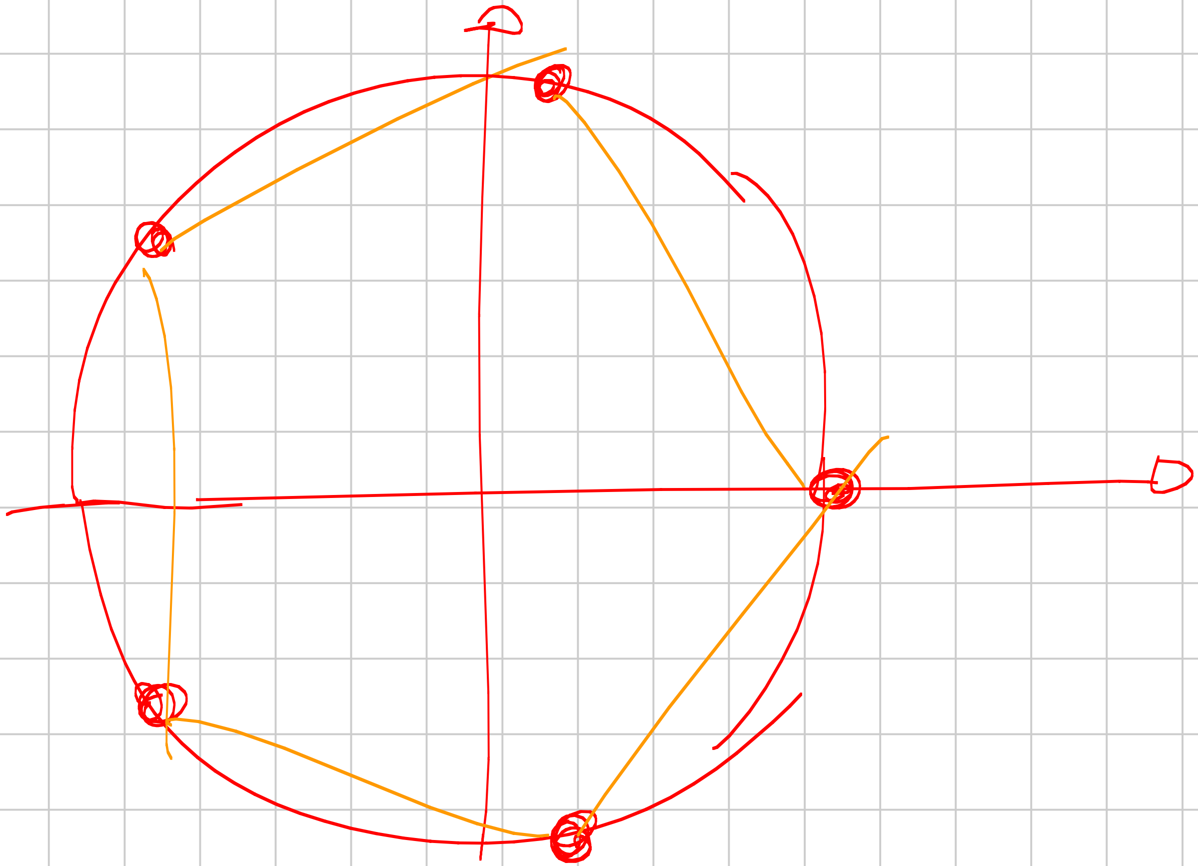
$k=0,1,2,3$ e poi ritrovo gli stessi angoli

