GEOMETRIA 2

Titolo nota 09/09/2008

GEOMETRIA → SINTETICA (EUCLIDEA) G3
→ CALCOLO TUTTO (TRIGONOMETRICO) G1
→ ALGEBRIZZAZIONI G2

ALGEBRIZZAZIONI → ANALITICA
→ VETTORI
→ NUMERI COMPLESSI

TRILINEARI

PROIETTIVA

TUTTI QUESTI METODI POSSONO CONVIVERE IN UNA SOLUZIONE

ANALITICA

Eq. retta nel piano $\qquad y = \boxed{m}x + n \qquad ax+by+c=0$

$\uparrow$ coeff. ang.

rette parallele : stesso m

rette $\perp \qquad m_2 = -\frac{1}{m_1}$

Eq. circonferenza $\qquad \underbrace{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}_{\text{Distanza}^2 \text{ di } (x,y) \text{ da } (x_0,y_0)} = R^2$

Raggio : $R \qquad$ Centro : (x_0, y_0)

$x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad$ (davanti a x^2 e y^2 stesso coeff. che possiamo sempre supporre $=1$ dividendo)

Occhio: non per tutti i valori di a, b, c l'eq. rappresenta una circonferenza

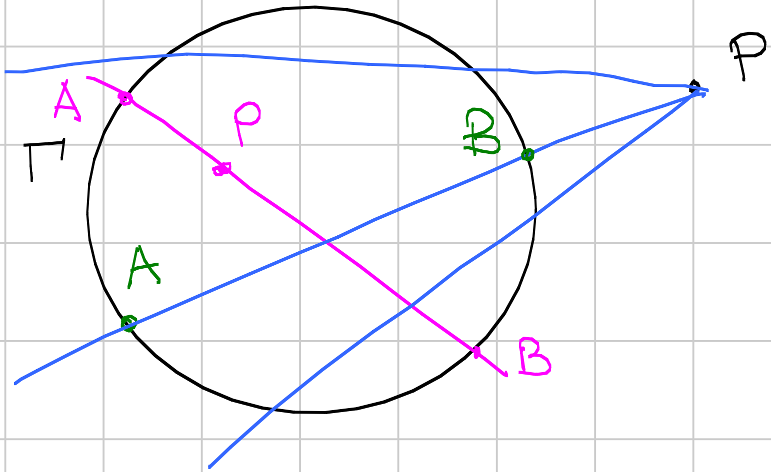
$$x^2 + 2\,\frac{a}{2}\,x + \frac{a^2}{4} \quad + y^2 + 2\,\frac{b}{2}\,y + \frac{b^2}{4} + c = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \underbrace{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

Centro: $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ $\qquad$ R^2 dunque deve essere > 0

— o — o —

Potenza di un p.to risp. ad una circ.

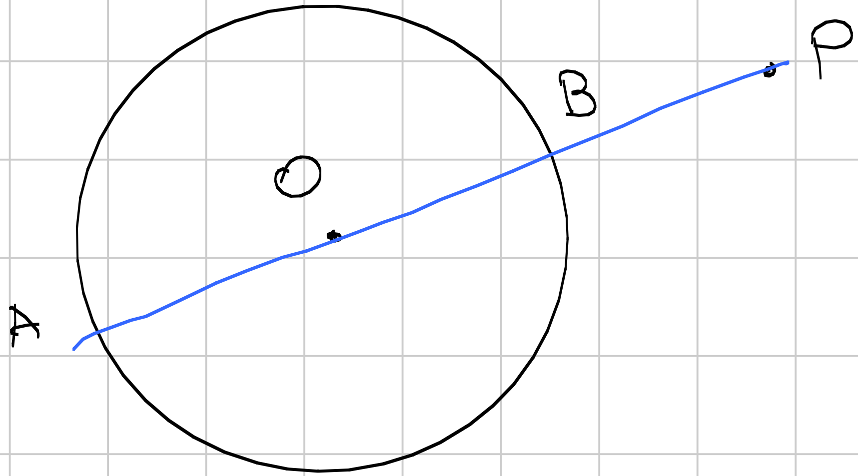


$$\mathrm{Pow}_\Gamma(P) = \underbrace{PA \cdot PB}$$

Non dipende dalla retta scelta

$\Gamma : \quad x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad P:(x_0,y_0)$

$\mathrm{Pow}_\Gamma(P) = |x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c|$ (basta sostituire)



$d = OP$

$PA \cdot PB = (d+R)(d-R)$
$= |d^2-R^2|$

Siano c_1 e c_2 le coordinate del centro

$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=R^2 \qquad (x,y) \to (x_0,y_0)$

$$\underbrace{(x_0-c_1)^2+(y_0-c_2)^2}_{d^2} = \underbrace{R^2}_{R^2}$$

$\mathrm{Pow}_\Gamma(P) = d^2 - R^2 = (x_0 - c_1)^2 + (y_0 - c_2)^2 - R^2 = 0$,
cioè l'eq. della circ. in cui ho sostituito x_0 e y_0.

Occhio: funziona se l'eq. inizia con x^2+y^2

Asse radicale Date 2 circ. Γ_1 e Γ_2 è il luogo dei p.ti P tali che

$$\mathrm{Pow}_{\Gamma_1}(P) = \mathrm{Pow}_{\Gamma_2}(P) \qquad P = (x, y)$$

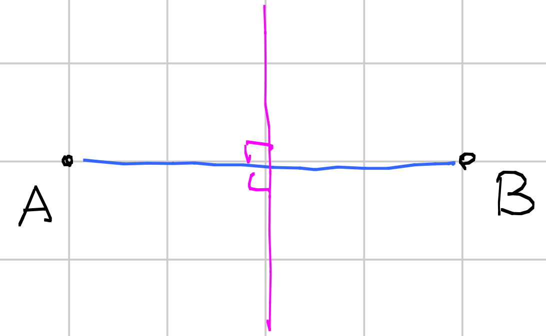
$\Gamma_1 : x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1 = 0$ $\qquad \mathrm{Pow}_{\Gamma_1}((x,y))$

$\Gamma_2 : x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2 = 0$ $\qquad \mathrm{Pow}_{\Gamma_2}((x,y))$

Asse radicale $(a_1-a_2)x + (b_1-b_2)y + (c_1-c_2) = 0$
è una retta !!

Luoghi geometrici : A e B fissati e distinti.

P t.c. $AP = BP$ asse di AB



P t.c. $AP = \lambda BP$ (λ reale >0 FISSATO)

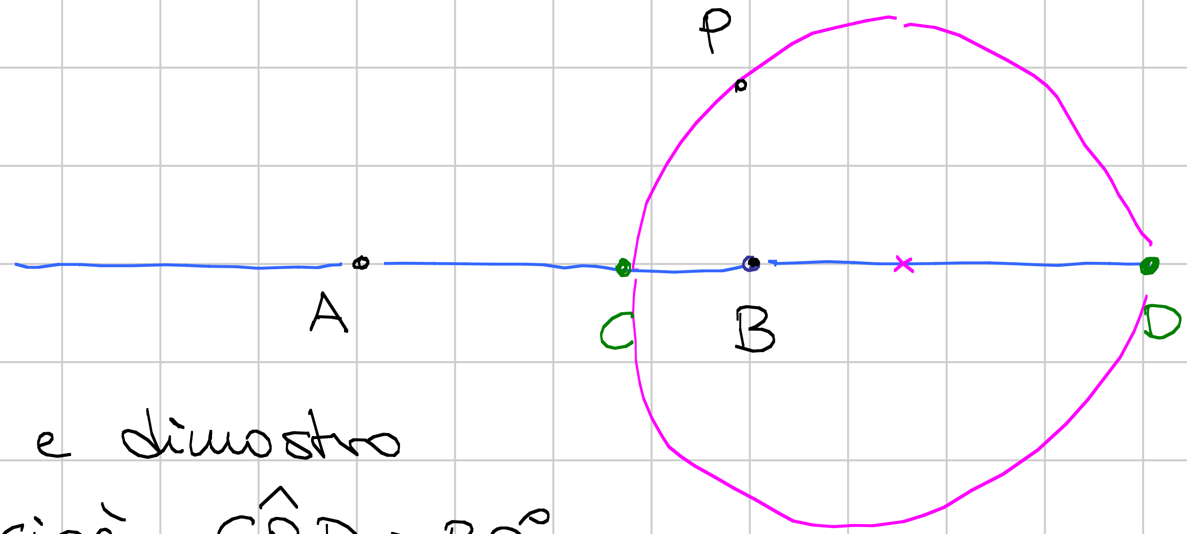
Il luogo è una circonferenza (circ. di APOLLONIO)

$\boxed{\text{Dim.1}}$ $A = (a_1, a_2)$ $B = (b_1, b_2)$ $P = (x, y)$

$AP^2 = (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2$ $AP^2 = BP^2 \boxed{\lambda^2}$

