# GEOMETRIA PROIETTIVA (GL)

Titolo nota 08/09/2008

I - Algebra lineare

II - Piano proiettivo, rette, proiettività

III - Param. delle rette, birapporto, dualità

# I - ALGEBRA LINEARE

**Vettori**: $v=(a_1, \dots, a_n)$ $\quad a_i \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}, \dots)$

$\mathbb{R}^n$

**Matrice**: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & - & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & - & - & \cdot\, a_{mn} \end{pmatrix}$ $\quad m \times n$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$

$\underline{m}$- quadrata $\underline{m=n}$

**Prodotto matrice-vettore**

$A \ m\times n \quad v \in \mathbb{R}^n \quad Av = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + \dots + a_{1n} b_n \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + \dots + a_{2n} b_n \\ \\ a_{m1} b_1 + a_{m2} b_2 + \dots + a_{mn} b_n \end{pmatrix}$$

$v \longmapsto Av$

Trasf. lineare.

(affinità che fissano l'origine)

## Prodotto righe per colonne

$A, B$ matrici $n \times n$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & b_{1n} \\ \\ b_{n1} & & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \bullet & \\ & & \end{pmatrix} = C$$

$c_{ij}$ = prod. scalare tra la $i$-esima riga di $A$ e la $j$-esima colonna

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Attenzione: $\boxed{\text{In generale } AB \neq BA}$ di B

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = -BA.$$

"Interpretazione geometrica"

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$v = (x, y)$

$$Av = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$A$ = simmetria rispetto a $\{y = x\}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$v = (x, y)$

$$Bv = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$B$ = simmetria rispetto a $\{y = 0\}$

# Determinante

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ & \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det A_{1k}$$

$A_{1k}$ = la matrice ottenuta da A togliendo la $1^a$ riga e la k-esima colonna.

1) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & - & - & - & 1 \end{pmatrix} = 1$

$\|$

$1$

2) $\det\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots a_{1n} \\ & \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ b_{n1} & a_{n2} \, a_{nn} \end{pmatrix}$

per ogni colonna (e anche per ogni riga)

3) $\det \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ \lambda a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}$

per ogni colonna (e anche per ogni riga)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det(-1) + \cancel{(-1) \cdot 0 \cdot \det(0)} =$$

$$= -1$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det(-1) + \cancel{(-1) \cdot 2 \cdot \det(0)} = -1$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det(-1) - 2 \det(1) = -3$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -4$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -9$$

4) $\sigma \in S_n$

$$\det\begin{pmatrix} a_{\sigma(1)1} & a_{\sigma(1)2} & \cdots & a_{\sigma(1)n} \\ \vdots & & & \\ a_{\sigma(n)1} & a_{\sigma(n)2} & \cdots & a_{\sigma(n)n} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{|\sigma|} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

vale anche per le colonne.

<u>Corollario</u>: Se due colonne (o due righe) sono uguali $\det A = 0$.

in $\mathbb{R}^3$

$A = (v \mid w \mid u)$ $\qquad v, w, u \in \mathbb{R}^3$

$\det A = v \cdot (w \wedge u)$

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & u_1 \\ v_2 & w_2 & u_2 \\ v_3 & w_3 & u_3 \end{pmatrix} \longrightarrow (-1)^{1+1} v_1 \det \begin{pmatrix} w_2 & u_2 \\ w_3 & u_3 \end{pmatrix} + (-1)^3 w_1 \det \begin{pmatrix} v_2 & u_2 \\ v_3 & u_3 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^4 u_1 \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} =$$

$$= v_1 (w_2 u_3 - u_2 w_3) - w_1 (v_2 u_3 - v_3 u_2)$$

$$+ u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2)$$

$$w \wedge u = (w_2 u_3 - w_3 u_2 , w_3 u_1 - w_1 u_3 , w_1 u_2 - w_2 u_1)$$

$$v \cdot (w \wedge u) = v_1 w_2 u_3 - v_1 u_2 w_3 + u_1 v_2 w_3 - w_1 v_2 u_3 + w_1 u_2 v_3$$

