COMBINATORIA 2

Titolo nota 12/09/2008

i) PERMUTAZIONI

ii) GRAFI

iii) INVARIANTI E COLORAZIONI

$A = \{1, 2, \ldots, n\}$

$\sigma : A \to A$ biunivoca = permutazione

$\sigma(a) = b$

σ, τ permutazioni $\longrightarrow$ $\sigma \circ \tau$ é una permutazione

$x \longrightarrow \sigma(\tau(x))$

tutti fermi = permutaz. identica ID

$ID \circ \sigma = \sigma \circ ID = \sigma$

σ^{-1} inversa di σ $\qquad \sigma^{-1} \circ \sigma = ID$

quante sono? $n!$

$\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$

DECOMPOSIZIONE IN CICLI

a, b, c, d

ciclo

$$\cdots \to a \longrightarrow c \longrightarrow b \longrightarrow d - \cdots$$

$$\{1, \sigma(1), \sigma(\sigma(1)), \dots\} = \{1, \dots, n\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \cdots \to 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5 \cdots$$

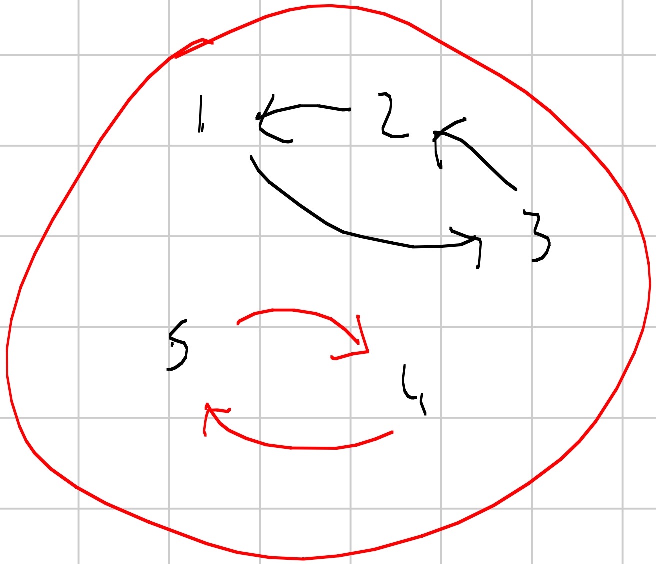
$$\cdots \to 3 - \cdots$$

ogni permutazione si scrive <u>unicamente</u>

come prodotto di cicli disgiunti.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix} = \underline{(1\ 2\ 3)}\,\underline{(4\ 5)}$$

notazione più utile



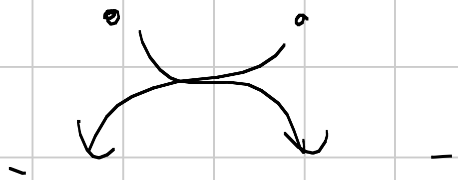
punti fissi $\sigma(x) = x$

SEGNO

segno = parità del numero di scambi che ~~uso~~ posso usare per ottenere la permutazione

Dim. σ permutazione di $\{1, \dots, n\}$

$i < j \qquad \sigma(i) > \sigma(j)$



inversione

no inversione

segno = parità del num. di inversioni.

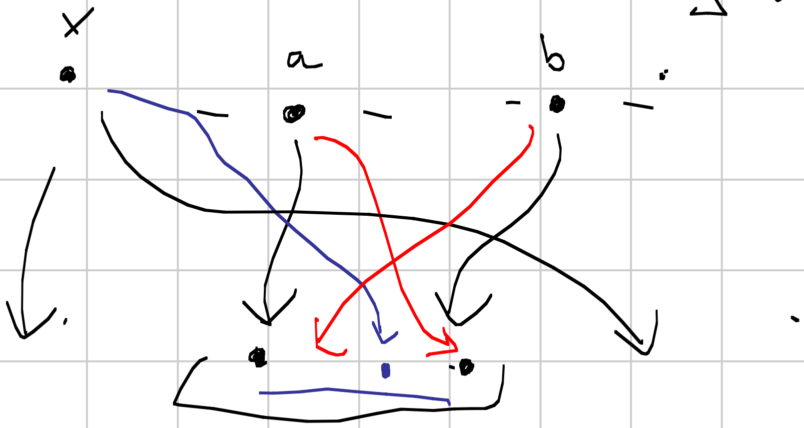
$\parallel$

segno = quella def. prima

identica $\longrightarrow$ 0 inv,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$ scambio $\rightarrow$ 1 inv.

basta dimostrare che con uno scambio il segno cambia



(a,b) si inverte

(x,a) si inverte
$\Updownarrow$
(x,b) si inverte

pari

Con uno scambio cambia il segno.

$(-1)^{\sigma}$

$$\boxed{(-1)^{\sigma}(-1)^{\tau} = (-1)^{\sigma\circ\tau}}$$

CALCOLARE IL SEGNO

$(1\ 2) \longrightarrow -1$

$(1\ 2\ 3) \longrightarrow 1$

$(1\ 2\ 3\ \cdots\ n) \longrightarrow (-1)^{n+1}$

segno di $(1\ 3\ 5)(2\ 4)(6) = -1$

$$\underset{1}{(1\ 3\ 5)}\ \underset{-1}{(2\ 4)}\ \underset{1}{(6)}$$

GIOCO DEL 15

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & \boxed{10} & 11 & 12 \\ \boxed{13} & 15 & 14 & \bullet \end{bmatrix} \quad \bullet = 16 \longrightarrow \text{permutazione dispari}$$

scambi, un numero pari

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & \cdots & & \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{permutazione pari}$$

ASSURDO

$a_1 \le \dots \le a_n$ $\qquad$ $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$

$b_1 \le \dots \le b_n$ $\qquad$ $\sum a_i b_{\sigma(i)}$ massimo

$\sigma = \mathrm{ID}.$

σ $\qquad$ $i < j$ $\qquad$ $\sigma(i) > \sigma(j)$

scambio i, j

$$a_i b_{\sigma(i)} + a_j b_{\sigma(j)} \le a_i b_{\sigma(j)} + a_j b_{\sigma(i)}$$

$$0 \le a_i (b_{\sigma(j)} - b_{\sigma(i)}) + a_j (b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)})$$

$$0 \le \underbrace{(a_i - a_j)}_{\text{negativo}} \underbrace{(b_{\sigma(j)} - b_{\sigma(i)})}_{\text{negativo}}$$

i, j consecutivi che si invertono

$1 \leq 2 \leq \dots \leq n$

$\sigma(1) \leq \sigma(2) \leq \dots \leq \sigma(n)$

identica

ORDINE

σ , $\sigma(\sigma(x))$, ... , $\sigma^k(x)$

$\text{ord}\ \sigma = \min k$ t.c. $\sigma^k = ID$

$\text{ord}\ \sigma \leq n!$

COME LO CALCOLO?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 8 & 7 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}}_{\sigma^2}$$

$$\underbrace{(1\ 7\ 3\ 5)}_{4}\underbrace{(2\ 4\ 6\ 8)}_{4} \qquad (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10\ 11\ 12)$$

$3 \cdot 4 \cdot 5$

$\text{ord} = 60$

ORDINE = m.c.m. lunghezze dei cicli.

$$\frac{a_1 + \dots + a_k}{k} = \frac{n}{k}$$

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \leq \left(\frac{n}{k}\right)^n \quad \text{boh}$$

X casa: trovare tutti gli n
per cui esiste $\sigma \in S_n$
t.c. $\mathrm{ord}(\sigma) = n!$

IMO 1987/1 S_n

~~p~~ $p(k) = \#$ permutazioni con k punti fissi

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p(k) = n!$$

k pt. fissi

punto fisso di σ

num. | coppie (σ, x)

$$\sum_{K} \left| \left(\sigma \text{ con } k \text{ punti fissi}, \; x \text{ t.c. } \sigma(x) = x \right) \right| = n!$$

fisso x $\longrightarrow$ é contato (= lasciato fisso) in $(n-1)!$ permutaz.

n modi

$= n!$

permut. a caso di n elementi

num. medio di cicli?