In generale

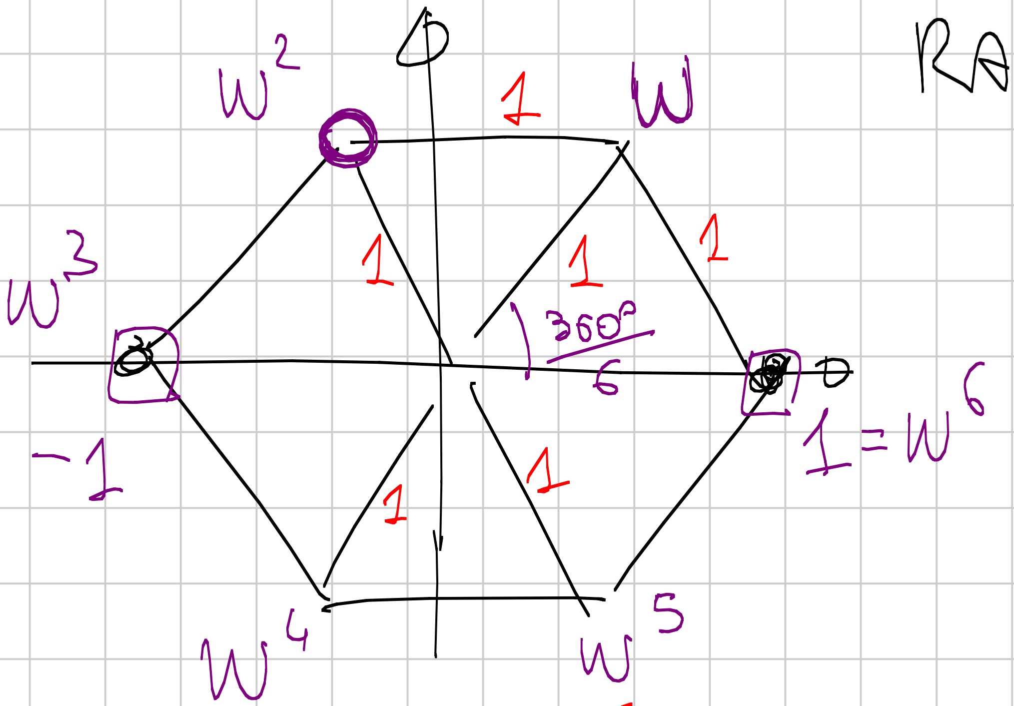


radici p-esime di z

1) modulo uguale
2) sono p
3) sono equispaziati



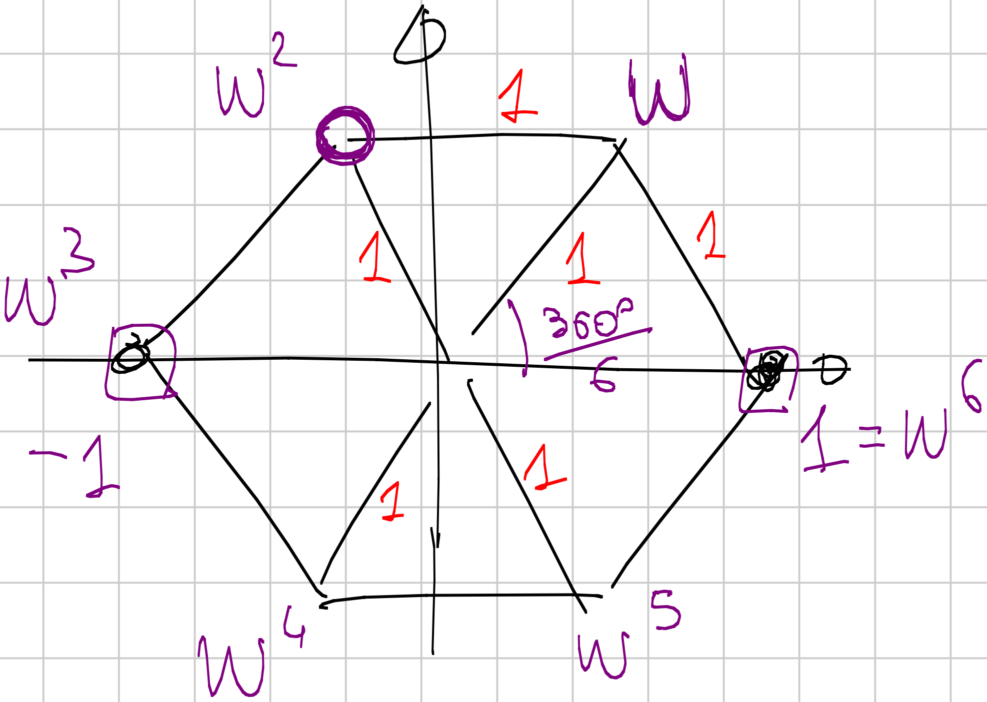
RADICI 6 DI 1



$x^6 - 1$

$$\sqrt[6]{r}\, e^{i\frac{k\cdot 360° + \cancel{\theta}}{6}} = \left(e^{i\frac{360°}{6}}\right)^k = w^k$$

