GEOMETRIA PROIETTIVA (G5)

Titolo nota 09/09/2008

•) Prime Applicazioni

I) Coniche

II) Birapporto, coniche e polarità

III) Coord. omogenee in un Triangolo.

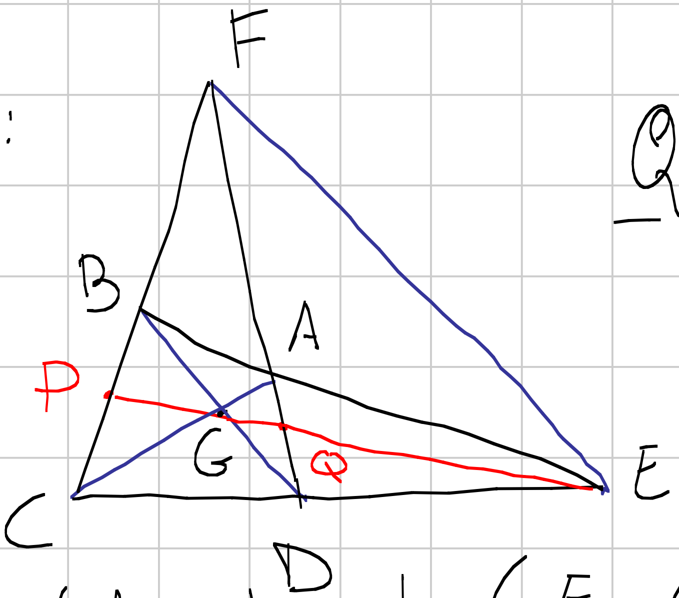
$$\text{Affine} \hookrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$\mathbb{P}^2 \xrightarrow{\;T\;} \mathbb{P}^2$$

$$\mathbb{P}^2 \longrightarrow \text{Carta affine}$$

T = proiettività "vera"

Es:



Quadrilatero completo

$P = EG \cap BC$

$Q = EG \cap AD$

Se $(X, Y; W, Z) = -1$ loro si dicono quaterna armonica

Voglio dim che $(E, G; P, Q) = -1$

Sol: Proietto da C su FD

$\Rightarrow (E, G; P, Q) = (D, A; F, Q)$

Proietto da B su EG

$(D,A;F,Q) = (G,E;P,Q)$

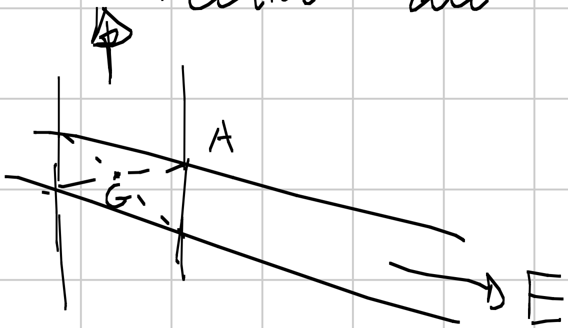
$\Rightarrow (G,E;P,Q) = (E,G;P,Q)$

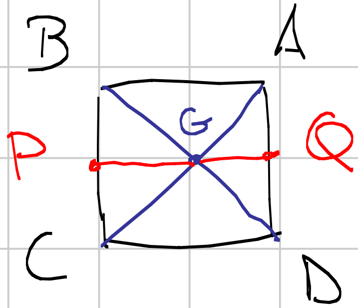
$\Rightarrow \quad = -1$ (non può essere 1)