$$\frac{\sum_{\sigma \in S_n} \text{cicli}(\sigma)}{n!} = (\sigma, c)$$

permut.   ciclo

↳ fisso un ciclo (lungo k) $\longrightarrow$ $\binom{n}{k}(k-1)!$ modi

num. cicli di $(1, \dots, k)$ é $(k-1)!$

DIRTY PHYSICIAN

. . . .

contenuto in $(n-k)!$ permutazioni

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(k-1)!\,(n-k)!$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{\cancel{k!}\,\cancel{(n-k)!}\;k}\,\cancel{(k-1)!}\,\cancel{(n-k)!}$$

$$= n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

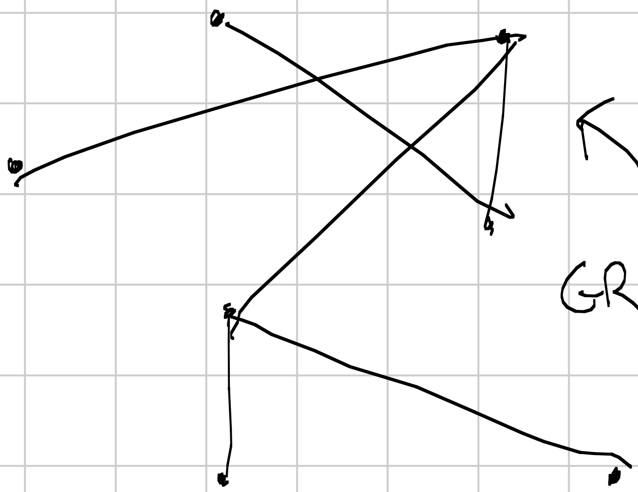
num. medio di cicli $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$

GRAFI

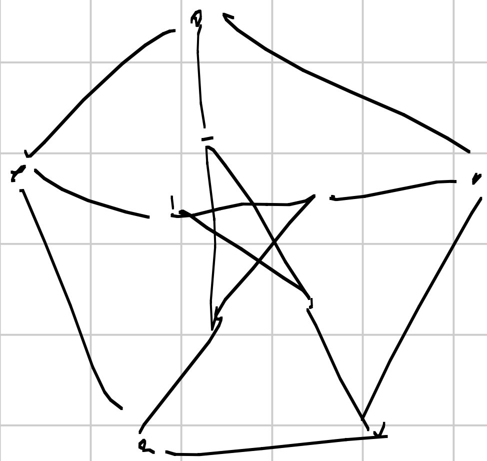
A insieme e un po' di coppie di elementi di A (non ordinate)

vertici

archi



GRAFO

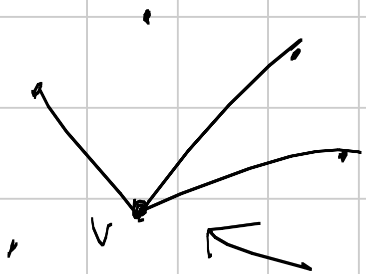


olimpicamente

grafo = amicizie e conoscenze
(e strette di mano)

PROPRIETÁ DI BASE

num. di vertici, n di archi e



$\deg(v)$ = # archi per v

grado medio $= \frac{2e}{n}$

$$\sum_{v \in \text{vertici}} \deg(v) = 2e$$

pari $\Longrightarrow$ ogni grafo ha un num. pari di vertici con grado dispari grafo k-regolare → ogni vertice ha grado k

ogni persona conosce 5 persone
quante possono esserci?

$$\sum deg(v) = 2e$$

5n

$5n = 2e$

n é pari

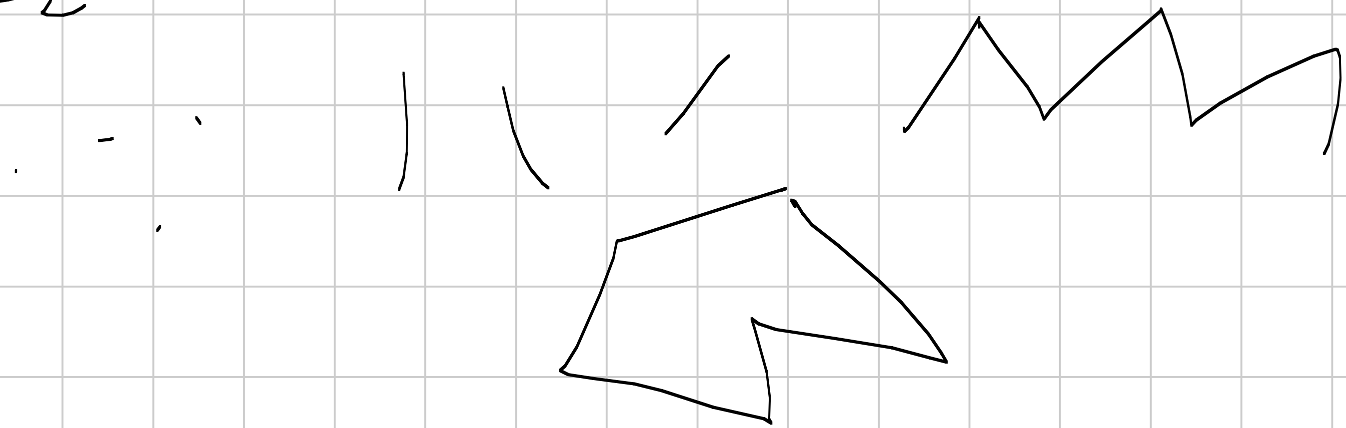
e é multipo di 5

δ Δ

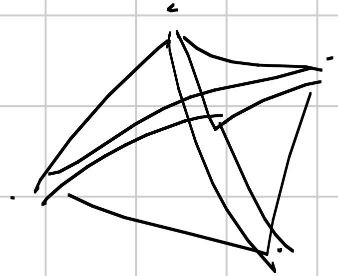
GRADO MINIMO, MASSIMO

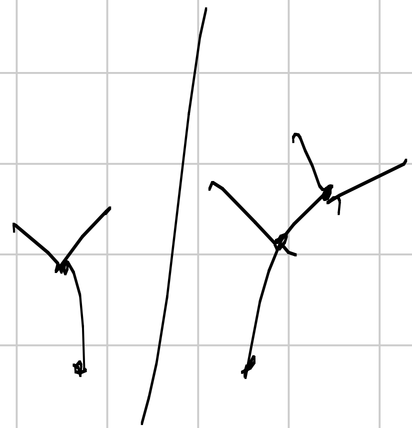
grafi ~~di~~ con $\Delta = 1$

$\Delta = 2$

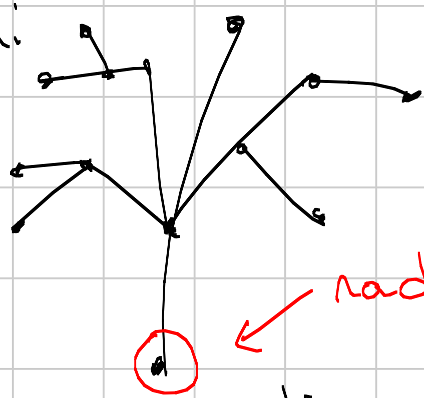


GRAFI SPECIALI

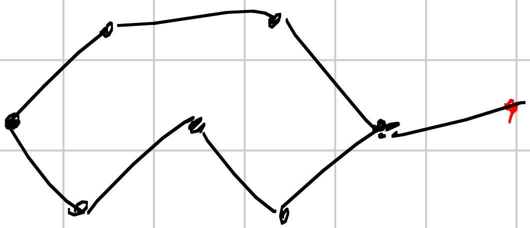




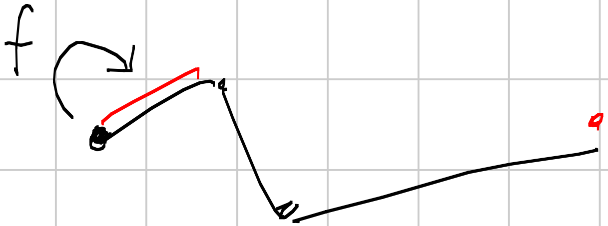
- grafo completo
- albero
  = grafi senza cicli comuni