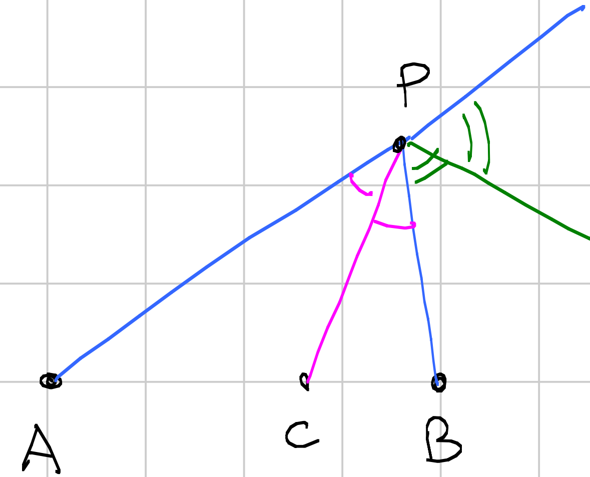
$BP^2 = (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2$ Se $\lambda \neq 1$ i termini in x^2 e y^2 non se ne vanno e hanno lo stesso coeff. $\Rightarrow$ eq. di una circonferenza (serve anche che non c'è xy)

$\boxed{\text{Dim } 2}$ $(\lambda = 2)$



$AP = 2BP$

Prendo P sul luogo e dimostro che sta sulla circ., cioè $C\hat{P}D = 90°$



$$\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{CB} = \lambda$$

$\Rightarrow$ PC è bisettrice

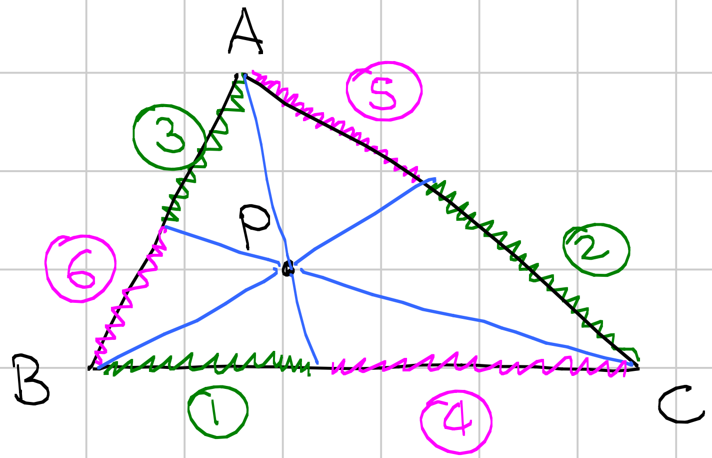
$$\frac{AP}{PB} = \frac{AD}{DB} = \lambda$$ $\Rightarrow$ PD bisettrice esterna

$$\Rightarrow \quad C\hat{P}D = 90°$$

TEOREMA CEVA

Prodotto 1 · 2 · 3 =

Prodotto 4 · 5 · 6

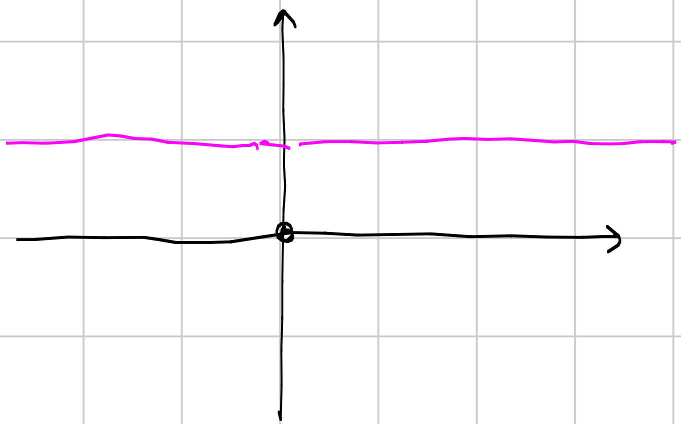


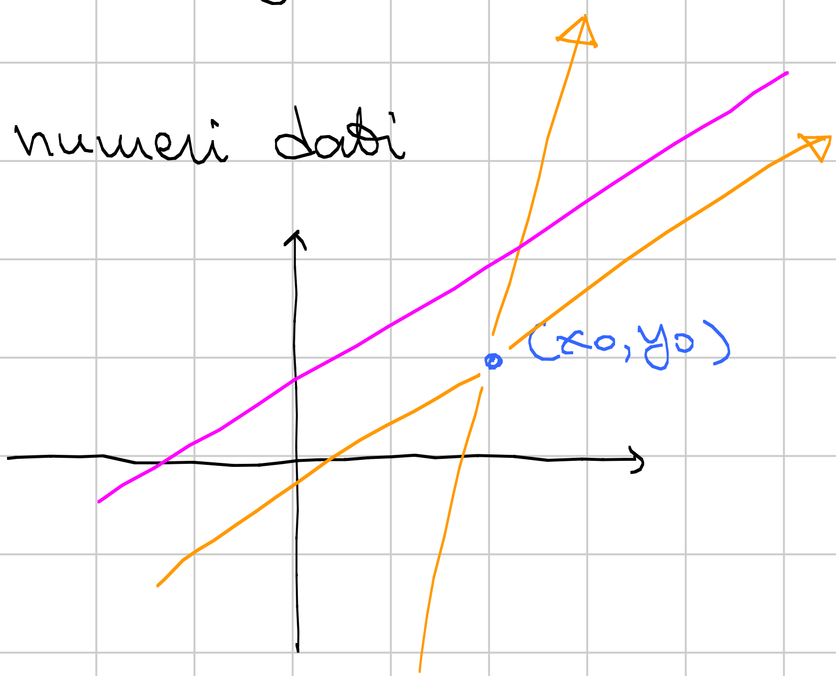
AFFINITÀ

Trasformazione del piano

$$(x,y) \to (x_0 + ax + by,\ y_0 + cx + dy)$$

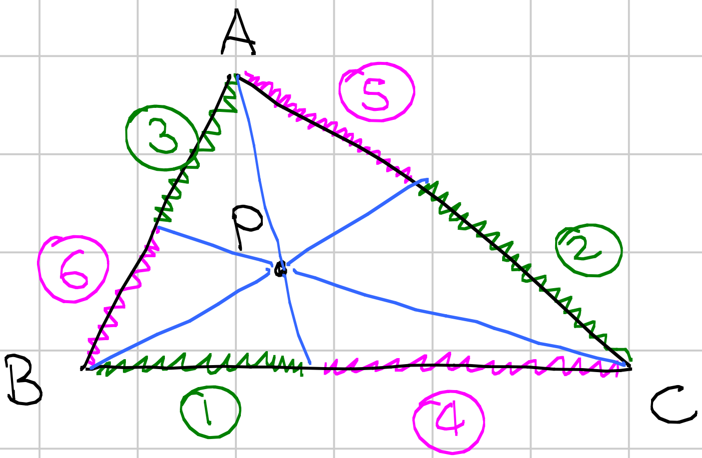
dove a, b, c, d, x_0, y_0 sono numeri dati





Proprietà delle affinità

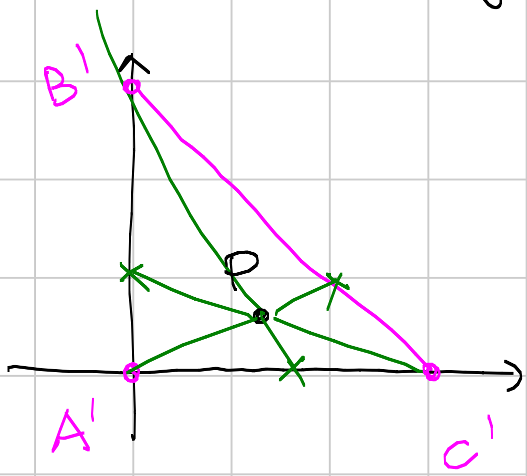
- rette parallele vanno a finire in rette parallele
- angoli, lungh., aree NON si conservano
- si conservano i RAPPORTI tra le aree
- si conservano i RAPPORTI tra le lunghezze di segmenti PARALLELI
- possiamo mandare 3 punti A, B, C in 3 punti A', B', C' dati (poiché non allineati sia in partenza sia in arrivo)



$$\boxed{\frac{1}{4}} \cdot \boxed{\frac{2}{5}} \cdot \boxed{\frac{3}{6}} = 1$$

invarianti per affinità

Posso quindi fare la dim. nel caso più comodo

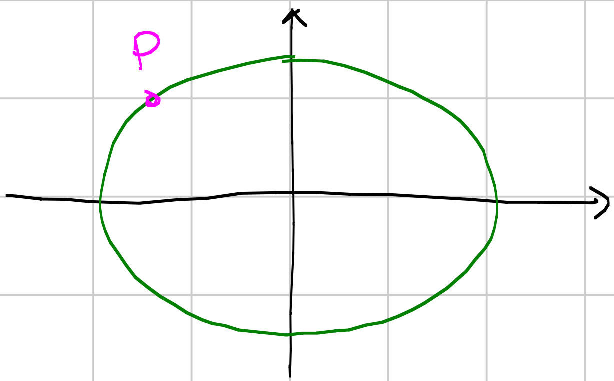


Mando ABC $\rightarrow$ A'B'C' (POSSO)

P finirà in un p.to di coordinate (a, b)

Calcolo le coordinate e finisco.