<u>Sol 2</u>: $E=[1,0,0] \qquad F=[0,1,0]$

$G=[0,0,1] \qquad A=[1,1,1]$

<u>Carta</u> $\{t=1\}$ F retta all'∞ = EF





$\longrightarrow \cdots \longrightarrow E(\infty)$

$(E,G;P,Q) = -\frac{PG}{GQ}$

$= -1$

4 punti allineati X, Y, W, Z i rapporti sono con segno

$$(X, Y; W, Z) = \frac{XW}{WY} \Big/ \frac{XZ}{ZY}$$

$X = (0,0)$ $Y = (1,0)$ $W = (c,0)$ $Z = (d,0)$

$[0,0,1]$ $[1,0,1]$ $[c,0,1]$ $[d,0,1]$

$[\lambda, \mu] \longmapsto [\,?\,, 0, \,?\,]$ $[\mu, 0, \lambda+\mu]$

$W: \mu = c$, $\lambda = 1-c$ $Z: \mu = d$, $\lambda = 1-d$

$$\boxed{\frac{c}{1-c} \, \frac{1-d}{d}}$$

$$\| $$

$$\frac{XW}{WY} \cdot \frac{ZY}{XZ}$$

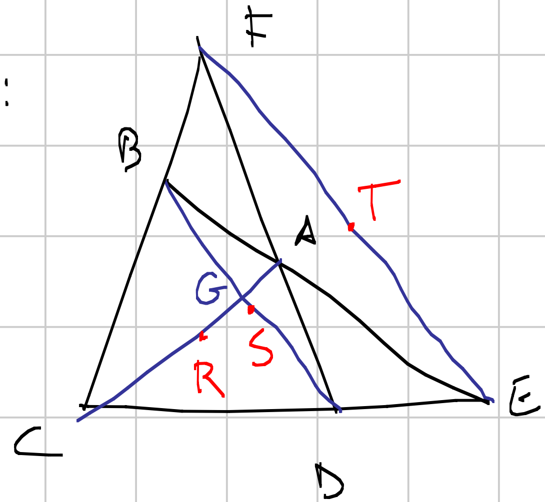
Se Z sta sulla retta all'infinito

W è t.c. $\frac{XW}{WY} = -(X, Y; W, Z)$

Se $(X, Y; W, Z) = -1$ e $Z \in$ retta all'∞

allora $XW = WY$.

Es 2:



R, S, T p.ti medi

$\Rightarrow$ R, S, T allineati

Metodo bovino: metto le coordinate

$A, B, C, D \longrightarrow [1,0,0] \quad [0,1,0] \quad [0,0,1] \quad [1,1,1]$

$E: [1, 1, 0] \quad F: [0,1,1] \quad G: [1, 0, 1]$

$EF: \{x + z = y\} \quad AC: \{y = 0\} \quad BD: \{x = z\}$

$r: \{ax + by + cz = 0\}$

$U = r \cap AC = [-c, 0, a] \quad V = r \cap BD: [-b, a+c, -b]$

$W = r \cap EF: [c+b, c-a, -a-b]$

Troviamo R su AC t.c. $(A, C; U, R) = -1$

$A\ [1, 0] \quad U\ [-c, a] \quad E\ [1, 0] \quad W = [c+b, -a-b]$

$C\ [0, 1] \quad R\ [a, c] \quad F\ [0, 1] \quad T = [a+b, c+b]$

B $[1,0]$ $V=[a+c+b, -b]$ $\quad (a+c+b)[0,1,0]+$

D $[0,1]$ $S=[b, a+c+b]$ $\quad -b[1,1,1]=[-b, a+c, -b]$

$R: [a, 0, c]$ $\quad S: [a+c+b, a+2b+c, a+c+b]$

$T: [a+b, a+2b+c, c+b]$

I) Coniche

A matrice 3×3 simmetrica $\det A \neq 0$

conica proiettiva: $\mathcal{C} = \{ P:[x,y,z] \mid {}^tPAP = 0 \}$

$$(x,y,z)\cdot (A) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad a_{12} = a_{21} \quad \ldots$$

$$\mathcal{C} = \{ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0 \}$$

luogo di zeri del generico polinomio omogeneo di grado 2 (irriducibile)

<u>Carta</u> $\{z=1\}$: $\{ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \}$

generica conica affine.