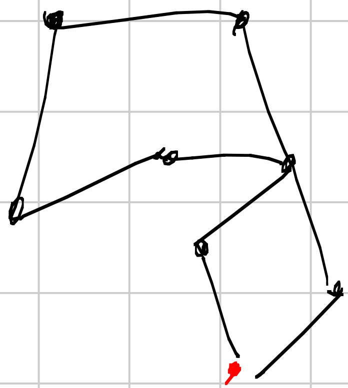


radice



ogni ~~nodo~~ vertice ha un unico percorso verso la radice





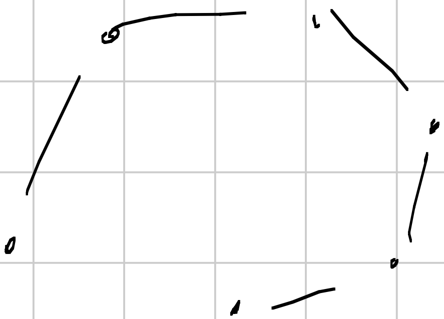
x f é iniettiva

per un albero

$n - 1 = e$

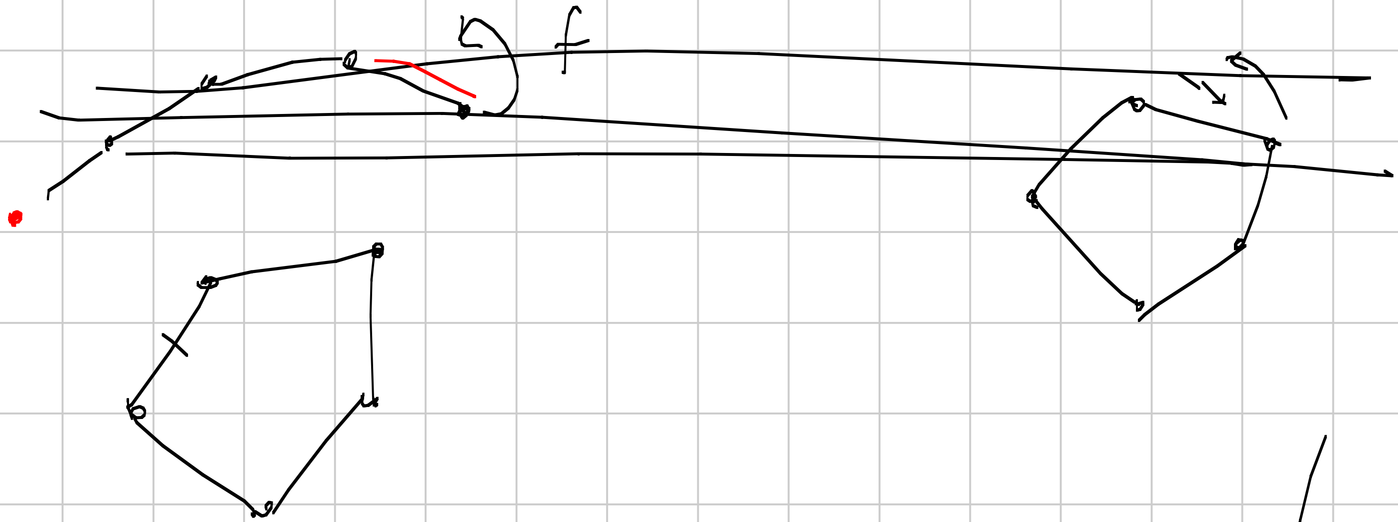
~~PROBL. 6~~

GRAFI CONNESSI = tutti i vertici sono raggiungibili con gli archi

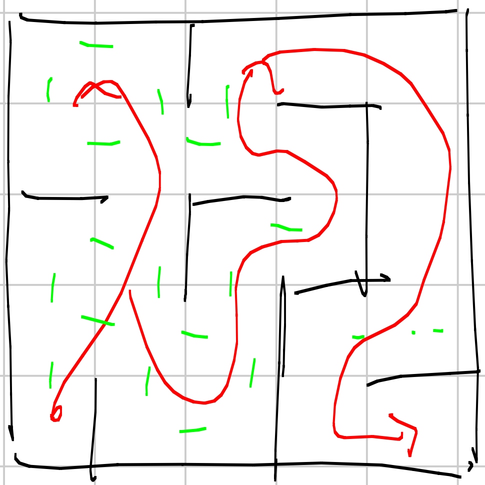


$e \geq n - 1$

$\square$



PROBL. 6



lato 2008

labirinto "connesso"

max numero di lati

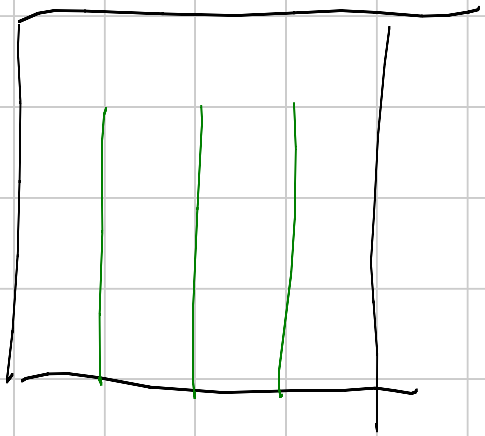
vertici = quadratini $= 2008^2$

= archi

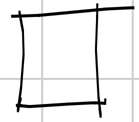
$= 2 \cdot 2008 \cdot 2007$

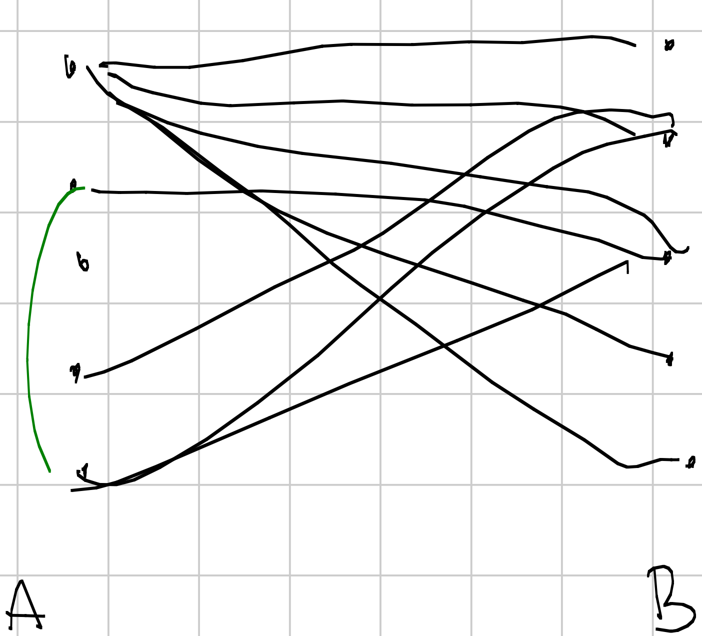
$- \#$ muri

almeno $2008^2 - 1$ archi (connesso) $\Rightarrow$ al più $2 \cdot 2008 \cdot 2007 - 2008^2 + 1$