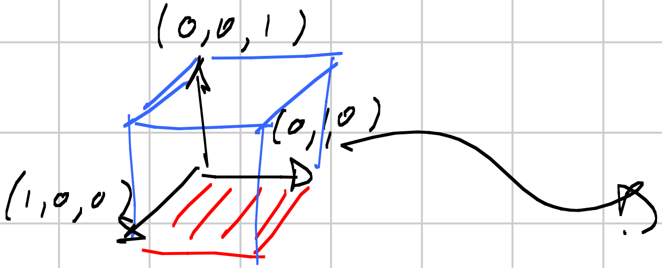
$$- u_1 w_2 v_3$$

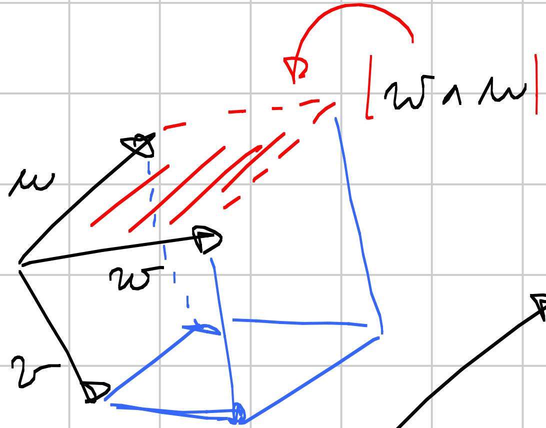
$$A = \left( v \,|\, w \,|\, u \right)$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = v$$

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = w$$

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = u$$




$n=2$ area

$n=3$ volume

$n>3$ boh...

$S \subset \mathbb{R}^n$

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$v \longrightarrow Av$$

$$\frac{\mathrm{Vol}\left(A(S)\right)}{\mathrm{Vol}(S)} = \det A$$

<u>Def</u>: $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI se $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

1) in $\mathbb{R}^n$ esistono $n$ vettori lin. indip.

$$(1, 0 \dots 0) \quad (0, 1, 0 \dots 0) \quad (0, 0, 1, 0 \dots 0), \dots, (0, \dots 0, 1)$$

2) in $\mathbb{R}^n$, $n+1$ vettori sono sempre lin. dip.

<u>ovvero</u> se ho $n$ vett. di $\mathbb{R}^n$. lin. ind. $(v_1, \dots, v_n)$

$\forall w \in \mathbb{R}^n \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ t.c.

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

($n$ vett. lin. ind. in $\mathbb{R}^n$ si dicono una <u>base</u> di $\mathbb{R}^n$)

3) $v_1, \dots, v_k$ sono lin. dip. se sono tutti contenuti in un sottospazio di dim $< k$.

<u>in $\mathbb{R}^3$</u> : 3 vett. lin dip $\Rightarrow$ 3 vett su un piano

$\Rightarrow$ vol. del prisma che formano è $0$

$\Rightarrow$ det della matrice che ha loro x colonne è $0$.

<u>In generale</u> : $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ sono lin. dip.

se e solo se $\underline{\det(v_1 | \dots | v_n) = 0}$.

$$\left( A^t = \text{matrice Trasposta di } A, \qquad \begin{array}{l} A = (a_{ij}) \\ A^t = (a_{ji}) \end{array} \right)$$

$$\det(A) = \det(A^t)$$

---

$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

se $\det A = 0$

$A$ non è iniettiva

se $\det A \neq 0$

$A$ è iniettiva e surgettiva

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$Ax = 0$ ha sol $x \neq 0$

$\Longleftrightarrow \det A = 0$.

---

$\hookrightarrow$ Cramer: $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det A}$

$A_i$ = matrice ottenuta da $A$ sostituendo la i-esima colonna con il vettore $b$.

---

Intersez. di 2 piani (perpendicolari) in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ dx + ey + fz = 0 \end{cases} = \text{la retta del vettore } (a, b, c) \wedge (d, e, f)$$

Il piano che contiene i vettori $u, v$ è

$$X \cdot (u \wedge v) = 0$$

$$X = (x, y, z)$$

# II - GEOMETRIA PROIETTIVA

$\mathbb{R}^2 \ni v$ punti  rette: $\{ax+by+c=0\}$

$\left(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\right)^3$  $(a,b,c)$ punto  $\{ax+by+cz+d\equiv 0 \ (7)\}$
rette

$\mathbb{R}^3$  $\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ per un $v \in \mathbb{R}^3$
punti

$\{ax+by+cz=0\}$  $a,b,c \in \mathbb{R}$ non tutti nulli
rette.