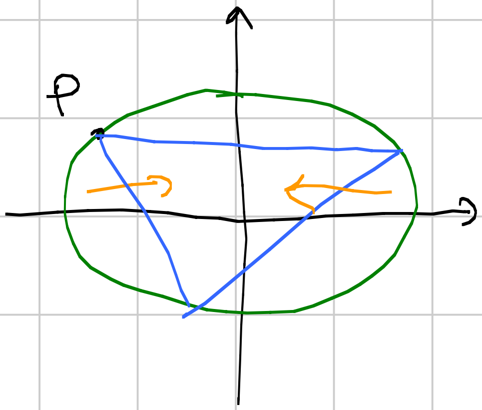
— o — o —



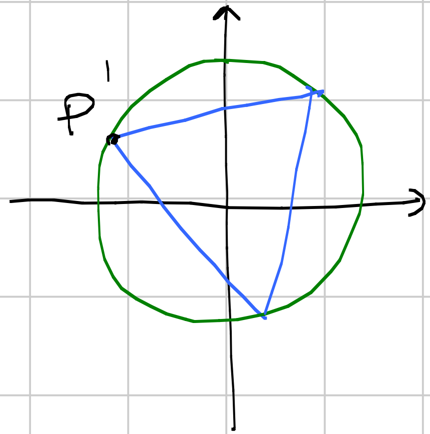
Domanda: consideriamo, tra tutti i triangoli con vertici sull'ellisse, quelli di area massima.
Quanti sono?

Sono infiniti, ma per ogni P ce n'è esattamente uno con vertice in P.

Dim Con una affinità mando l'ellisse in un cerchio



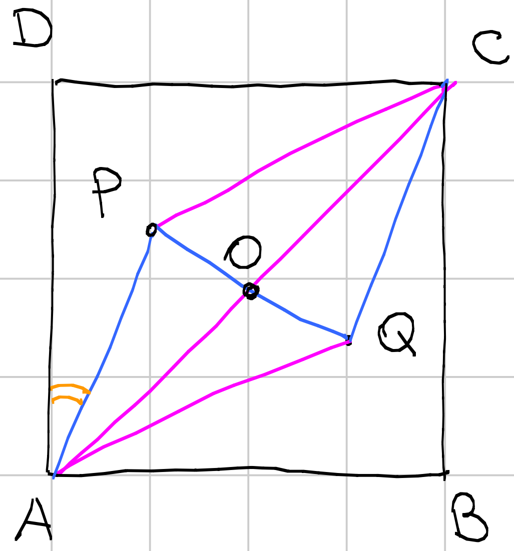
$$(x,y) \to (\lambda x, y)$$



Nella circ. c'è un unico Δ di area max con vertice in P'. Tornando indietro ottengo l'unico Δ di area max nell'ellisse.

Questo perché l'affinità conserva il rapporto fra le aree.

Problema G2 - 10



$AP = PQ = QC$

$AP \parallel QC$

$APCQ$ parallelogramma (lati opposti $\parallel$ e $=$)

$\Rightarrow$ O (centro del $\square$) è p.to medio di PQ

$\Rightarrow$ $AP = 2OP$ $\Rightarrow$ P sta sulla circ. di Apollonio con p.ti fissi A ed O e parametro 2

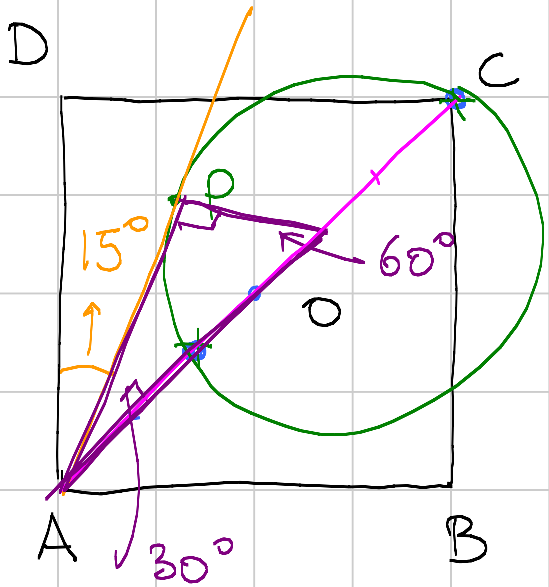
Occhio: bisogna dimostrare anche l'altra inclusione, cioè che ogni p.to della circ. sta sul luogo.

$\widehat{APO'} = 30°$ (propr. tangente)