$\sqrt[6]{r}$: $r = 1$



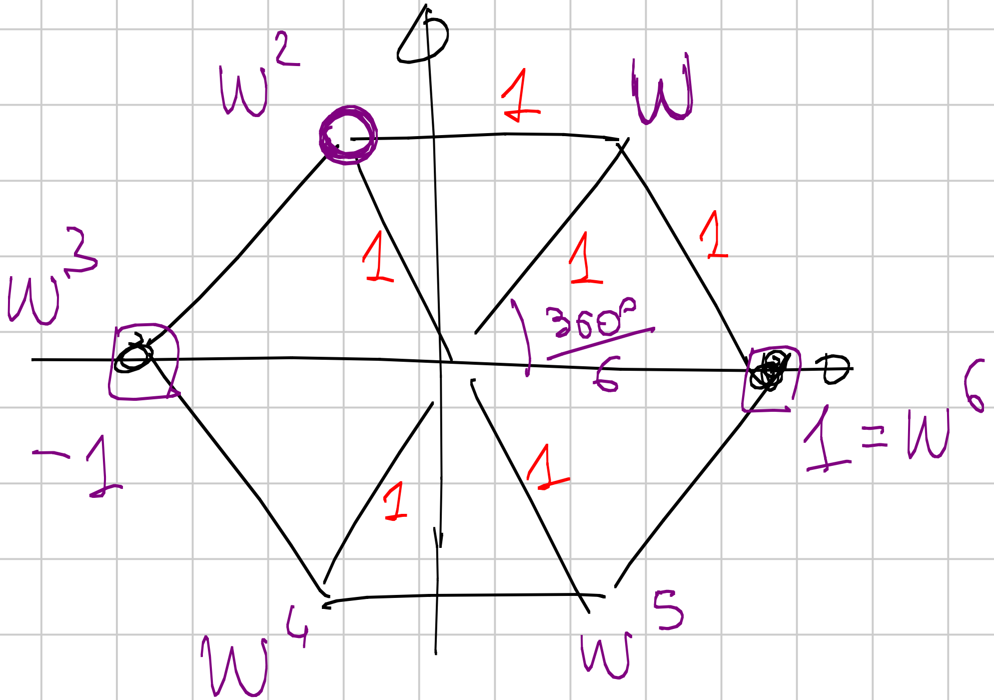
OSSERVAZIONE

$$(w^2)^3 = w^{2\cdot 3} = w^6 = 1$$

Alcune radici m-esime dell'unità sono anche radici d-esime dell'unità per $d|m$

Tutte le radici d-esime di 1 sono radici m-esime

$$x^d - 1 \mid x^m - 1$$



$$x^6 - 1$$

$$x^3 - 1 \mid x^6 - 1$$

$$x^2 - 1 \mid x^6 - 1$$

$$x - 1 \mid x^6 - 1$$

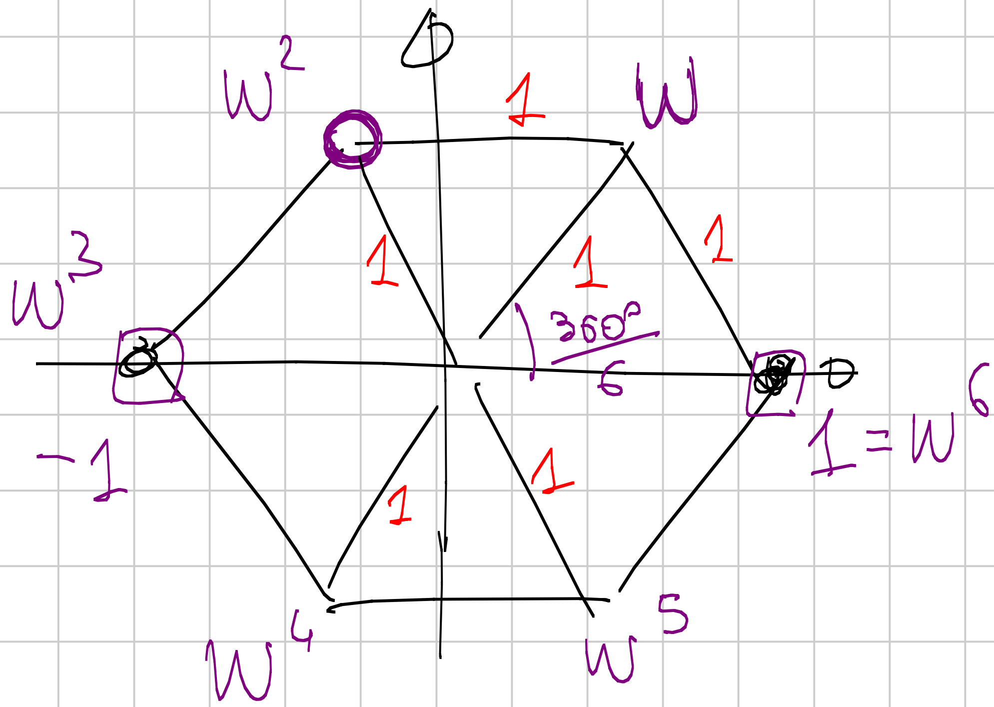
$$\begin{array}{cccc} \varphi(3) & \varphi(6) & \varphi(1) & \varphi(2) \\ \end{array}$$