$\{\lambda v\}$ $\{\lambda w\}$ 2 "punti"

↳ per loro passa la "retta" $\{x \cdot (v \wedge w) = 0\}$

$\{ax + by + cz = 0\}$ $\{dx + ey + fz = 0\}$ 2 "rette"

si intersecano in un "punto": $\{\lambda((a,b,c) \wedge (d,e,f))\}$

$\mathbb{P}^2 = [\mathbb{P}^2\mathbb{R} =]$ {rette per l'origine di $\mathbb{R}^3$}

↳ piano proiettivo reale.

**Def**: $[a, b, c] = \{ (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \}$

$a, b, c$ non tutti nulli.

## Terne omogenee

**Es**: $[1, 1, 1] = [2, 2, 2] = [\pi, \pi, \pi]$

$$\left[\frac{1}{\cos\alpha}, \frac{1}{\cos\beta}, \frac{1}{\cos\gamma}\right] = [\cos\beta\cos\gamma, \cos\alpha\cos\gamma, \cos\alpha\cos\beta]$$

**Es** (+): $[1, -i, 0] = [-i, -1, 0]$ $\quad \mathbb{P}^2\mathbb{C}$

$[2, 3, 1] = [4, -1, 2]$ $\quad \mathbb{P}^2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$

$\mathbb{P}^2\mathbb{R} = \{$ insieme di tutte le terne omogenee $\}$

retta $= \{ [x,y,z] \mid ax+by+cz=0 \}$ $[a,b,c] \in \mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

---

Retta per $[1,2,3]$ e $[4,5,6]$

ha coeff. dati da $\left[ (1,2,3) \wedge (4,5,6) \right] =$

$= \left[ 12-15,\ 12-6,\ 5-8 \right] = \left[ 3,\ -6,\ 3 \right] =$

$= \left[ 1,\ -2,\ 1 \right]$

$\Rightarrow$ retta è $\{ x-2y+z=0 \}_{\mathbb{R}} = \left\{ \left( [x,y,z] \in \mathbb{P}^2 \mid \right) x-2y+z=0 \right\}$

$$s: \{ 3x - 2y + 5z = 0 \}$$

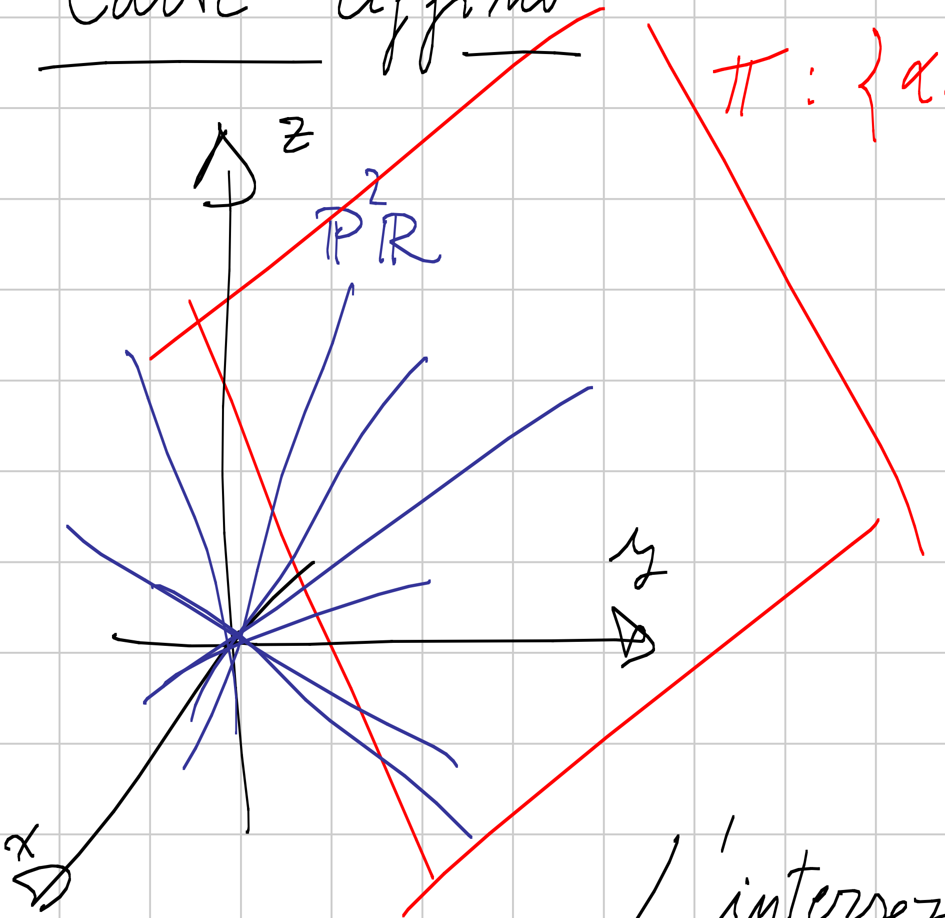
$$r \cap s = [(1, -2, 1) \wedge (3, -2, 5)] =$$