moni

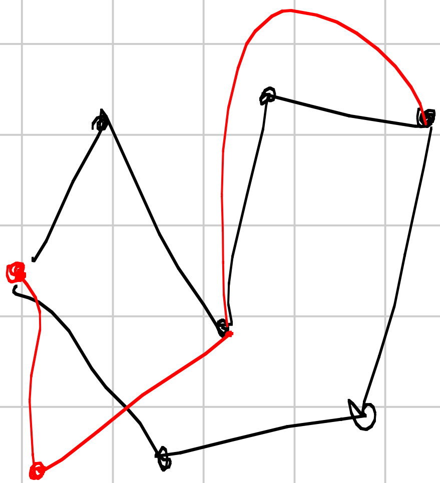




grafi bipartiti

→ senza triangoli,
cicli dispari

senza cicli dispari
⟹ bipartito

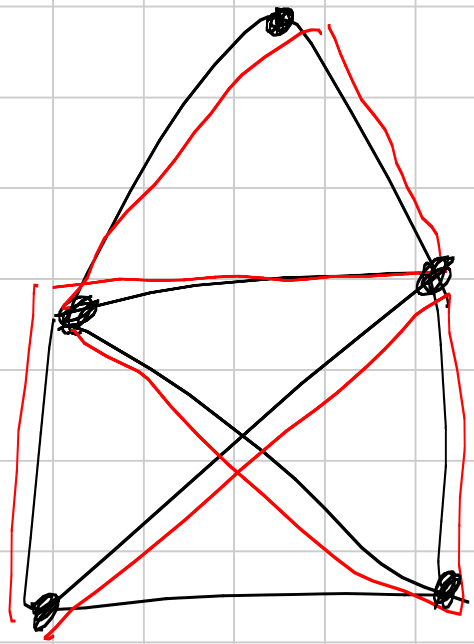


A

B

collegati ad A
con percorso pari

"
dispari

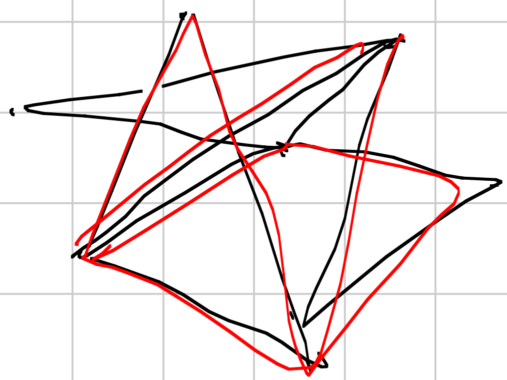


ciclo euleriano
= passo per tutti gli archi
e torno all'origine

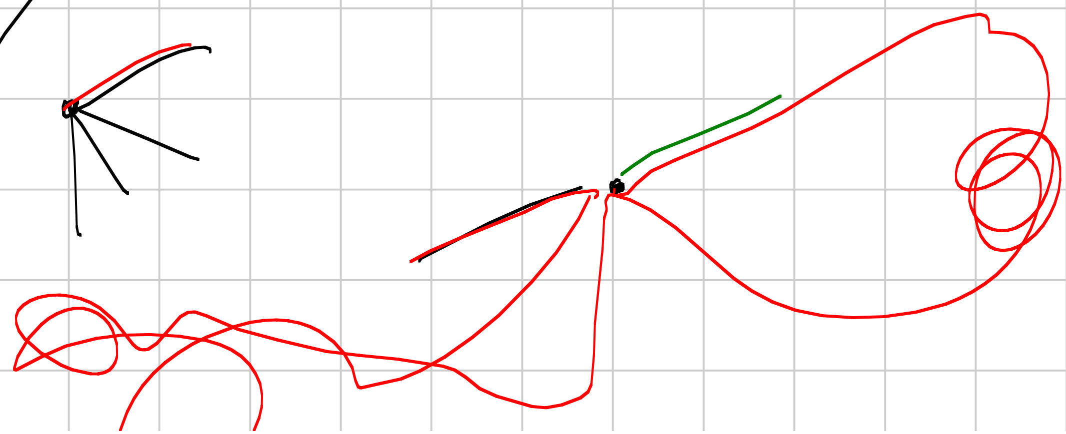
no euleriano

cammino euleriano
= " e non serve tornare all'origine

Condizione necessaria: (e sufficiente)
connesso, $\deg(v)$ è pari $\forall v$.

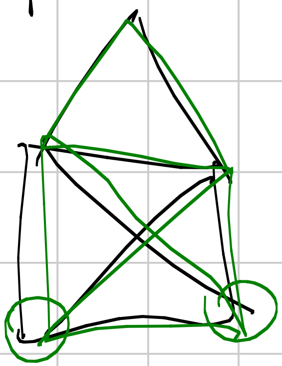


prendo il ciclo euleriano + grande



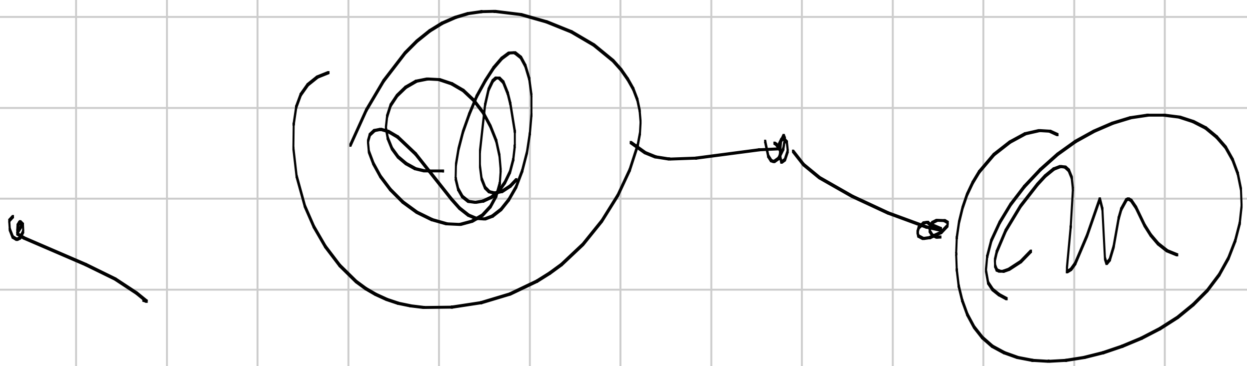
per questioni di parità,
anche andando a caso
riuscirei ad estenderlo

per i cammini: $\iff$ al max 2 di grado dispari

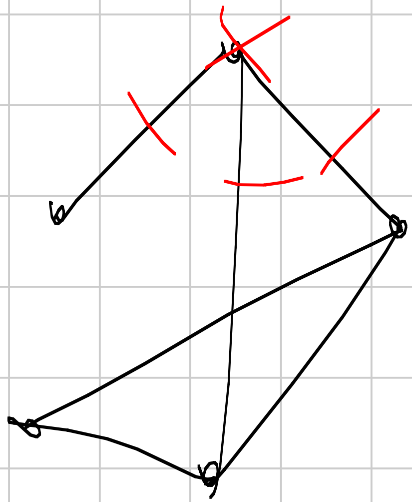


CICLI E CAMMINI
HAMILTONIANI

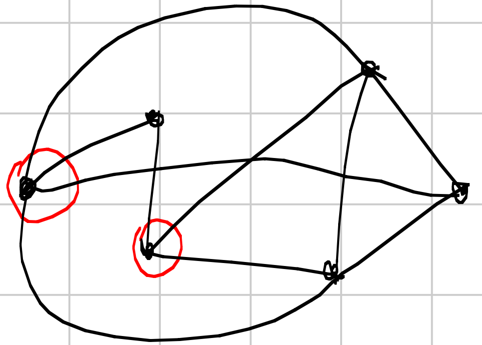
= 1 e 1 sola volta per ogni vertice

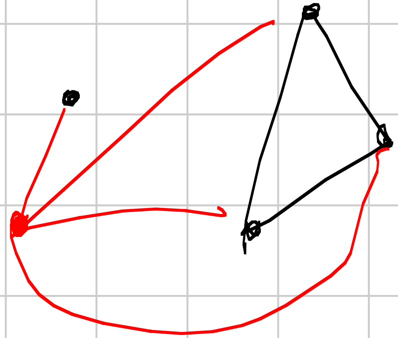


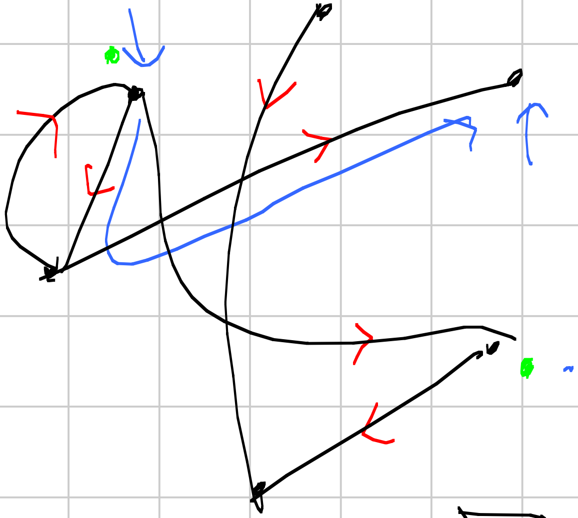
togliendo archi o vertici → sottografo



grafo minore







GRAFI ORIENTATI

$\deg^+(v) = \#$ archi uscenti

$\deg^-(v) = \#$ ... entranti

$$\sum_v \deg^+(v) = \#\text{archi} = \sum_v \deg^-(v)$$

a é raggiungibile da b ?