$O'P = \frac{1}{3} AC$ = raggio

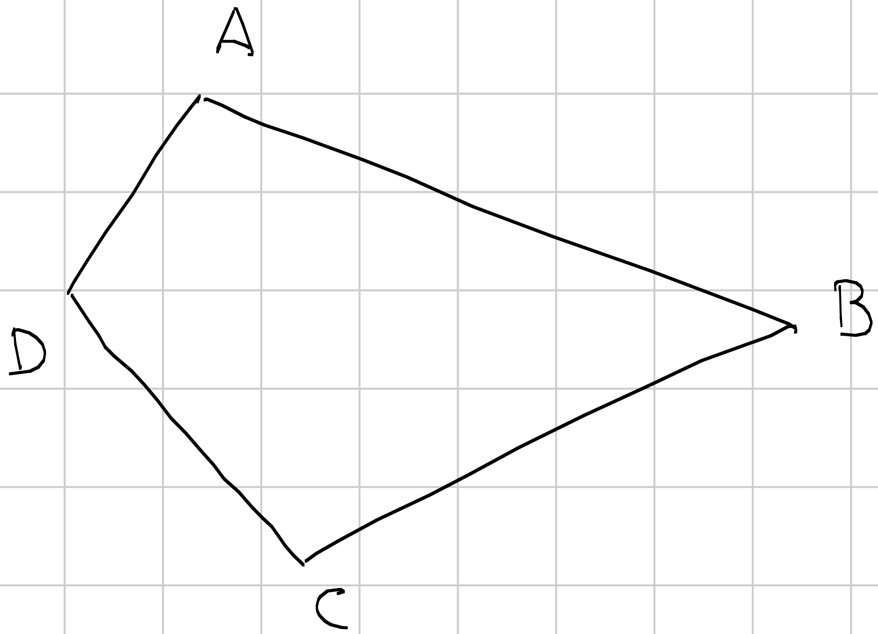
$AO' = \frac{2}{3} AC$

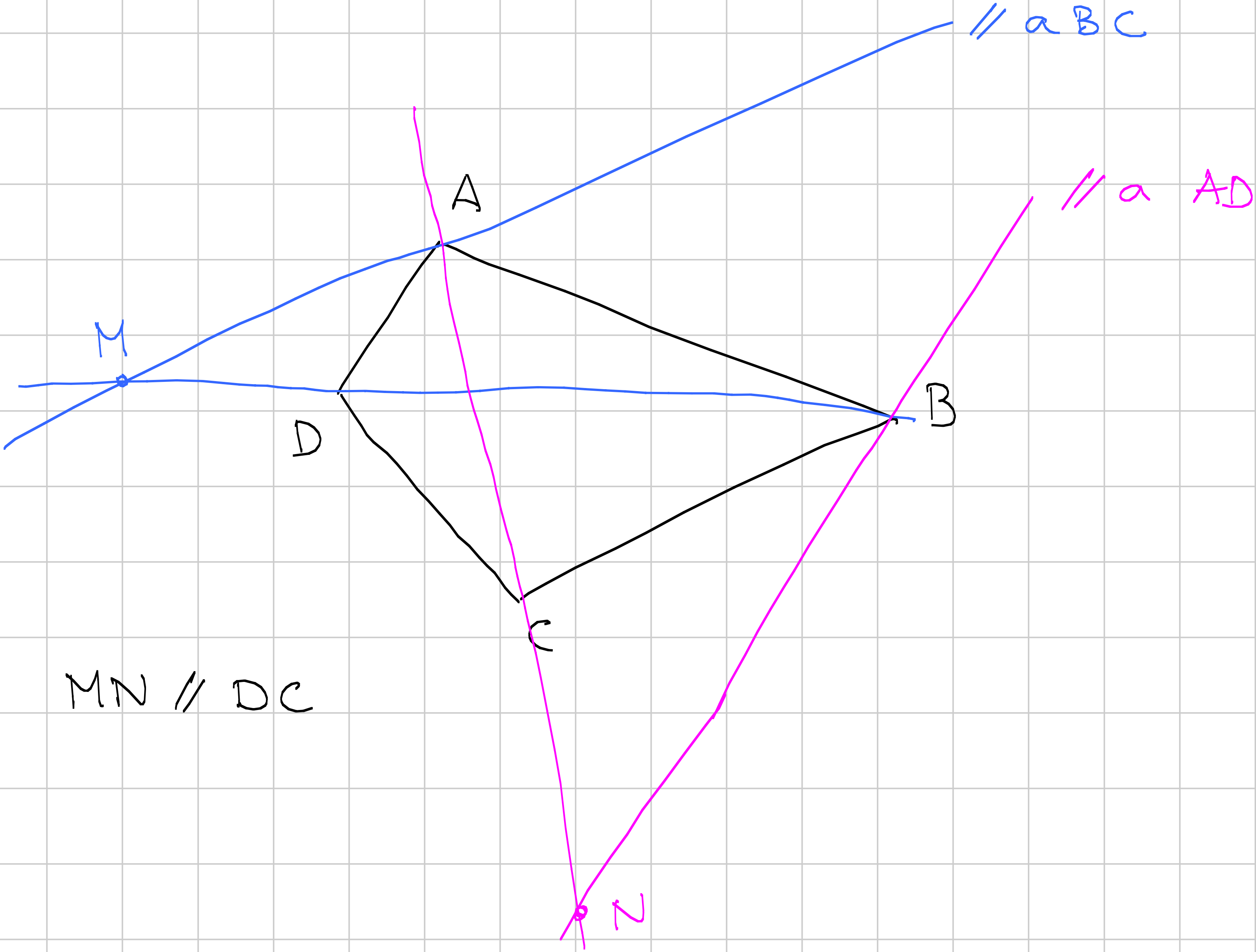
$\Rightarrow AO' = 2O'P$



— o — o —

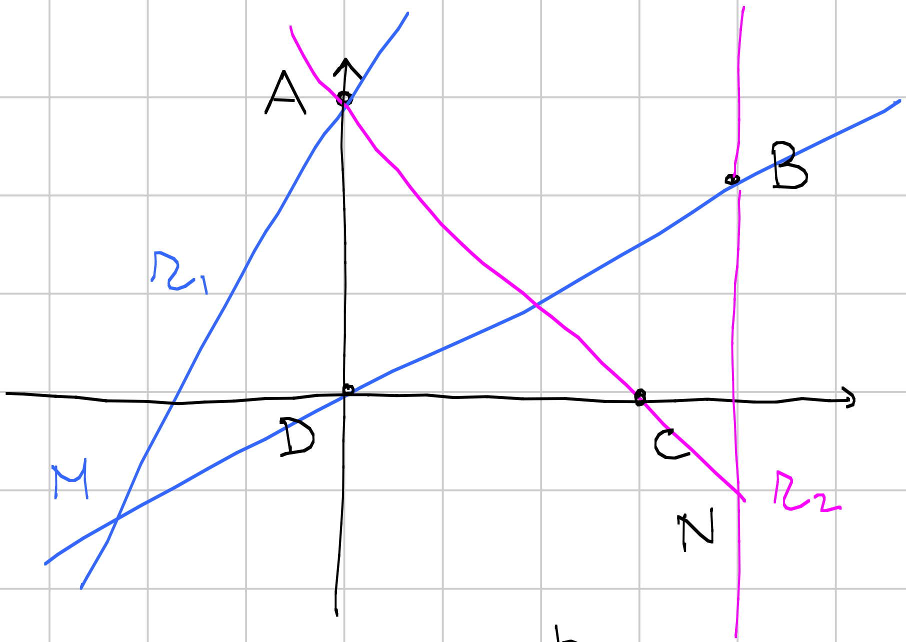
Problema G2-9





Tesi: MN // DC

Trattandosi solo di parallelismi si possono usare le affinità.



$D = (0,0)$

$C = (1,0)$

$A = (0,1)$

$B = (a,b)$

Eq. BD : $y = \frac{b}{a}x$

Eq. r_1 : $y = 1 + \frac{b}{a-1}x$

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = 1 + \frac{b}{a-1}x \end{cases}$$

$x = \frac{a}{b}y$

$y = 1 + \frac{\cancel{b}}{a-1}\frac{a}{\cancel{b}}y$

$y\left(1 - \frac{a}{a-1}\right) = 1$; $y\frac{-1}{a-1} = 1$

$\boxed{y = 1-a}$

y di M

$$\begin{cases} x = a & \text{Equazione di } r_2 \\ y = 1-x & \text{Equazione di } AC \end{cases}$$

$$\boxed{y = 1-a}$$

y di N

MN // asse x

VETTORI

$\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$ $\vec{Y} = (y_1, \dots, y_n)$

$\vec{X} + \vec{Y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$\lambda \vec{X} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ λ numero

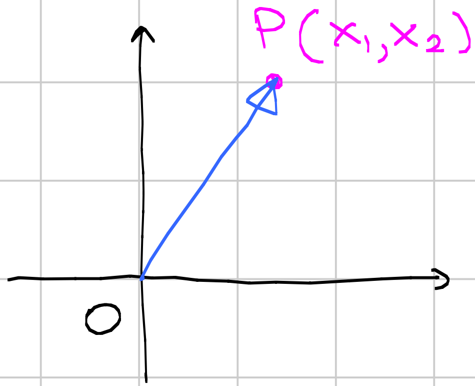
<u>Norma</u> di un vettore $\|\vec{X}\| = |\vec{X}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

(distanza dall'origine)

<u>Distanza</u> tra $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ $= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$

$= \|\vec{X} - \vec{Y}\|$

Prodotto scalare tra 2 vettori



$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = (\vec{X}, \vec{Y}) = \vec{X} \cdot \vec{Y} =$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Formula utile: $\vec{X} \cdot \vec{Y} = \|\vec{X}\| \cdot \|\vec{Y}\| \cdot \cos\theta$

angolo compreso tra i 2 vettori

Dimostrazione in $\mathbb{R}^2$

① il prodotto scalare permette di tirare fuori le costanti

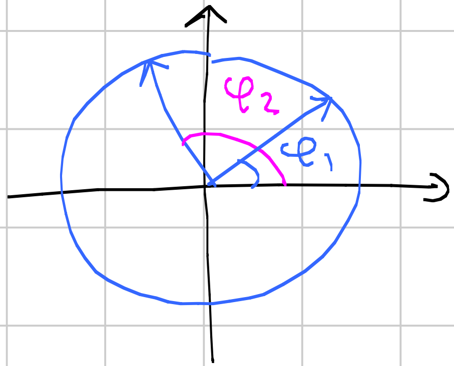
$$(\lambda \vec{X}) \cdot \vec{Y} = \lambda (\vec{X} \cdot \vec{Y}) = \vec{X} \cdot (\lambda \vec{Y})$$

Più in generale $(\lambda \vec{X}) \cdot (\mu \vec{Y}) = \lambda \mu (\vec{X} \cdot \vec{Y})$

② $\vec{x} = \|\vec{x}\| \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ $\vec{y} = \|\vec{y}\| \cdot \dfrac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \underbrace{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}_{\text{prod. numeri}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \cdot \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}\right)}_{\cos\theta\,?}$$

pr. scalare

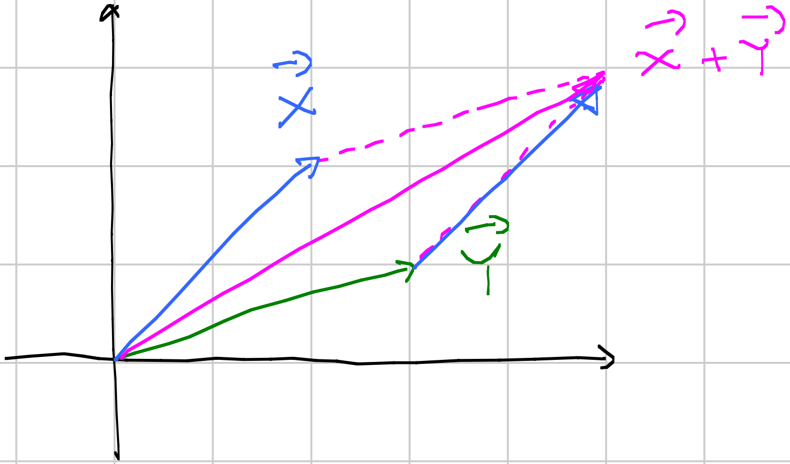


$$\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = (\cos\varphi_1, \sin\varphi_1) \qquad \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = (\cos\varphi_2, \sin\varphi_2)$$

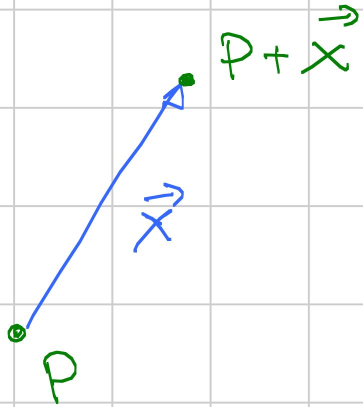
Il loro prod. scalare è

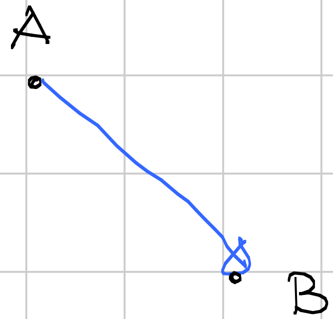
$$\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$= \cos$ angolo compreso

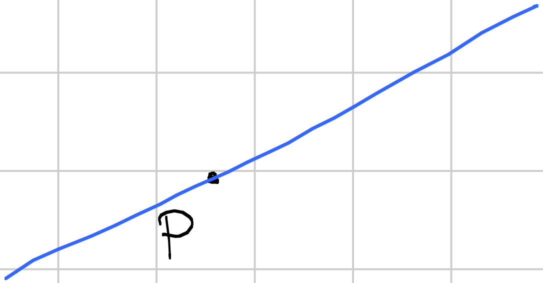


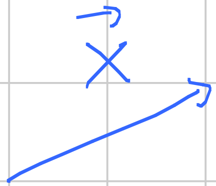
" Posso fare punto + vettore = punto





$B - A$ = vettore applicato in A con p.ta della freccia in B

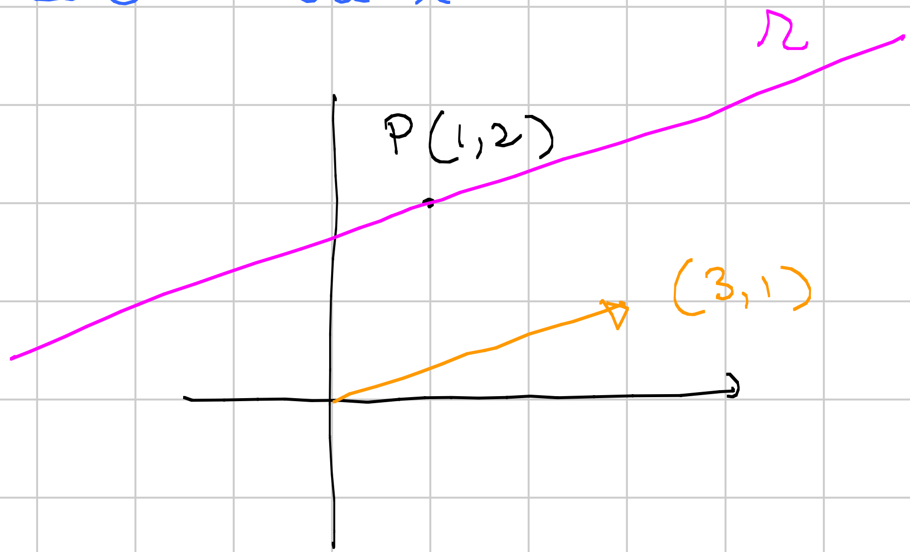




$P + \lambda \vec{X}$ dove λ è un numero reale = retta passante per P con direzione data dal vettore x