$$x^6 - 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x + 1)$$

3 w^2, w^4 6 w^1, w^5 1 +1 per. 1   2 −1 periodo 2

In particolare solo "un po'" delle

radici n-esime di 1 hanno davvero bisogno di essere elevate alla 6ª per fare 1:



		Ha bisogno di essere elevato a?
w	ok	
$(w^2)^3 = 1$		3
$w^3 = -1$		2
$(w^4)^3 = 1$		3
w^5		6

$$w^6 = 1$$

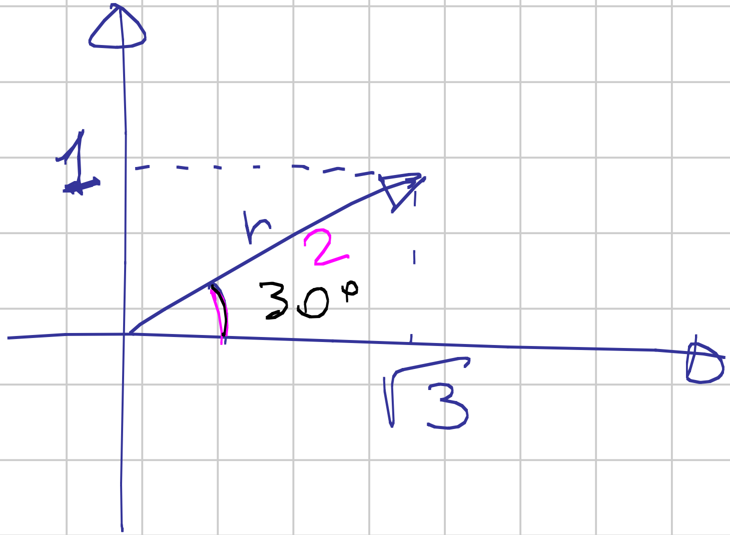
$$\Leftrightarrow \quad w^5 = w^{-1}$$

In particolare

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

1: TRUCCHETTO

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{2002}$$



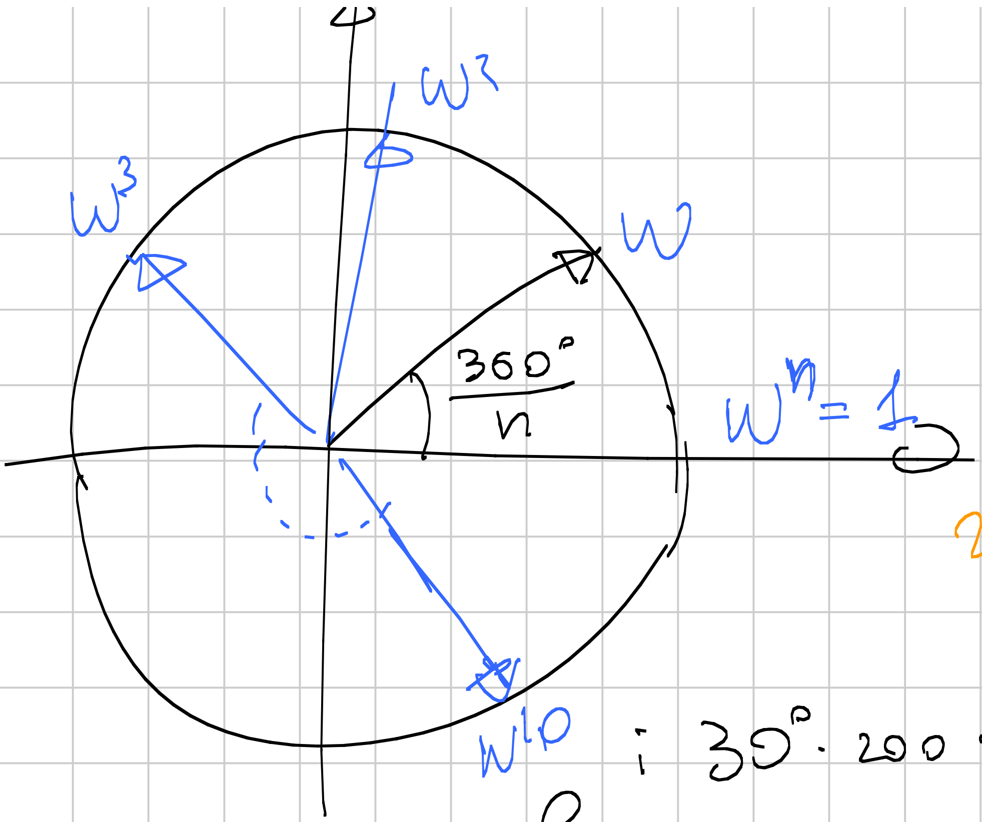
$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{3}+i = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$$