<u>Oss</u>: $\mathcal{C} \cap \{z=0\}$: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0$

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

$\Delta > 0 \longrightarrow$ 2 soluzioni $\longrightarrow$ in carta affine $\mathcal{C}$ è un'iperbole

$\Delta = 0 \longrightarrow$ 1 soluzione $\longrightarrow$ $\mathcal{C}$ è una parabola

$\Delta < 0 \longrightarrow$ 0 soluzioni $\longrightarrow$ $\mathcal{C}$ è un'ellisse.

$T: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ $\quad$ B matrice di T

$$T(\mathcal{C}) = \{ X \mid T^{-1}(X) \in \mathcal{C} \}$$

$$T(\mathcal{C}) = \{ X \mid (B^{-1}X)^t A (B^{-1}X) = 0 \} =$$

$$= \{ X \mid X^t (B^{-1})^t A B^{-1} X = 0 \}$$

è una conica con matrice $(B^{-1})^t A B^{-1}$

Teo: Tutte le coniche proiettive non vuote date da matrici A con $\det A \neq 0$ sono proiettivamente equivalenti.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{C} = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \} = \emptyset$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\not\Updownarrow$ NON SONO EQUIVALENTI!!

II) Giochiamo con le coniche

$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A, B, C, D\}$ in generale.

Tangenti ad una conica

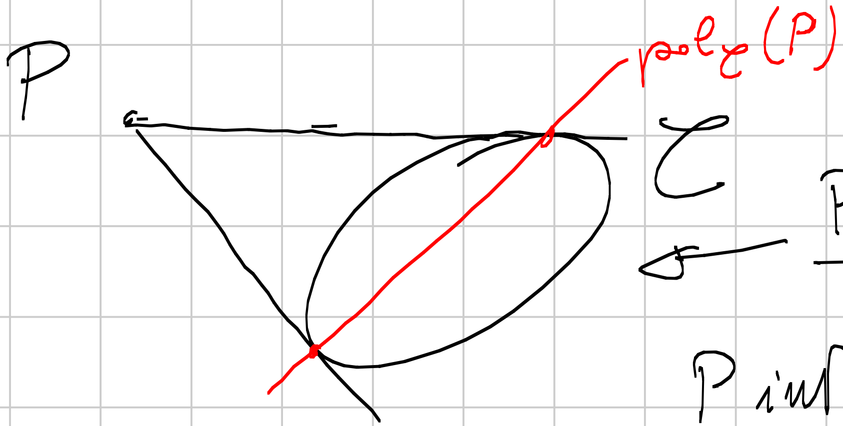
$$\begin{cases} r \\ \mathcal{C} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ {}^tPAP = 0 \end{cases}$$

2 sol : r interseca $\mathcal{C}$
secante

1 sol : r tange $\mathcal{C}$
tangente

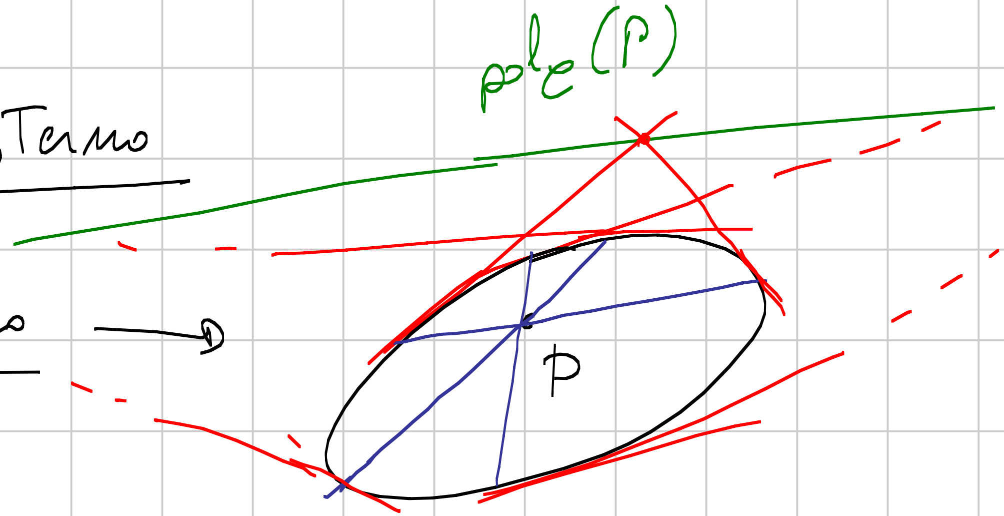
0 sol : r non int. $\mathcal{C}$
esterna