$$= [-10+2, -5+3, -2+6] = [8, 2, -4] = [4, 1, -2]$$

Oss: $\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = i(bf - ec) - j(af - dc) + k(ae - bd)$

$$\Rightarrow (a, b, c) \wedge (d, e, f) = (bf - ec, dc - af, ae - bd)$$

# Carte affini




$\pi : \{ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \}$

$[a, b, c] \in \mathbb{P}^2\mathbb{R}$

$\downarrow$

$r$ = retta x l'origine di $\mathbb{R}^3$

$\downarrow$

$r \cap \pi$

L'intersezione esiste se $r$ non è parallela a $\pi$.

Ovvero se $r$ non appartiene a $\pi' : \{ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \}$

<u>Oss</u>: punto $\in \mathbb{P}^2 \longrightarrow$ retta in $\mathbb{R}^3 \longrightarrow$ punto su $\pi$
($r$) ($r \cap \pi$)

retta $\subseteq \mathbb{P}^2 \longrightarrow$ piano in $\mathbb{R}^3 \longrightarrow$ retta su $\pi$
($\pi_1$) ($\pi_1 \cap \pi$)

<u>Non funziona se</u>: punto di $\mathbb{P}^2 \in \pi'$
retta di $\mathbb{P}^2 = \pi'$

Questa mappa conserva la <u>geometria di incidenza</u>

$\mathbb{P}^2 =$ un piano euclideo + una retta proiettiva

$\downarrow$ $\mathbb{R}^2$ ; $\downarrow$ "retta all'infinito"

Attenzione: "retta all'infinito" non è una retta euclidea

non è $\mathbb{R}$

retta proiettiva = retta euclidea + "punto all'$\infty$"

$\mathbb{P}^2$ = piano eucl + retta eucl. + punto.

Scegliere una retta in $\mathbb{P}^2$ $\longleftrightarrow$ scegliere il piano affine $\pi$.

$\longleftrightarrow$ mappa da una parte di $\mathbb{P}^2$ in $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{P}^2$ il triangolo di vertici $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$
di lati $\{z=0\}$, $\{y=0\}$, $\{x=0\}$

$r = \{x+y+z=0\}$ retta all'infinito.

$$\mathbb{P}^2 \setminus r = \{[x,y,z] \mid x+y+z \neq 0\} = \{[x,y,z] \mid x+y+z=\lambda\}$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$\lambda = 1$

$\{1-x-y=z\}$ piano affine di $\mathbb{R}^3 = \pi$

$$[1,0,0] = \{(\lambda,0,0)\} \longrightarrow \{(\lambda,0,0)\} \cap \pi = (1,0,0)$$

$$[0,1,0] = \{(0,\lambda,0)\} \longrightarrow \{(0,\lambda,0)\} \cap \pi = (0,1,0)$$

$$[0,0,1] = \{(0,0,\lambda)\} \longrightarrow \{(0,0,\lambda)\} \cap \pi = (0,0,1)$$