$$= 2 \cdot e^{i30^\circ}$$

$$(\sqrt{3}+i)^{2002} = 2^{2002} \cdot \underbrace{e^{i(30^\circ)\cdot 2002}}$$

$$\left[e^{i30^\circ}\right]^{12} = e^{i30^\circ \cdot 12} = e^{i360^\circ} = 1$$



$$\frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$$

$$2002 : 12 = 12 \cdot q + r$$

$$e^{i\,30^\circ \cdot 2002} = e^{i\,30^\circ \cdot (12q + r)}$$

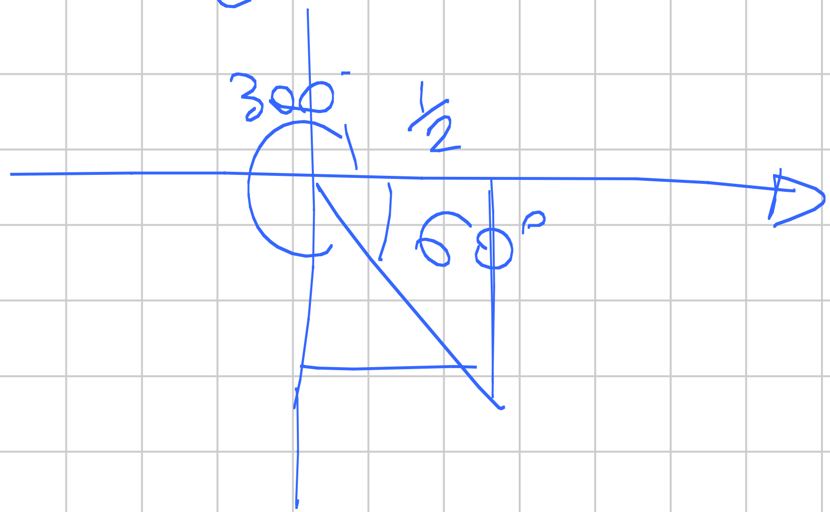
$$= \Big(\underbrace{e^{i\,30^\circ \cdot 12}}_{=1}\Big)^q e^{i\,30^\circ r} = e^{i\,30^\circ \cdot r}$$

Mettendo insieme tutto

$$(\sqrt{3}+i)^{2002} = \left(2e^{i30°}\right)^{2002} =$$

$$= 2^{2002} \cdot e^{i30° \cdot 10} = 2^{2002} \cdot e^{i300°} =$$

$$= 2^{2002}\left(\cos 300° + i \sin 300°\right)$$



=

3 ALTRO TRUCCO

$$\cos 15^\circ + \cos 35^\circ + \dots + \cos 355^\circ = ?$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta + i\sin\vartheta = e^{i\vartheta} \\ \cos\vartheta - i\sin\vartheta = e^{i(-\vartheta)} = e^{-i\vartheta} \end{cases}$$