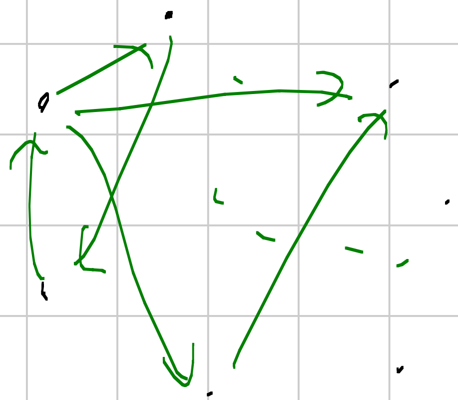
DIRTY

P.

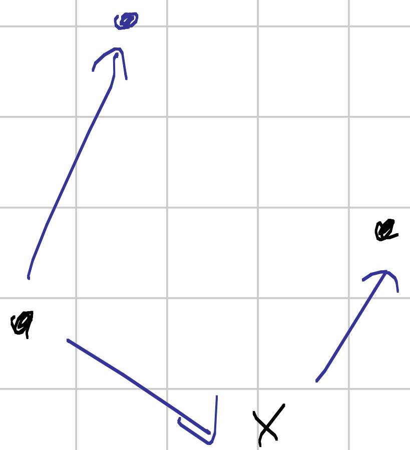
n città

a, b città

$\Rightarrow \exists$ strada a senso unico da una all'altra



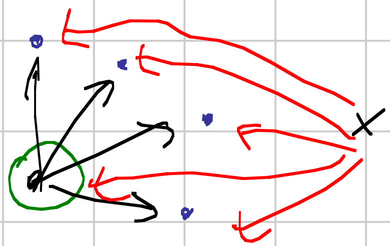
Th. esiste una città da cui posso raggiungere le altre con al più due strade.



× INDUZIONE, ALGORITMO

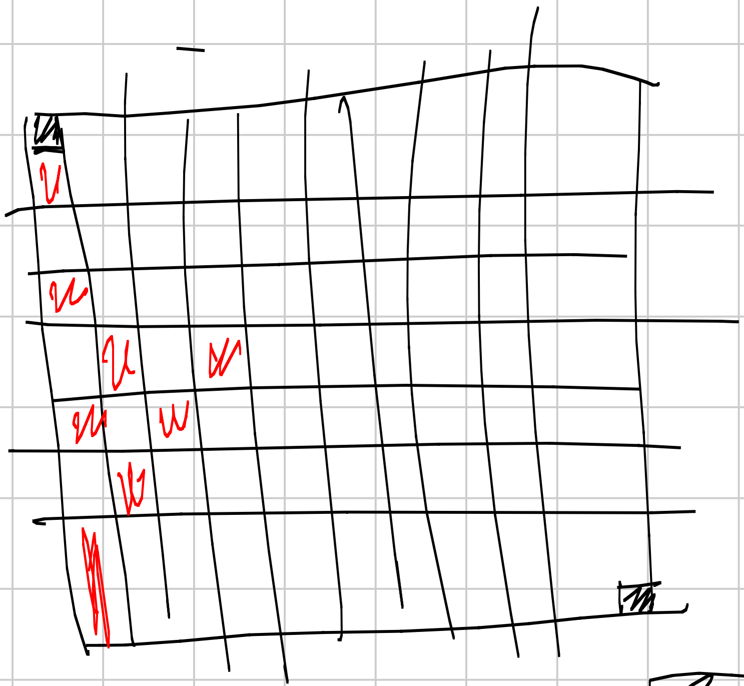
× ESTREMALI, principio di max/min

prendiamo la città da cui escono più strade.



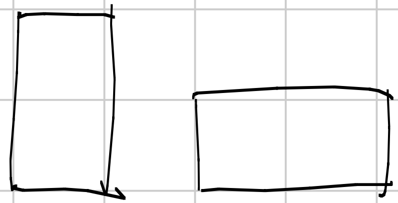
assurdo.

INVARIANTI E COLORAZIONI



quadrato 2008 × 2008 senza 2 vertici

ricoprire con tessere 2×1

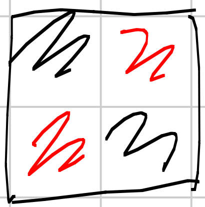


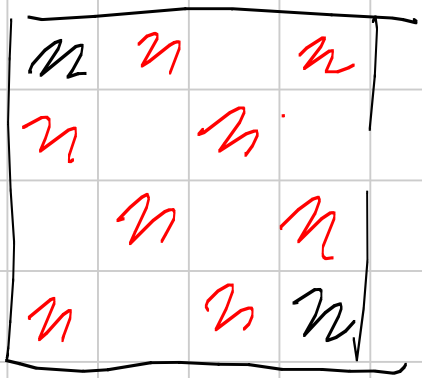
Coloro a scacchiera

↓

+ rosse che bianche

↓





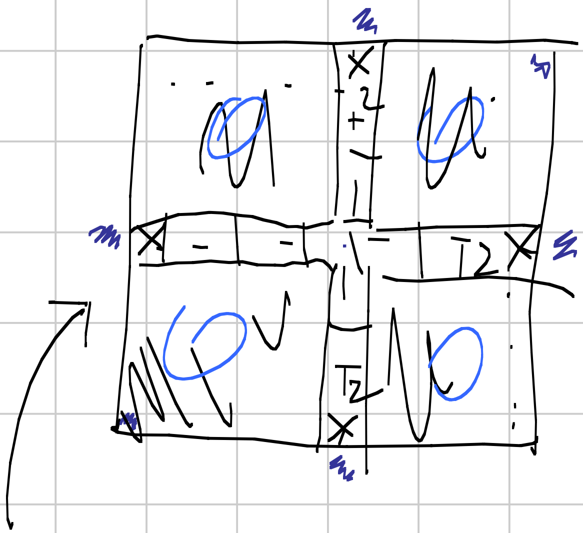
irricopribile

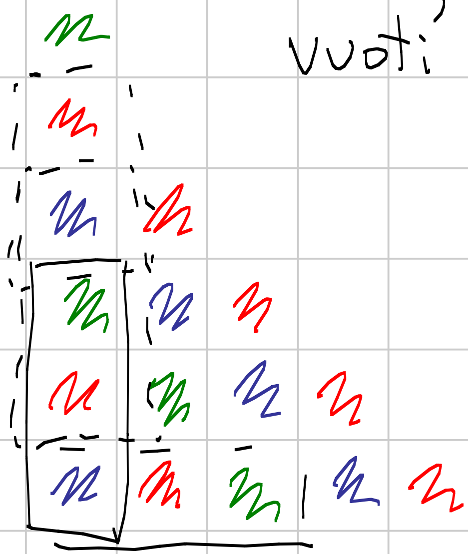
tabella 79 x 79

ricoprirlo con tessere 

× è possibile?