$\{z=0\} \cap \{1-x-y=z\}$

$f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}^2$

biiettiva lineare,

Retta all'infinito standard : $\{z=0\}$

Carta affine standard : $\{z \neq 0\}$ $(\{z=1\})$

punti : $[a,b,c] \in \{z \neq 0\} \longrightarrow \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) \in \mathbb{R}^2$

$\left[\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right]$

$z=1$

rette : $\{ax+by+cz=0\} \longrightarrow \{ax+by+c=0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

# Passaggio dall'affine al proiettivo

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow [x, y, 1] \in \mathbb{P}^2$$

$$\{\alpha x + \beta y + \gamma = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \{\alpha x + \beta y + \gamma z = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$$

$$\{P(x, y) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \left\{z^d P\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0\right\} \subseteq \mathbb{P}^2$$

$$d = \deg P$$

$A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad$ $A$ matrice $3 \times 3$

$v \longrightarrow A \cdot v$

$A$ manda rette per l'origine in rette per l'origine

$$A\left(\{ \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}\right) = \{ \lambda (Av) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$\det A \neq 0.$

$\Rightarrow$ $A$ definisce una funzione $T_A : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$

$$[x, y, z] \longrightarrow \left[ A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]$$

$T_A$ si dice <u>proiettività</u>.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1.$$

$$[x, y, z] \longrightarrow [x+z, y+z, z]$$

<u>Carta $\{z=1\}$</u>

$$\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \longrightarrow \left(\frac{x}{z}+1, \frac{y}{z}+1\right)$$

$$(u, v) \longrightarrow (u+1, v+1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A \neq 0.$$

$$[x, y, z] \longrightarrow [x+z,\ y+z,\ 2x+z]$$

Carta $\{t=1\}$

$$\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \longrightarrow \left(\frac{x+z}{2x+z}, \frac{y+z}{2x+z}\right) =$$

$$\| $$

$$(u, v) \qquad = \left(\frac{\frac{x}{z}+1}{2\frac{x}{z}+1}, \frac{\frac{y}{z}+1}{2\frac{x}{z}+1}\right) =$$

$$\boxed{\{2u+1=0\} \quad \{u = -\tfrac{1}{2}\}} \quad \text{NO.}$$

$$= \left(\frac{u+1}{2u+1}, \frac{v+1}{2u+1}\right)$$

$$[1, 0, 0] \quad [0, 1, 0] \quad [0, 0, 1] \quad [1, 1, 1]$$

$$[a_1, a_2, a_3] \quad [b_1, b_2, b_3] \quad [c_1, c_2, c_3] \quad [d_1, d_2, d_3]$$

$$A^{(h,k,j)} = \begin{pmatrix} ha_1 & kb_1 & jc_1 \\ ha_2 & kb_2 & jc_2 \\ ha_3 & kb_3 & jc_3 \end{pmatrix} \qquad h, k, j \in \mathbb{R}^*$$

$$[h, k, j]$$

$$A^{(h,k,j)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} ha_1 + kb_1 + jc_1 = \lambda d_1 \\ ha_2 + kb_2 + jc_2 = \lambda d_2 \\ ha_3 + kb_3 + jc_3 = \lambda d_3 \end{cases} \qquad (\lambda = 1)$$

usando Cramer perché $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$

perché ai tre punti non sono allineati:

$\Rightarrow$ si risolve in modo unico nelle terne omogenee

$\Rightarrow$ $\exists\ T_{\lambda i}: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$

che fa quello che vogliamo.

$\det A_i \neq 0$

$\det A \neq 0$

## Teorema fondamentale delle proiettività

Due quaterne di pt. a 3 a 3 non allineati si possono mandare una nell'altra con un'unica proiettività

# III - RETTE e BIRAPPORTI

## Forma parametrica di una retta

$$\mathbb{P}^1\mathbb{R} = \{ [a,b] \mid a,b \in \mathbb{R} \text{ non entrambi nulli} \}$$

$$\rotatebox{90}{$\in$}$$

$$[a,b] \xrightarrow{L} \left[ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right]$$