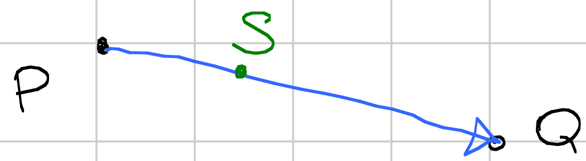
$$r = P + \lambda (3,1)$$
$$= (1,2) + \lambda (3,1)$$
$$= (1+3\lambda,\ 2+\lambda)$$

al variare di λ descrive tutti i p.ti della retta



Rappresentazione parametrica di una retta.

Rappr. parametrica
della retta per P e Q



$$P + \lambda \vec{v} \qquad = \quad P + \lambda (Q - P)$$ al variare di λ
descrive la retta PQ

direzione

$\lambda \in [0, 1] \quad \rightarrow \quad$ segmento PQ

$\lambda = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad$ p.to medio

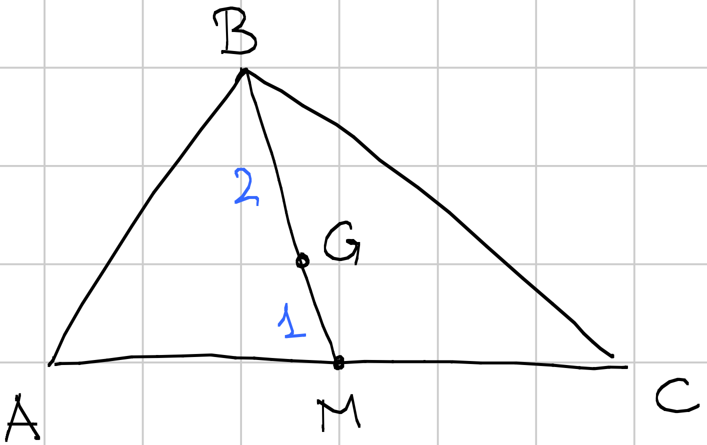
$\lambda = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad$ p.to S

—o—o—

Punti e vettori si mescolano

i punti sono vettori con applicazione nell'origine

i vettori sono differenza di 2 p.ti



Pensiamo $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ come vettori

$$\vec{M} = \frac{\vec{A}+\vec{C}}{2}$$

retta AC : $\vec{A} + \lambda(\vec{C}-\vec{A})$ $\qquad \lambda = \frac{1}{2}$

$$\vec{A} + \frac{1}{2}(\vec{C}-\vec{A}) = \frac{\vec{A}+\vec{C}}{2}$$

retta BM : $\vec{B} + \lambda(\vec{M}-\vec{B})$ $\qquad \lambda = \frac{2}{3}$

$$\vec{B} + \frac{2}{3}(\vec{M}-\vec{B}) = \frac{\vec{B}}{3} + \frac{2}{3}\vec{M}$$

$$= \frac{\vec{B}}{3} + \frac{\cancel{2}}{3}\,\frac{\vec{A}+\vec{C}}{\cancel{2}} = \frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3}$$

Baricentro $\quad \dfrac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3}$ (indipendentemente dall' origine)

— o — o —

Lunghezza della mediana BM

$= $ norma di $\vec{B}-\vec{M} = \|\vec{B}-\vec{M}\| =$

$$= \left\| \vec{B} - \frac{\vec{A}+\vec{C}}{2} \right\| = \frac{1}{2}\, \| 2\vec{B}-\vec{A}-\vec{C} \|$$

$$\|2\vec{B}-\vec{A}-\vec{C}\|^2 = 4\|\vec{B}\|^2 + \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{C}\|^2 - 4\vec{B}\cdot\vec{A} - 4\vec{B}\cdot\vec{C} + 2\vec{A}\cdot\vec{C}$$

(Ho usato la formula $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y}$

basta scrivere le componenti e vedere che è vero)

$\|\vec{B} - \vec{C}\|^2$ = Lungh.^{2} BC $= a^2$

$$\|\vec{B}\|^2 + \|\vec{C}\|^2 - 2\vec{B}\cdot\vec{C} = a^2 \qquad 2\vec{B}\cdot\vec{C} = -a^2 + \|\vec{B}\|^2 + \|C\|^2$$

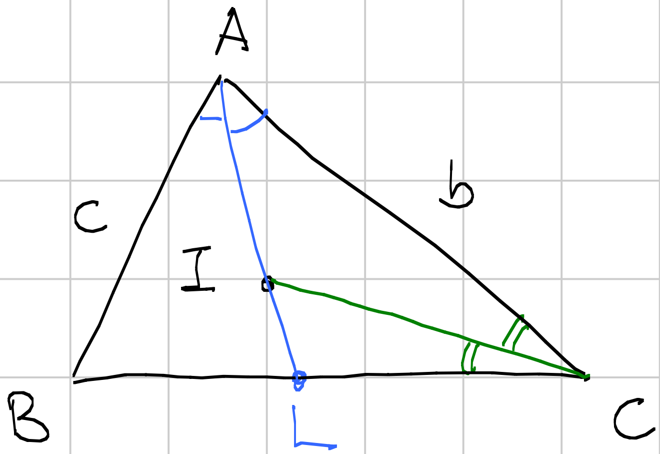
$$\|\vec{C}\|^2 + \|\vec{A}\|^2 - 2\vec{C}\cdot\vec{A} = b^2$$

$$\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\vec{A}\cdot\vec{B} = c^2 \qquad 2\vec{B}\cdot\vec{A} = \|A\|^2 + \|B\|^2 - c^2$$

$$4\|\vec{B}\|^2 + \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{C}\|^2 - 4\vec{B}\cdot\vec{A} - 4\vec{B}\cdot\vec{C} + 2\vec{A}\cdot\vec{C} =$$

$$\cancel{4\|\vec{B}\|^2} + \cancel{\|\vec{A}\|^2} + \cancel{\|\vec{C}\|^2} + 2a^2 - \cancel{2\|\vec{B}\|^2} - \cancel{2\|\vec{C}\|^2} + 2c^2 - \cancel{2\|B\|^2} - \cancel{2\|A\|^2}$$
$$+ \cancel{\|\vec{C}\|^2} + \cancel{\|\vec{A}\|^2} - b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$$

INCENTRO



Retta BC : $\vec{B} + \lambda(\vec{C} - \vec{B})$ A quale λ corrisponde L ?

$$\lambda = \frac{c}{b+c} \qquad \vec{L} = \vec{B} + \frac{c}{b+c}(\vec{C} - \vec{B})$$

$$= \vec{B}\left(1 - \frac{c}{b+c}\right) + \frac{c}{b+c}\vec{C}$$

$$= \frac{b\vec{B} + c\vec{C}}{b+c}$$

Retta AL : $\vec{A} + \lambda(\vec{L} - \vec{A})$ Chi è λ ? $\lambda = \frac{AI}{AL}$

Applicando il teo. bisettrice in ALC otteniamo che

$$\lambda = \frac{AI}{AL} = \frac{AC}{AC+LC} \qquad AC = b \qquad LC = \frac{ab}{b+c}$$

Facendo i conti si ottiene che $\vec{I} = \dfrac{a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C}}{a+b+c}$

— o — o —

$\vec{O}$ (circocentro) è spesso comodo come origine perchè in tal caso

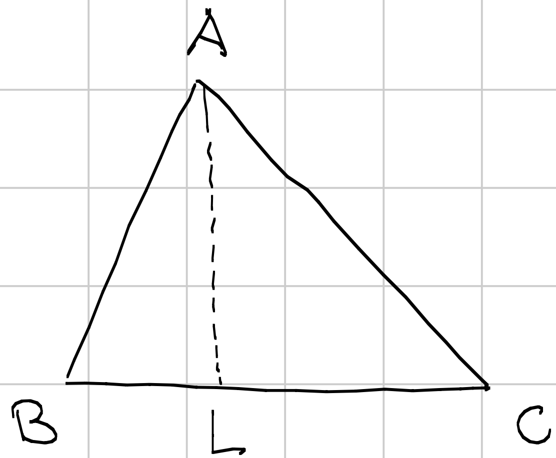
$$\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| = \|\vec{C}\| = R$$