× se no, quanti devo lasciare vuoti al min.?





funziona

ora:

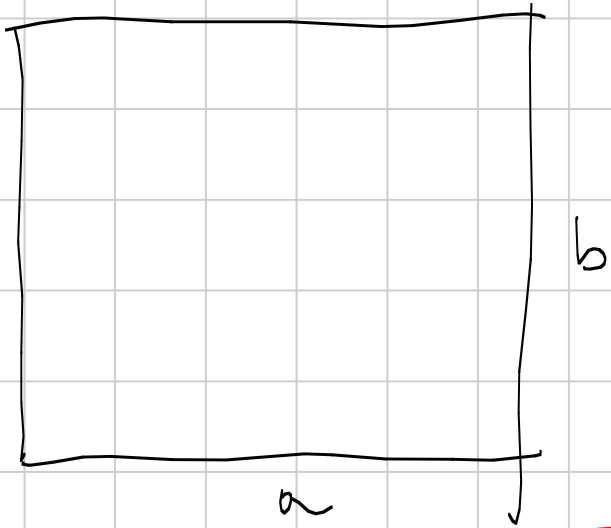
all'inizio: k rosse, k verdi, k+1 blu

k rosse, k verdi, k-3 blu

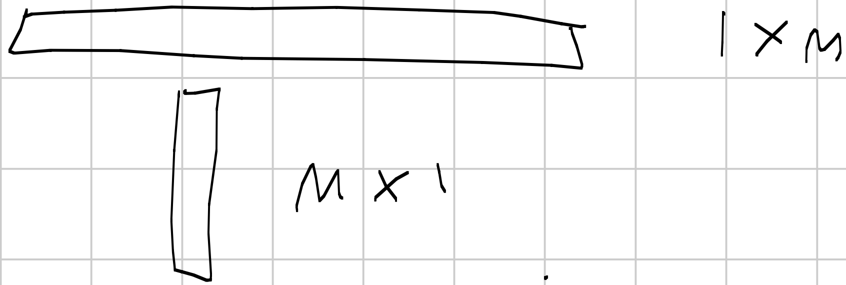
quindi me lascio fuori almeno 3

→ 3 rosse e 3 verdi

→ e posso effettivamente farlo.

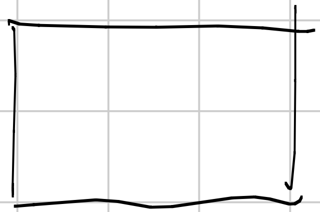


rettangolo $a \times b$



se un lato é multiplo di n → posso

posso → $a \cdot b$ é multiplo di n



COLORAZIONE

$n = 5$

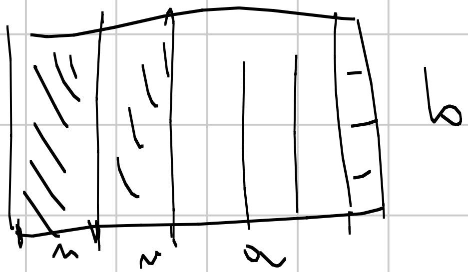
```
1
5 1
4 5 1
3 4 5 1
2 3 4 5 1 2 3 4 ...
1 2 3 4 5 1 2 3 ..
```

$a = kn + a'$

$b = jn + b'$

$1 \leq a' \leq n-1$

b'



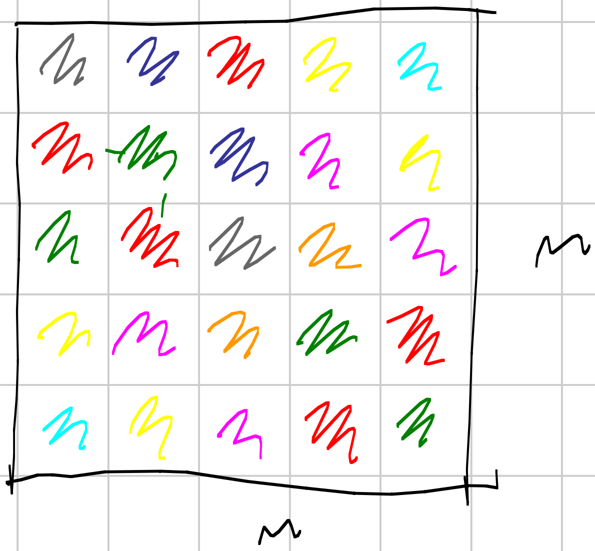
$a' \times b'$

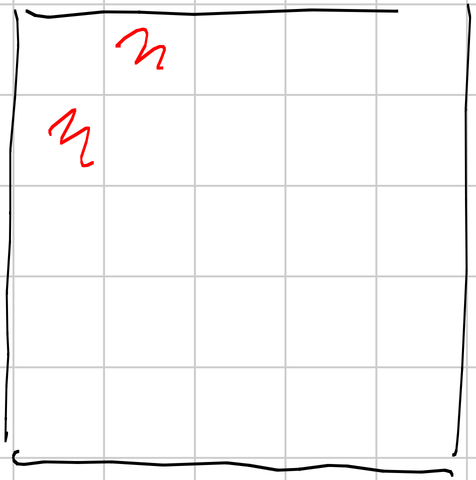
assurdo

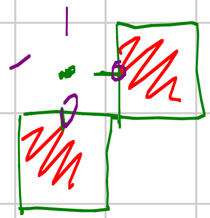
ALTRI INVARIANTI

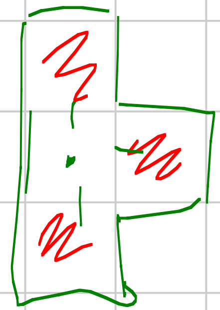
invasione batteriologica

quanti batteri mi servono al minimo per sterminare tutti?









consideriamo il perimetro della zona infetta

→ non aumenta

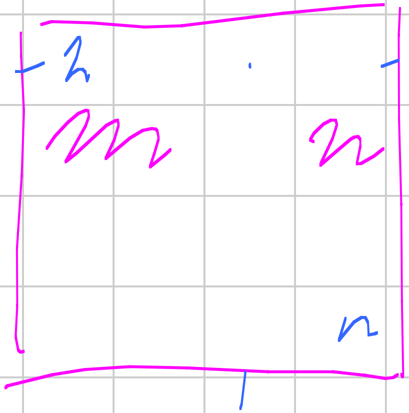
all'inizio é $\leq 4K = 4 \cdot$ batteri