Polarità associata a $\mathcal{C}$



P esterno

P interno



$$\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(P) = \{ X \mid {}^tP A X = 0 \}$$

$$P = (1, 1, 1) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathcal{C}$$

$$\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(P) = \left\{ [x, y, z] \;\middle|\; (1\,1\,1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\parallel$$

$$(2\;2\;2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + 2y + 2z = 0.$$

$$\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(P) = \{ x + y + z = 0 \}$$

Proprietà della retta polare

1) se $P \in \mathcal{C} \Rightarrow P \in pol_{\mathcal{C}}(P)$

e $pol_{\mathcal{C}}(P)$ è tangente a $\mathcal{C}$ in P

2) se $pol_{\mathcal{C}}(P) \cap \mathcal{C} = \{A, B\} \Rightarrow PA, PB$ sono tangenti a $\mathcal{C}$.

3) se $P \in pol_{\mathcal{C}}(Q) \Rightarrow Q \in pol_{\mathcal{C}}(P)$

$$\left(\hookrightarrow \ {}^tQAP = 0 \Rightarrow ({}^tQAP)^t = 0^t = 0 \right.$$

$$\left. \Rightarrow {}^tP\,{}^tA\,Q = 0 \Rightarrow {}^tPAQ = 0 \right)$$

$pol_{\mathcal{C}} : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \{\text{rette di } \mathbb{P}^2\}$ iniettiva ($\det A \neq 0$)

suriettiva (rette $\equiv$ terne omogenee)

$$pol_{\mathcal{C}}(r) = P \overset{def.}{\Longleftrightarrow} pol_{\mathcal{C}}(P) = r$$

di modo che $\mathrm{pol}_\mathcal{C}(\mathrm{pol}_\mathcal{C}(P)) = P$.

4) $\mathrm{pol}_\mathcal{C}(P) \cap \mathrm{pol}_\mathcal{C}(Q) = \mathrm{pol}_\mathcal{C}(PQ)$

5) la retta per $\mathrm{pol}_\mathcal{C}(r)$ e $\mathrm{pol}_\mathcal{C}(s)$ è $\mathrm{pol}_\mathcal{C}(r \cap s)$

$P = [a, b, c] \longrightarrow$ retta con coeff. $A \cdot P$

$$(P^t A X = 0)$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{pol}_\mathcal{C}(\cdot)$ è una dualità.

<u>Oss</u>: una conica, tramite dualità, viene mandata nell'insieme di rette che inviluppano una conica.

$\mathcal{C}$ tramite la dualità $\mathrm{pol}_\mathcal{C}(\cdot)$ rimane fissa.

Coniche e birapporto

<u>Teo</u>: Siano A, B, C, D su una conica $\mathcal{C}$ non degenere ($\det A \neq 0$), allora per ogni $P \in \mathcal{C}$ il birapporto

$$(PA, PB; PC, PD) =: (A, B; C, D)_P$$

è indipendente da P.

(e si indica con $(A, B; C, D)_{\mathcal{C}}$)

<u>Dim</u>: Prendo T proiett. t.c. $T(\mathcal{C}) = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$

e considero la carta $\{z = 1\}$

Allora $\mathcal{C} \rightsquigarrow \{x^2 + y^2 = 1\}$.