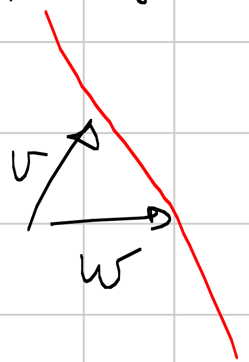
$$\|$$

$$[m_{11}a + m_{12}b,\ m_{21}a + m_{22}b,\ m_{31}a + m_{32}b]$$

in $\mathbb{R}^2$

$v, w$

$\lambda v + (1-\lambda) w \qquad \lambda \in \mathbb{R}$




$$\begin{array}{ccc} \lambda & \longrightarrow & \lambda v + (1-\lambda) w \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Supp. che $\exists\, v, w, u \in \mathrm{Im} L$ lin. ind.

$$Av_1,\ Aw_1,\ Au_1 \qquad v_1, w_1, u_1 \in \mathbb{R}^2$$

$$\lambda v_1 + \mu w_1 + \nu u_1 = 0 \qquad \lambda, \mu, \nu \text{ non tutti nulli}$$

$$\Rightarrow A(\quad\checkmark\quad) = 0$$

$$\lambda v + \mu w + \nu u = 0 \quad \underline{\text{assurdo}}\,!$$

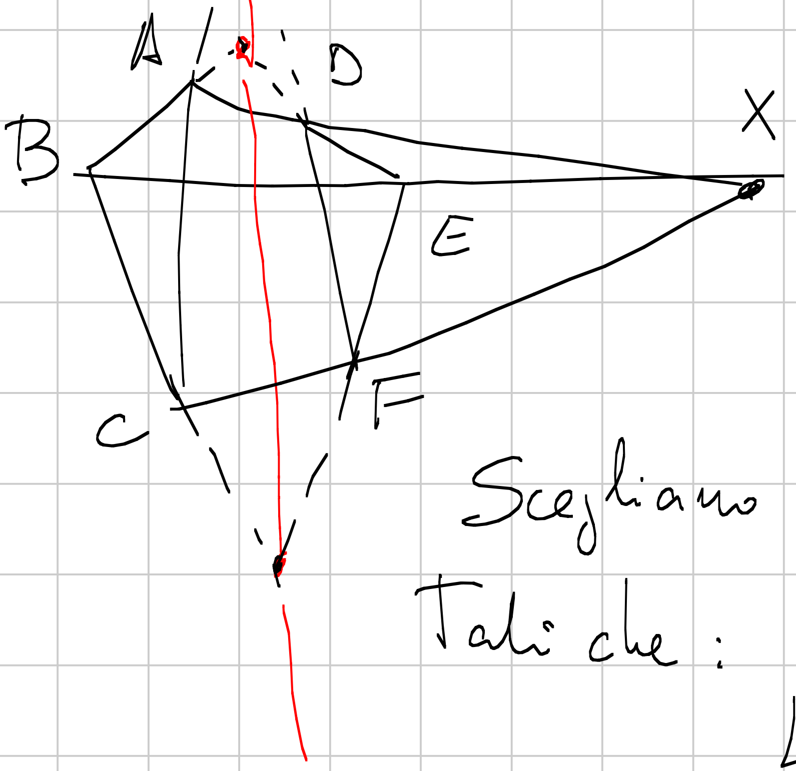
imponiamo che $L(\mathbb{P}^1)$ passi per $[p, q, r]$ e $[s, T, u]$

$a = 1 \quad b = 0 \qquad\qquad a = 0 \quad b = 1$

$$\begin{cases} m_{11} a + \cancel{m_{12} b} = ph \\ m_{21} a + \cancel{m_{22} b} = qh \\ m_{31} a + \cancel{m_{32} b} = rh \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{---} = ks \\ \text{---} = kt \\ \text{---} = ku \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} ph & sk \\ qh & tk \\ rh & uk \end{pmatrix}$$

posso scegliere ancora 1 punto.

## Teor di Desargues




Th: $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CA \cap FD$ sono allineati

$\Uparrow$ $(\Updownarrow)$

Ip: $AD$, $BE$, $CF$ concorrono.

Scegliamo param. di $AD$, $BE$, $CF$ $(L_1, L_2, L_3)$

Tali che: $L_1([1,0]) = A$ $L_2([1,0]) = B$

$L_1([0,1]) = D$ etc.