$\Downarrow$

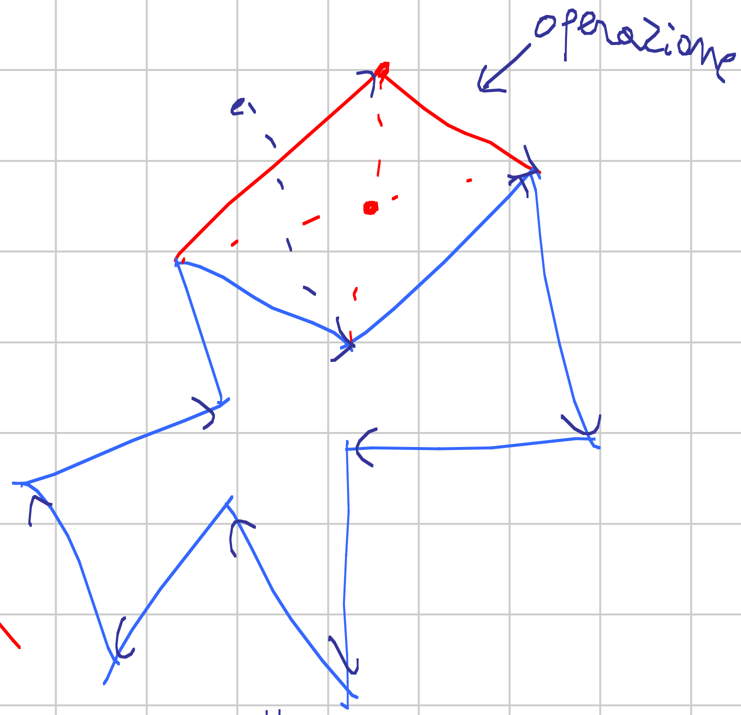
alla fine é $4m$

$4K \geq 4m$

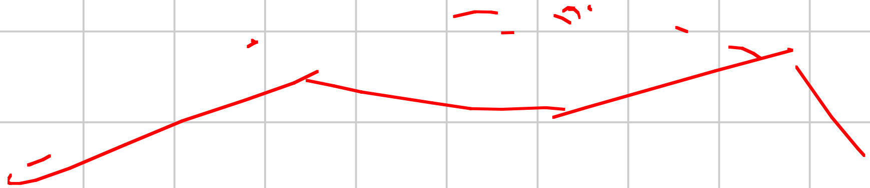
$K \geq m$



invarianti: colorazioni
perimetro
l'area



dim. l'area aumenta



ogni poligono che ottengo
é dato da una permutazione
dei vettori iniziali

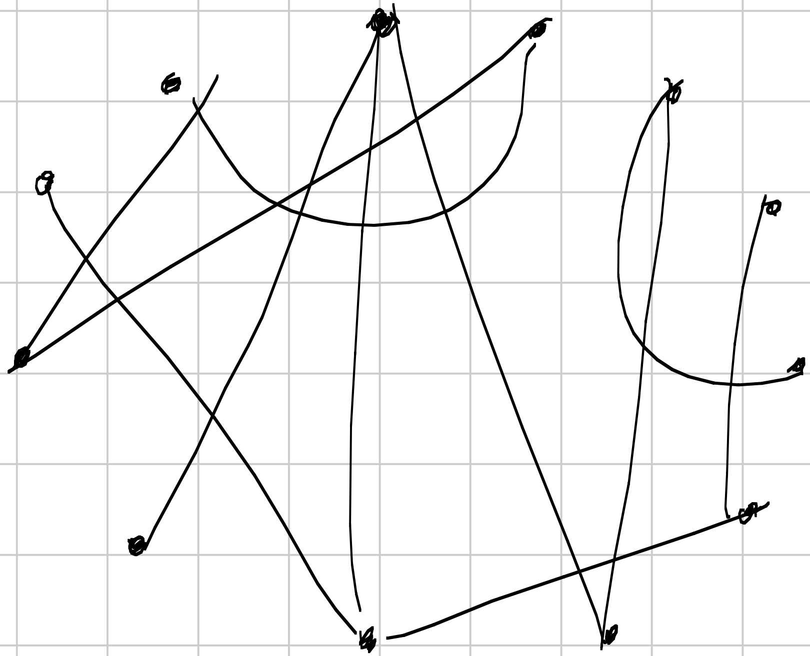
finiti
casi

si ferma $\longrightarrow$ diventa convesso

PROBLEMA 10

12 nani con casette o

ogni giorno un nano si adegua alla maggioranza degli amici.



cerchiamo di definire la felicità dei nani

~~so~~ felicità (nano) = # case dello stesso colore − # case di colore diverso } tra gli amici

$$\sum_{n \in \text{nani}} \text{felicità}(n).$$

K amici in rosa

j amici in blu

$K > j$

il mano é blu $\longrightarrow$ si adegua al rosa

$j - k \longrightarrow k - j$

pisolo é amico di n

$j \quad n \longrightarrow -2$

$k \quad n \longrightarrow +2$

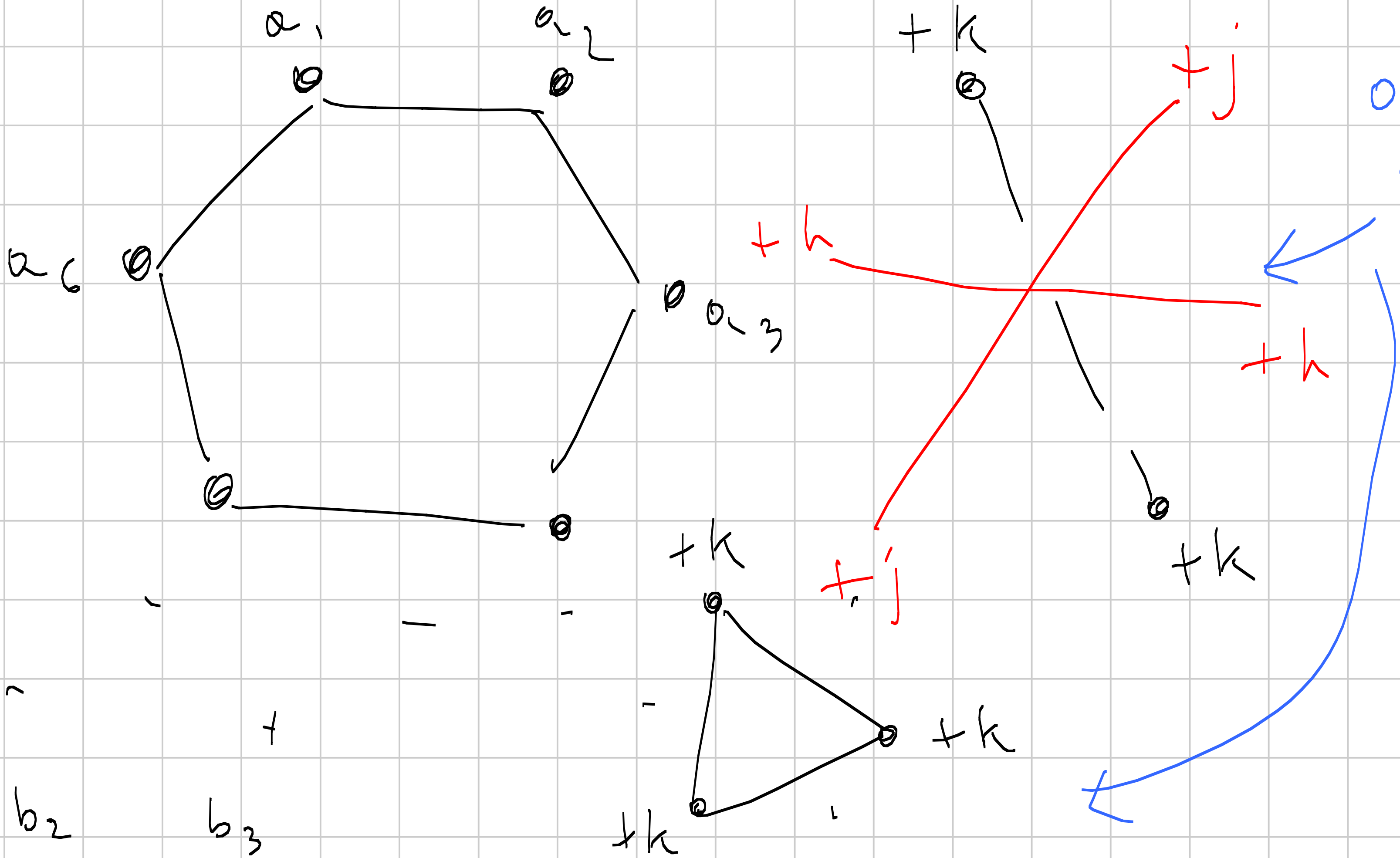
$\sum$ felicitá $\longrightarrow 2(k-j) - 2j + 2k$

$\longrightarrow 4k - 4j \longrightarrow$ aumenta

si stabilizza.