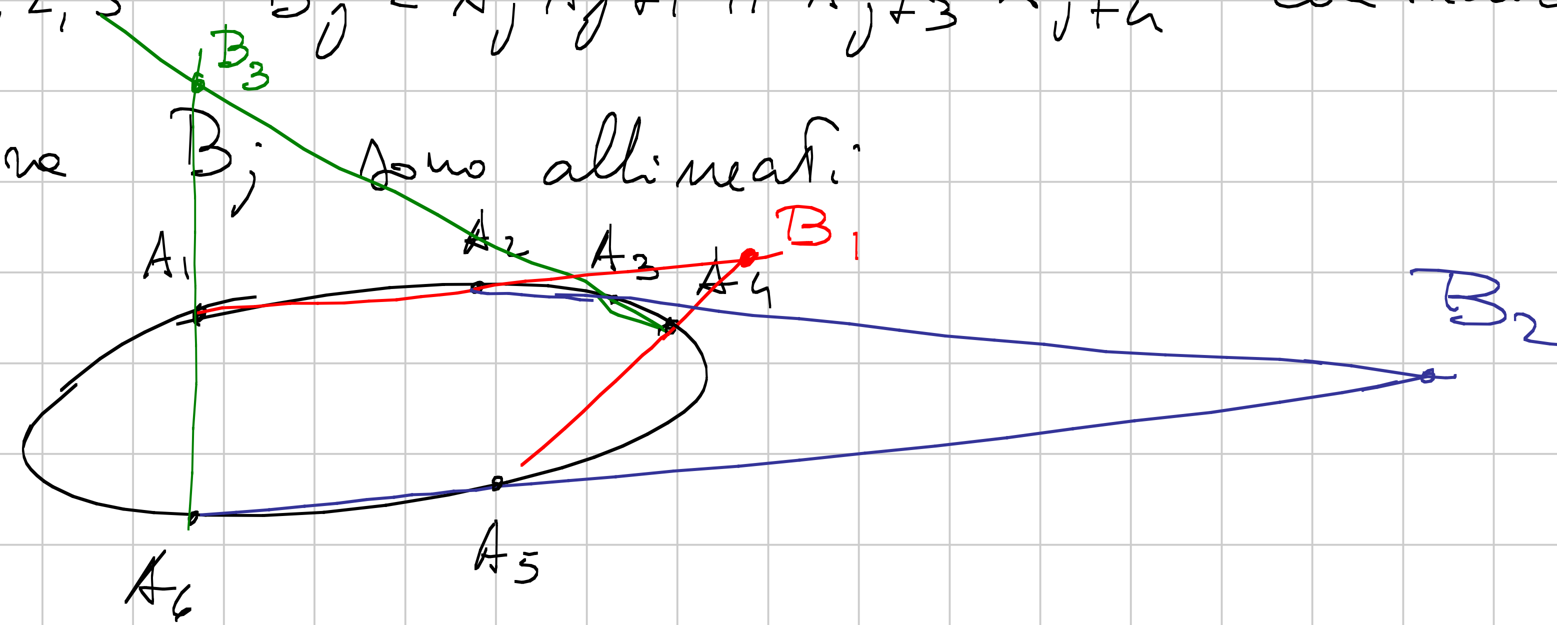
Il birapporto $(PA, PB; PC, PD)$ dipende dagli angolo

Tra le 4 rette che non variano se $P \in \mathcal{C} \Rightarrow$ il birapp. è costante. $\square$

<u>Teo Pascal</u>: A_i, $i = 1 \dots 6$ su $\mathcal{C}$ conica non deg.