RISOLVO PER TROVARE $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$:

$$\longrightarrow \cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$$

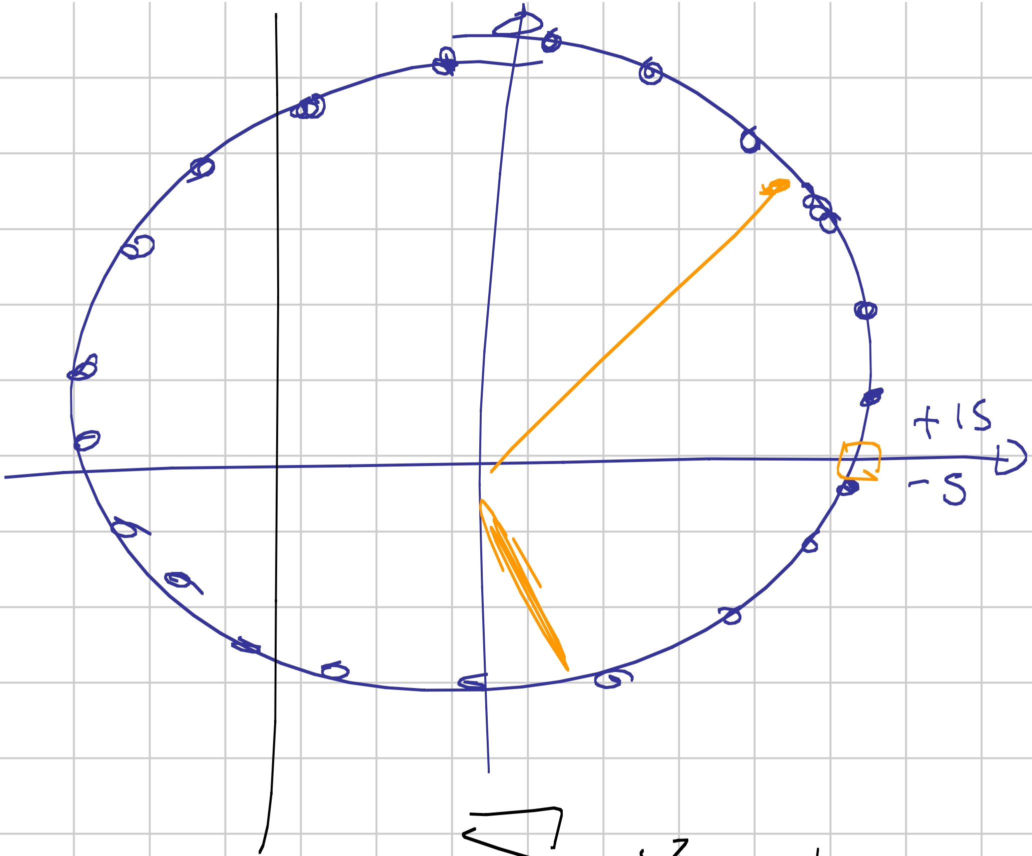
$$\longrightarrow \sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$$

FORMULE COMODE

$$X = \frac{e^{i15} + e^{-i15}}{2} + \frac{e^{i\cdot 35} + e^{-i\cdot 35}}{2} + \dots + \frac{e^{i\cdot 355} + e^{-i\cdot 355}}{2}$$

$$= \sum_{k=0}^{17} e^{i(15+20k)} + \sum_{k=0}^{17} e^{-i(15+20k)} =$$

$$= e^{i\cdot 15} \frac{\boxed{e^{i\cdot 18\cdot 20} - 1}}{e^{i\cdot 20} - 1} + e^{-i\cdot 15} \frac{\boxed{e^{-i\cdot 18\cdot 20} - 1}}{e^{-i\cdot 20} - 1}$$



VERTICI DI 18-AGONO REGOLARE

$$e^{i\,15\cdot 18}$$

$$= e^{i}$$

$$X_{\text{baricentro}} = \frac{\sum X_{\text{vertici}}}{18} = 0$$

$\cos 15 + \ldots + \cos 355$

$+ i \sin 15 \quad \ldots \quad + i \sin 355$

$$x = \mathrm{Re}\left[e^{i\,15} + e^{i\cdot 35} + \ldots + e^{i\cdot 355}\right]$$

$$\mathrm{Re}\left[e^{15} \cdot \frac{e^{20\cdot 18} - 1}{e^{20} - 1}\right] \qquad (*)$$

OSS: FUNZIONA ANCHE SE LA SEQUENZA "FINISCE PRIMA"

NON FA PIÙ 0

NON C'È INTERPRETAZ. GEOMETRICA

MA POSSO SVOLGERE IL CONTO (*)

1, 3, 7, 9