$\square$

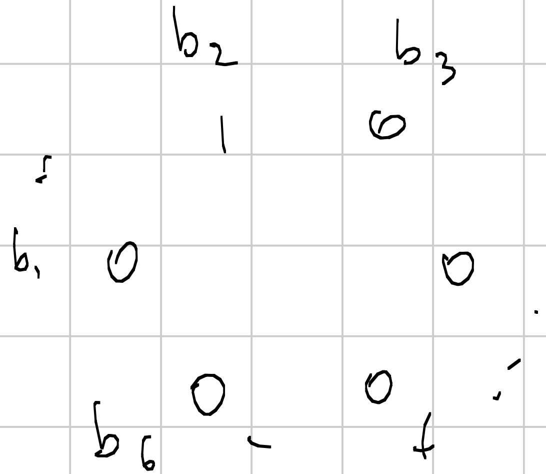
INVARIANTI LINEARI



operazioni permesse

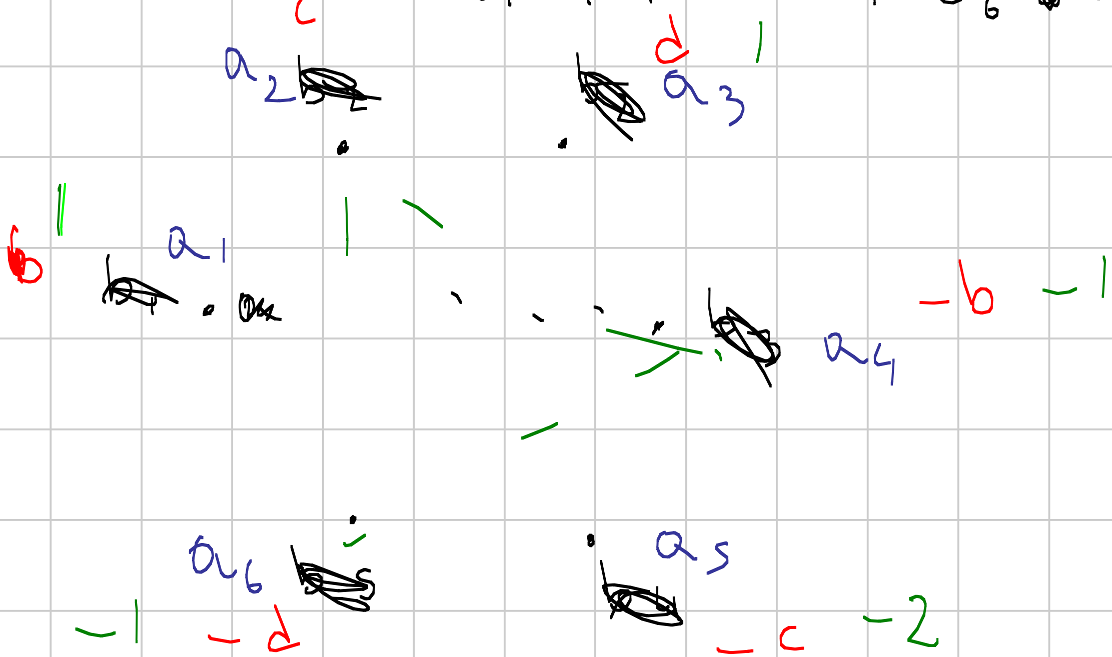
KER

posso sceglierlo ogni volta



$\longrightarrow$ posso raggiungere tutti zeri?

$b_1 a_1 + \dots + b_6 a_6$ non cambia.



$$a_1 + 2a_2 + a_3 - a_4 - 2a_5 - a_6$$

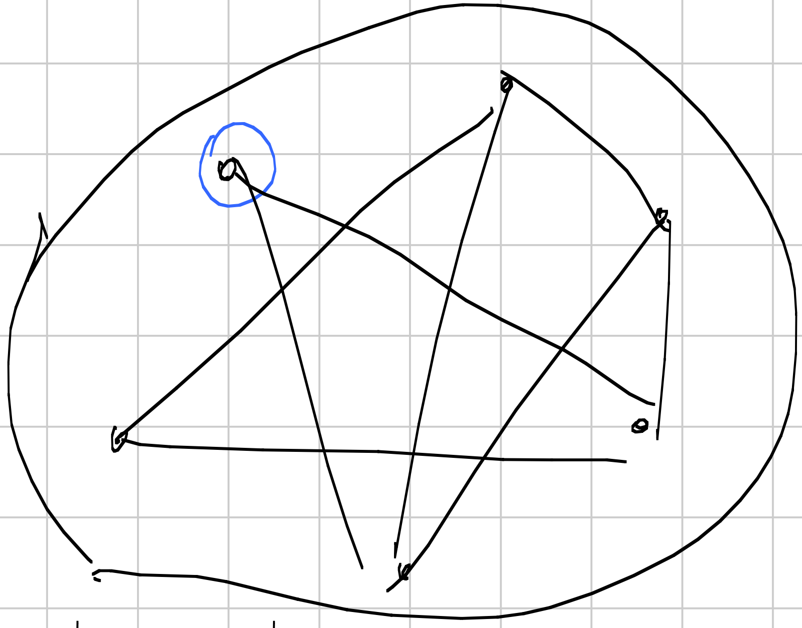
$\uparrow$

invariante

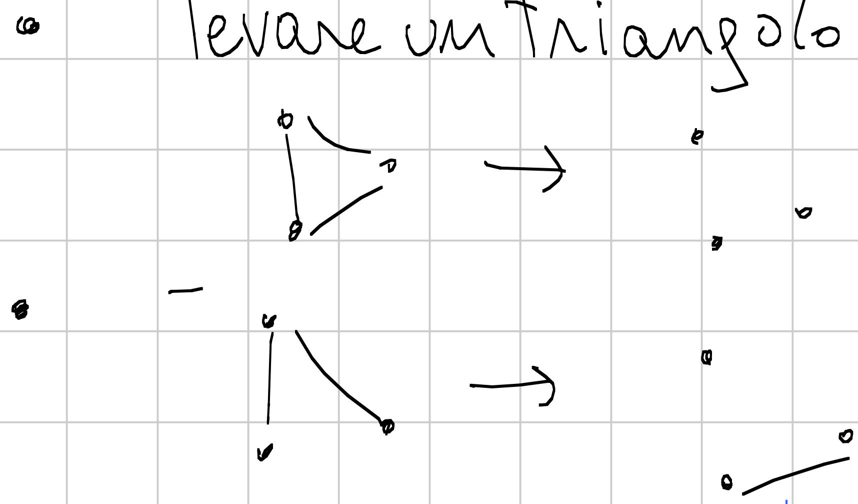
PROBL. 8 (INVARIANTI DI PARITA')

Alberto

Barbara



levare un triangolo



-3

-1

Th. il vincitore non dipende dalla strategia

il grado di un vertice non cambia di parità

a vertici pari   b vertici dispari

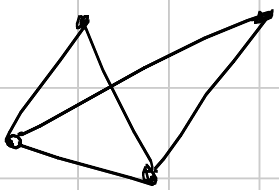
alla fine, gradi solo 1 e 0

ℓ lati (inizio)

$\downarrow$

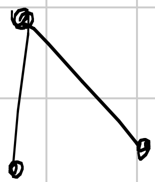
$\frac{b}{2}$ (fine)

oss. a ogni mossa cambia la parità dei lati



parità mosse = parità $\left(\ell - \frac{b}{2}\right)$

$$= \sum_{v \in V} \left\lfloor \frac{\deg(v)}{2} \right\rfloor$$



(sol. di Julio che osserva come "invariante" che cambia sempre di parità ed è determinato all'inizio e fine)

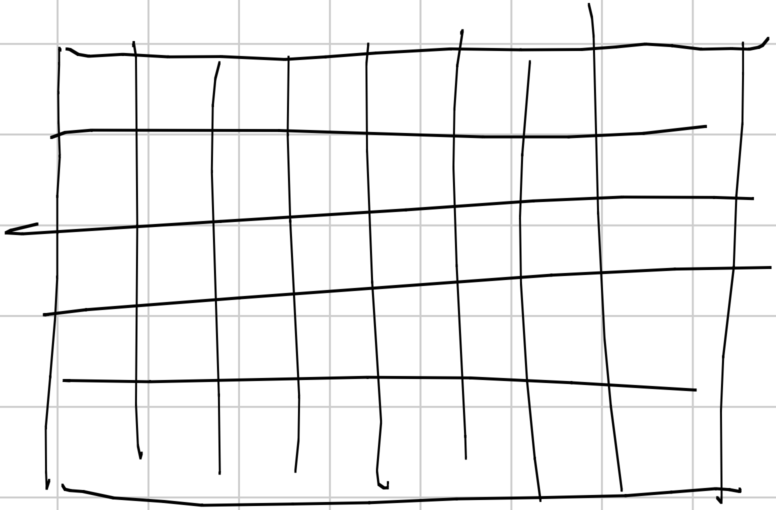


tabella $n \cancel{x} \times m$

con numeri reali dentro

OPERAZIONI:

cambiare il segno di una riga o colonna

TESI:

raggiungo una conf. in cui

$\forall$ riga, colonna $\quad \sum$ riga ≥ 0

e $\sum$ colonna ≥ 0

STRATEGIA "CASUALE": se $\sum$ riga < 0, la inverto

o colonna

$\sum$ tutti i numeri cresce $\rightarrow$ fine

della registrazione