$L_1([1,1]) = X$

$$X = A + D = B + E = C + F$$

$\to B - C = F - E = Q$ $BC \cap FE$

$\to A - B = D + E = P = AB \cap DE$

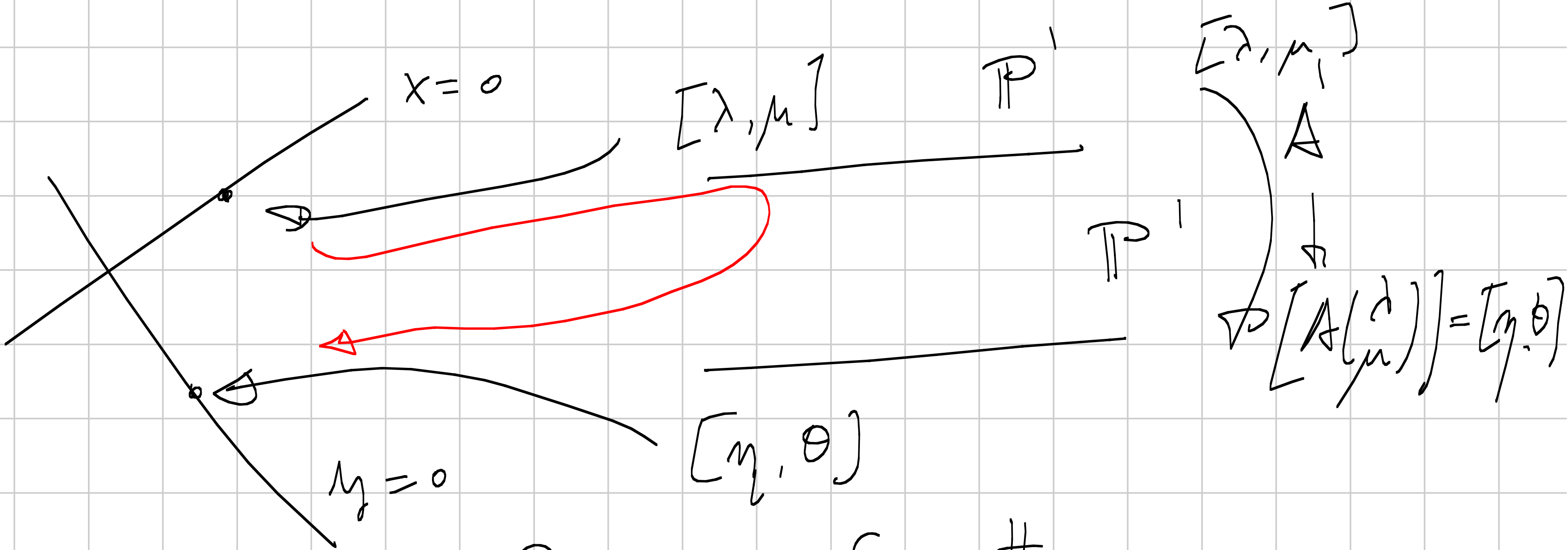
$\to A - C = F - D = R = AC \cap FD$

$Q + P = R \Rightarrow P, Q, R$ allineati.

---

Proiettività in $\mathbb{P}^1$

$[a,b] \longrightarrow \left[A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]$ $\qquad A \quad 2\times 2$




Proiettività tra rette.

Birapporto:

$A, B, C, D$ sono allineati

$L : \mathbb{P}^1 \longrightarrow$ retta $\times$ $A, B, C, D$

$L[1,0] = A \qquad L[0,1] = B \qquad L[1,1] = C$

$D = L[\alpha, \beta] \qquad (A, B; C, D) = \frac{\alpha}{\beta}$

$T : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$

$P = T(A) \quad Q = T(B) \quad R = T(C) \quad S = T(D)$

allineati

$T \circ L : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ (retta per $P, Q, R, S$)

$\Rightarrow (P, Q; R, S) = (A, B; C, D)$.