— o — o — o —

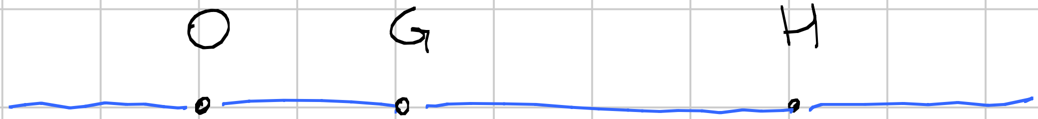
Formula per $\vec{H}$ valida

CON ORIGINE IN $\vec{O}$

$$\boxed{\vec{H} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}$$



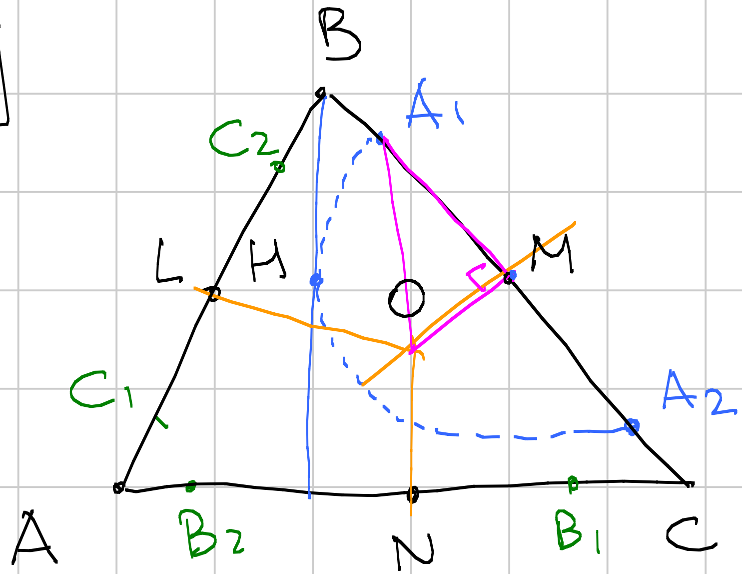
Retta di Eulero



O, G, H sono sempre allineati e $GH = 2OG$. In particolare $OH = 3OG$

Se l'origine è in $\vec{O}$ $\qquad OG = \vec{G} - \underbrace{\vec{O}}_{\text{zero}} = \dfrac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3}$

$\boxed{\text{IMO 2008 – 1}}$



Tesi $\quad A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ ciclico

Se stanno su una circ., il suo centro è O.

Basta dim. che le 6 distanze da O sono uguali

Basta dim. che

$$[OA_1]^2 = [OB_1]^2$$

Vettori con origine in O.

$$[OA_1]^2 \overset{\text{Pitagora}}{=} OM^2 + [MA_1]^2 \overset{\text{Riaggio}}{=} OM^2 + MH^2$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}+\vec{C}}{2} \qquad \vec{H} = \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$$

$$OM^2 = \|\vec{M}\|^2 = \frac{\|\vec{B}\|^2 + \|\vec{C}\|^2 + 2\vec{B}\cdot\vec{C}}{4}$$

$$MH^2 = \|\vec{H}-\vec{M}\|^2 = \left\|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} - \frac{\vec{B}+\vec{C}}{2}\right\|^2 = \left\|\frac{2\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{2}\right\|^2$$

$$= \frac{4\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 + \|\vec{C}\|^2 + 4\vec{A}\cdot\vec{B} + 4\vec{A}\cdot\vec{C} + 2\vec{B}\vec{C}}{4}$$

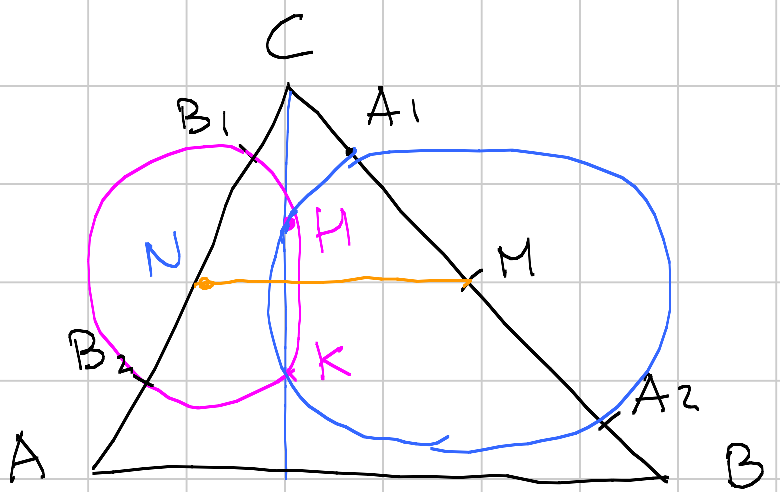
Sommando:

$$OM^2 + MH^2 = \frac{\overbrace{\boxed{4\|A\|^2 + 2\|\vec{B}\|^2 + 2\|\vec{C}\|^2}}^{8R^2} + 4\overbrace{\boxed{(\vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{C} + \vec{C}\cdot\vec{D})}}^{\text{schifo che c'è sempre uguale}}}{4}$$

$$= OA_1^2$$

OB_1^2 = stessa cosa con il 4 davanti a $\|\vec{B}\|^2$

— o — o —

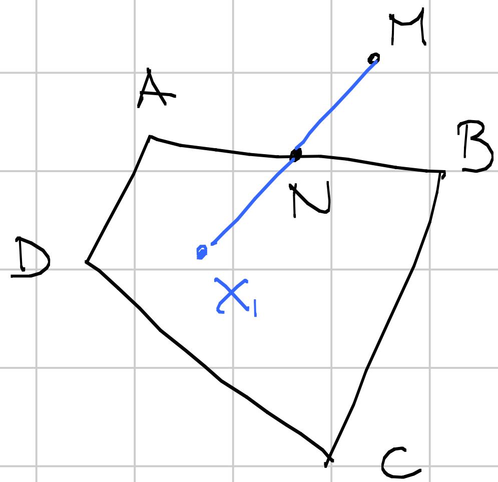


$$\boxed{CA_1 \cdot CA_2} = CH \cdot CK = \boxed{CB_1 \cdot CB_2}$$

$A_1A_2B_1B_2$ ciclico con centro in O.

Asse radicale passa per H ed è $\perp$ a MN

G2 – Esercizio 7



I simmetrici di M rispetto ai p.ti medi dei lati sono vertici di un parallelogrammo.

Sia X_1 il simm. di M rispetto al p.to medio N di AB

$$\vec{N} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2} \qquad \vec{X}_1 = \vec{M} + 2\,(\vec{N}-\vec{M})$$

$$= \vec{M} + 2\left(\frac{\vec{A}+\vec{B}}{2} - \vec{M}\right)$$

$$= \vec{A}+\vec{B}-\vec{M}$$

In alternativa $\vec{N} = (\vec{X}_1+\vec{M})/2$ e si ricava X_1

$X_1 = A + B - M$

$X_2 = B + C - M$

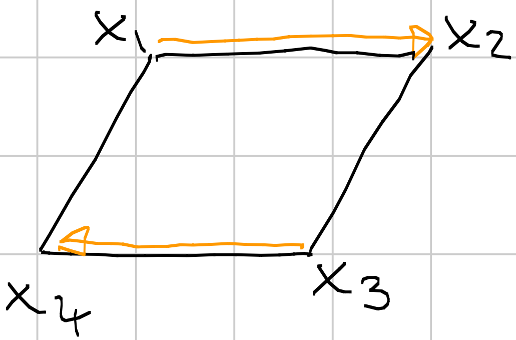
$X_3 = C + D - M$

$X_4 = D + A - M$

Perchè sia un parallelogrammo bastano 2 lati opposti uguali e paralleli

$$X_1X_2 = \vec{X}_2 - \vec{X}_1 = \vec{C} - \vec{A}$$
$$X_3X_4 = \vec{X}_4 - \vec{X}_3 = \vec{A} - \vec{C}$$

stessa norma
stessa direzione

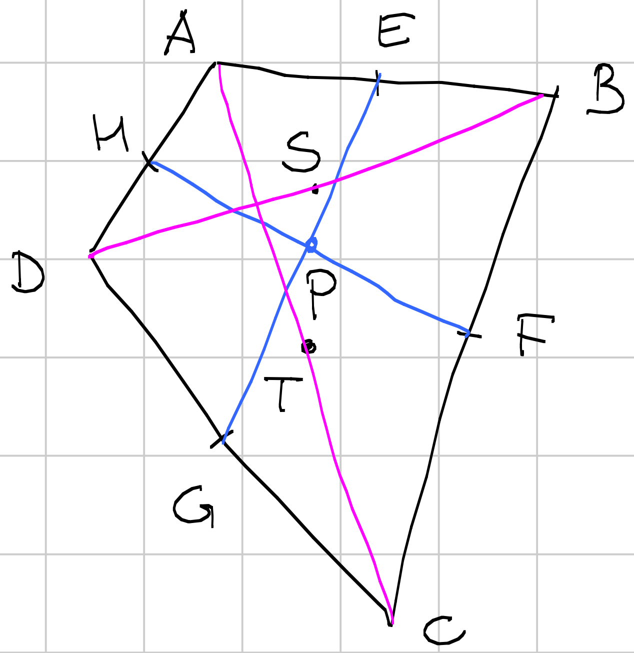


G2 – Problema 8

P = punto medio di ST

$$\vec{E} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2} \qquad \vec{G} = \frac{\vec{C}+\vec{D}}{2}$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{B}+\vec{D}}{2} \qquad \vec{T} = \frac{\vec{A}+\vec{C}}{2}$$