$A, B, C, D$ come prime

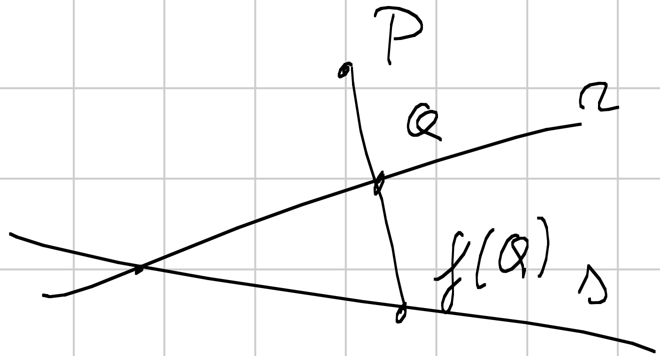
$$L([1,0]) = A \qquad L([0,1]) = B$$

$$L[a,b] = C \qquad L(c,d) = D$$

$$(A, B; C, D) = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d}$$

$$[c,d] \to \left[\frac{c}{a}, \frac{d}{b}\right]$$

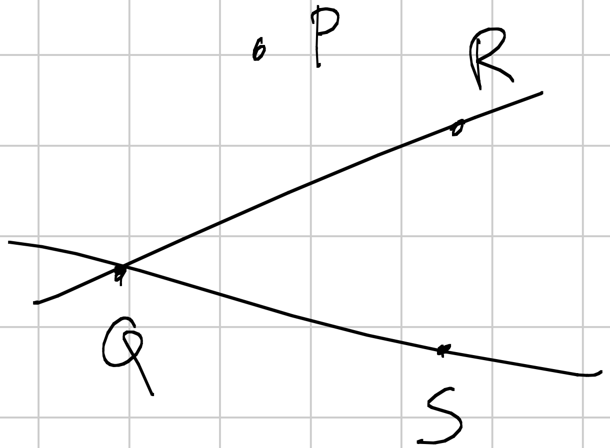
$$L_1 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x/a \\ y/b \end{bmatrix} \qquad \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{d}$$




<u>Es. di proiett. tra rette:</u>

$$\forall Q \in r \quad f(Q) = PQ \cap s$$

$f : r \to s$ Proiettività.




$\exists\, T$ proiett. t.c.

$T(P) = [1,0,0]$

$T(Q) = [0,1,0]$

$T(R) = [0,0,1]$

$T(S) = [1,1,1]$

$[1\ 0\ 0]$

$\{x=0\} \leftarrow [0,b,a]$

$\{x-y=0\}$

$[0,b,a] \rightarrow [0,-a,b]$

$$\begin{cases} -ay+bz=0 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad [b,b,a]$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

non è unica

# Dualità

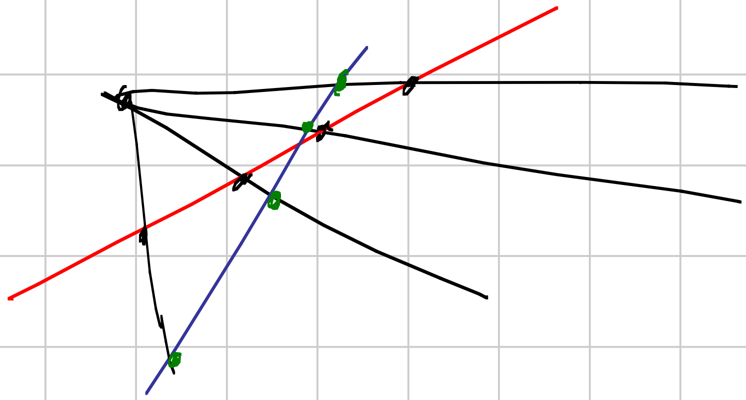
$[a, b, c]$ punto  coordinate
$[a, b, c]$ retta  coefficienti

rette x 2 punti $\longleftrightarrow$ intersez. tra due rette

In geo-pro. si possono scambiare punti e rette, unioni e intersezioni.

Es: birapporto: $(A, B; C, D) \longrightarrow (r, s; p, q)$

$= (r \cap t, s \cap t; p \cap t, q \cap t) \quad \forall\, t$ retta in $\mathbb{P}^2$.



<u>Dualità</u>: $[a,b,c] \longrightarrow \{ax+by+cz=0\}$

<u>Dualità</u>: $A$ matrice $3\times 3$ $\det A \neq 0$.

$$[a,b,c] \longrightarrow \left[A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right] \longrightarrow \left\{(x,y,z)\,A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\right\}$$

generica dualità.