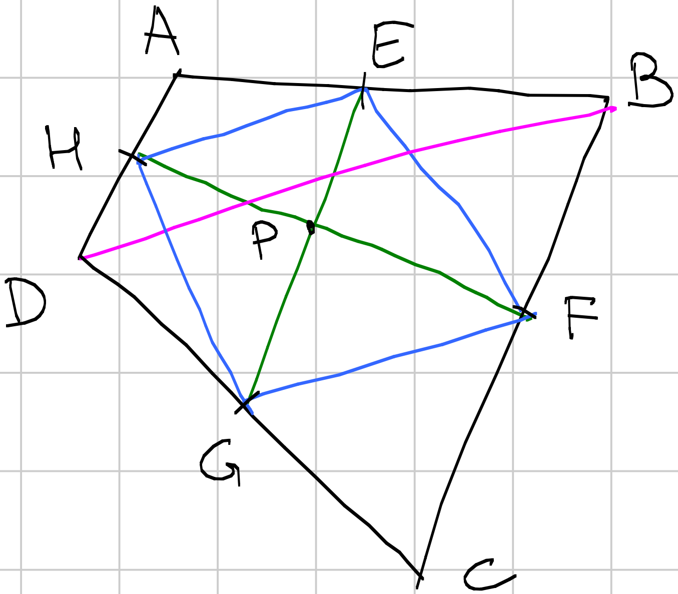


Punto medio di ST: $\dfrac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}}{4}$ = punto medio di EG, dunque **sta su EG.**

In modo analogo il punto medio di ST sta su HF

Quindi il punto medio di ST è $EG \cap HF$.

(Si poteva fare anche per affinità)

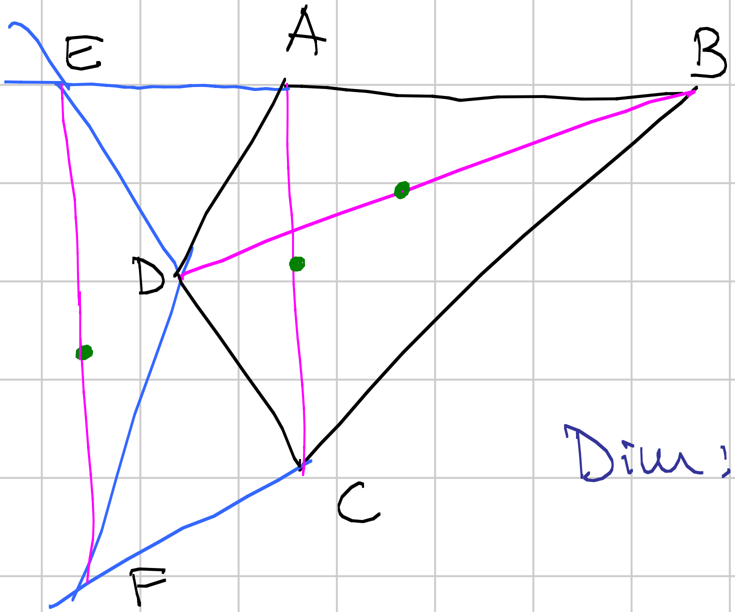


EFGH parallelogramma

HE // DB // GF

Quindi EG ed HF si dimezzano scambievolmente

Quindi si potevano calcolare le coordinate di P come p.to medio di EG

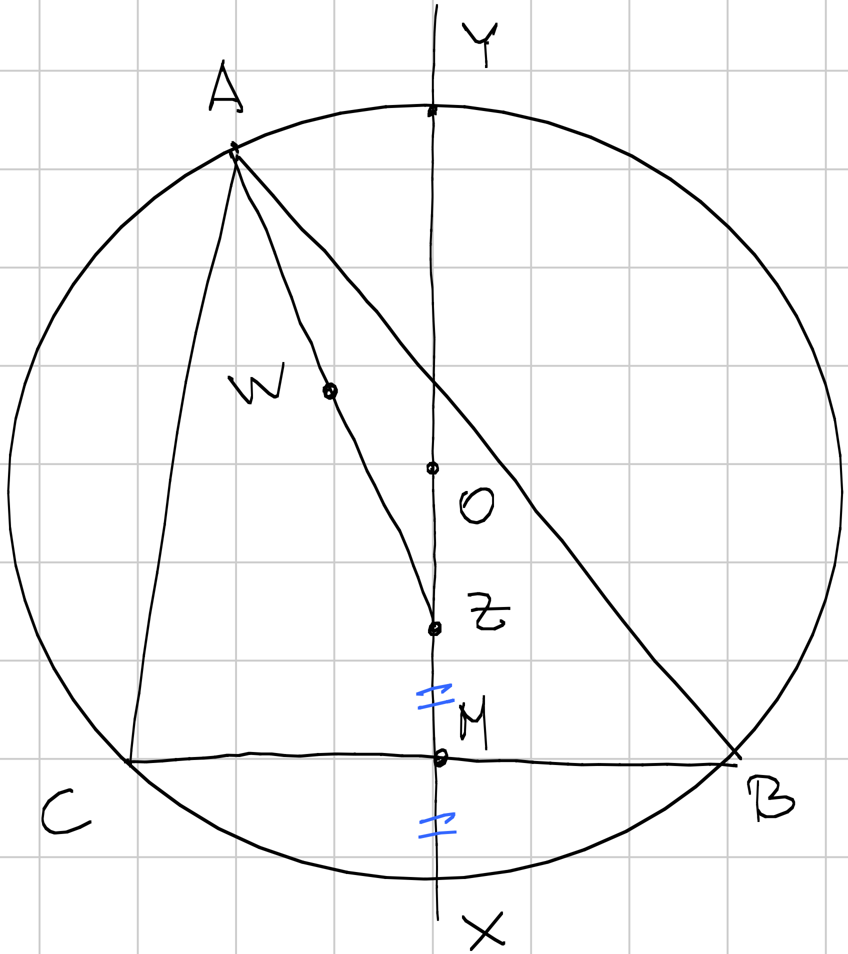


I p.ti medi di AC, BD, EF sono allineati

Dim: affinità + analitica

COMPLESSI

Numeri complessi = vettori (tutto quello che si fa con i vettori si fa con i complessi)



Tesi: W sta sulla circonf. di FEUERBACH di ABC (= circonferenza con centro nel p.to medio di OH e raggio $\frac{R}{2}$)

Numeri complessi con origine in O.

$m = \frac{b+c}{2}$ $\quad x = \frac{m}{|m|}$ se $R=1$

z è t.c. $\frac{z+x}{2} = m \Rightarrow z = 2m - x$

$$w = \frac{a+z}{2} = \frac{a+2m-x}{2} = \boxed{\frac{a+b+c}{2}} \boxed{-\frac{x}{2}}$$

p.to medio di OH = centro di Feu.

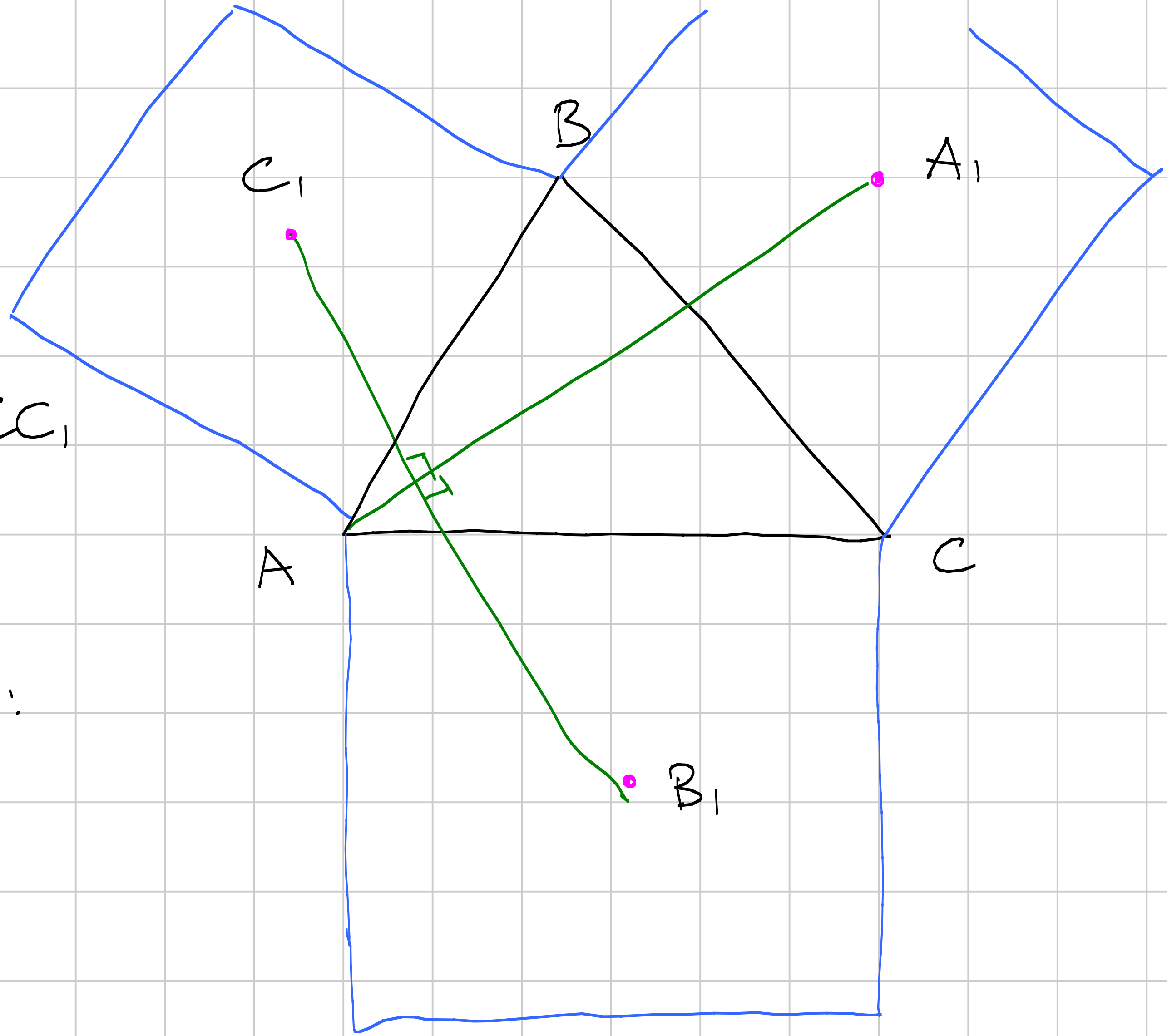
vettore di lungh. $\frac{R}{2}$

— o — o —

Vantaggi dei complessi sui vettori: ① con i complessi le rotazioni diventano moltiplicazioni

② c'è una struttura algebrica di prodotto

Esempio 1



Tesi: AA_1, BB_1, CC_1 concorrono

Tesi intermedia:

$AA_1 \perp C_1B_1$

(e congruente)

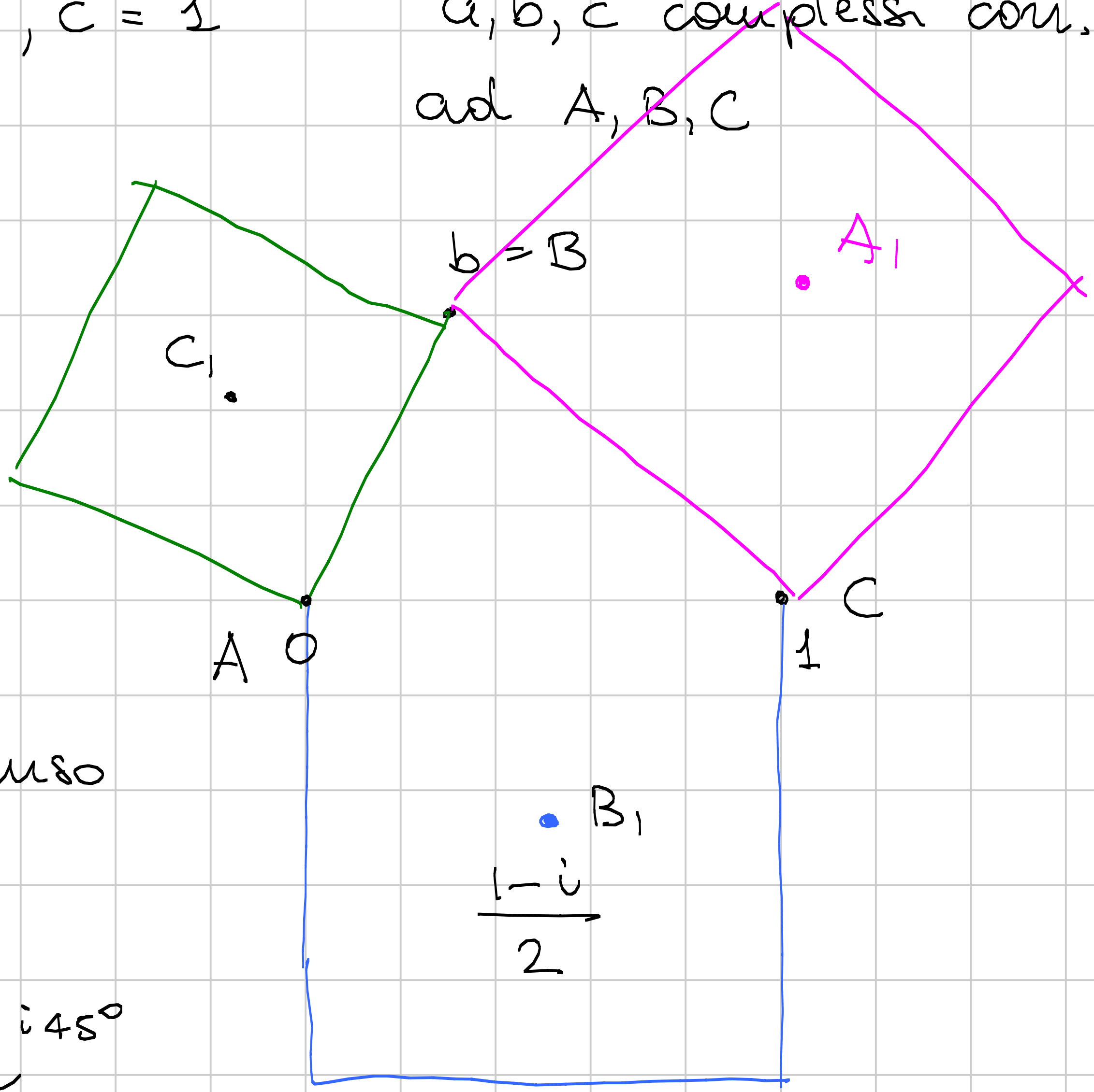
e cicliche

Data la tesi intermedia: AA_1, BB_1, CC_1 diventano le altezze di $A_1B_1C_1$

Possiamo supporre $a=0$, $c=1$

a, b, c complessi corr. ad A, B, C

C_1 si ottiene da B ruotando di $45°$ intorno all'origine e dividendo per $\sqrt{2}$



RUOTARE DI $45°$ (in senso antiorario) = MOLTIPLICARE PER

$$\cos 45° + i \sin 45° = e^{i 45°}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

$$\boxed{c_1 = b \cdot \frac{1+i}{2}}$$

$$A_1 = b + (c-b)\frac{1+i}{2} = b + (1-b)\frac{1+i}{2}$$

Tesi: $AA_1 \perp B_1C_1$

$$AA_1 = A_1 = b + (1-b)\frac{1+i}{2} = \frac{1+i}{2} + b\,\frac{1-i}{2}$$

$$B_1C_1 = B_1 - C_1 = \frac{1-i}{2} - b\,\frac{1+i}{2}$$

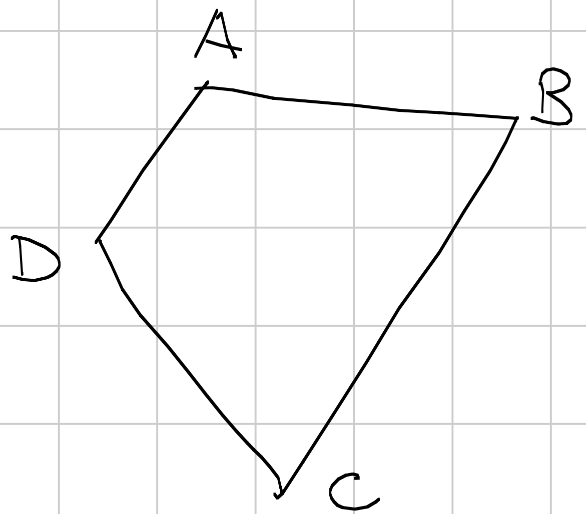
$$i \cdot B_1C_1 = i\left(\frac{1-i}{2}\right) - b\,i\,\frac{1+i}{2} = \frac{i+1}{2} + b\,\frac{1-i}{2} = AA_1$$

AA_1 si ottiene da B_1C_1 molt. per i

$\Rightarrow$ uguali di lunghezza e $\perp$.

Esempio 2 TEOREMA DI TOLOMEO

Dati 4 p.ti A, B, C, D si ha sempre che



$$AB \cdot DC + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$$

Vale il segno di $=$ se e solo se A, B, C, D sono nell'ordine i vertici di un quadrilatero ciclico.

Complessi: a, b, c, d i numeri in $\mathbb{C}$ corrispondenti ai vertici

$$AB \cdot DC = |a-b| \cdot |c-d| \qquad AD \cdot BC = |a-d| \cdot |b-c|$$

$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = |a-b| \cdot |c-d| + |a-d| \cdot |b-c|$$

$$= |(a-b)(c-d)| + |(a-d)\cdot(b-c)|$$

Disuguaglianza triangolare

$$\geq |(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c)|$$

$$= |\cancel{ac} - ad - bc + \cancel{bd} + ab - \cancel{ac} - \cancel{db} + dc|$$

$$= |ab + dc - ad - bc|$$

$$= |(a-c)(b-d)|$$

$$= |a-c| \cdot |b-d| = AC \cdot BD$$

Per avere il segno di $=$, occorre avere il segno di $=$ nella triangolare

$$|u| + |v| \geq |w|$$ ← vale $=$ se e solo se $u = \lambda v$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$

Quindi in Tolomeo vale l'uguale se e solo se

$$(a-b)(c-d) = \lambda (a-d)(b-c)$$

$$\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)} = \lambda \begin{array}{l} \in \mathbb{R} \\ > 0 \end{array}$$