$j = 1, 2, 3$ $\quad B_j = A_j A_{j+1} \cap A_{j+3} A_{j+4}$ con indici mod 6

Allora B_j sono allineati



<u>Dim</u>: r retta per B_1 e B_3 $\quad \{C, D\} = r \cap \mathcal{C}$

intesi come soluzioni del sistema in $\mathbb{C}$

$E = r \cap A_2A_3 \qquad F = r \cap A_5A_6$

$$(C, B_3; F, D) = (C, B_3; F, D)_{A_6} = (C, A_1; A_5, D)_{\mathcal{C}} =$$

$$= (C, A_4; A_5, D)_{A_4} = (C, G; B_1, D) =$$

inf. con r $\qquad G = A_1A_4 \cap r$

$$= (C, G; B_1, D)_{A_1} = (C, A_4; A_2, D)_{A_1} =$$

$$= (C, A_4; A_2, D)_{A_3} = (C, B_3; E, D) \Rightarrow E = F. \ \square$$

inf. con r

Duale di Pascal (Brianchon)

Sia $\mathcal{C}$ una conica, siano a_i, $i=1,\dots,6$ tang. a $\mathcal{C}$,

def. $P_i = a_i \cap a_{i+1}$ mod 6, $b_j = P_i P_{i+3}$ mod 6.

Allora b_j concorrono.

(Esagono circoscritto $\Rightarrow$ diag. principali concorrono)

Vero per dualità.

Casi particolari: Se (ad. es.) $A_1 \equiv A_2$ in Pascal

$A_2 A_2 =$ tang in $A_1 \equiv A_2$

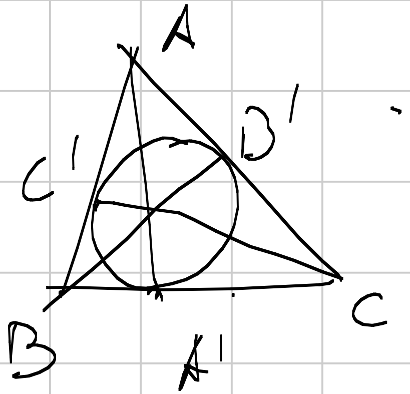
Es: ABC triangolo Γ cfr. circoscritta

t_A, t_B, t_C tangenti in A, B, C

Allora $AB \cap t_C$, $BC \cap t_A$, $AC \cap t_B$ sono allineati.

Dim: Pascal sull' esagono $AABBCC$.

Duale:



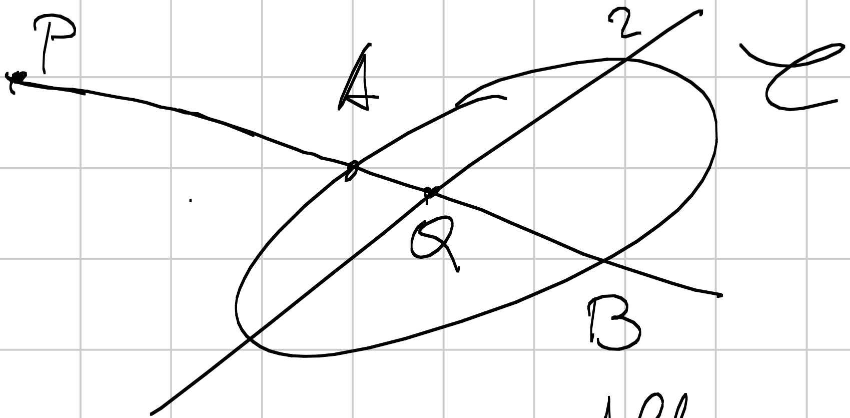
[Inizio: Teo: Dati A, B, C e una conica $\mathcal{C}$ per essi

$\exists\ T: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ proiett. tale che

$T(A) = [1,0,0]$ $T(B) = [0,1,0]$ $T(C) = [0,0,1]$ $T(\mathcal{C}) = \{xy + yz + zx = 0\}$]

Birapporto e polarità

Lemma della corda e della polare



$r = pol_{\mathcal{C}}(P)$

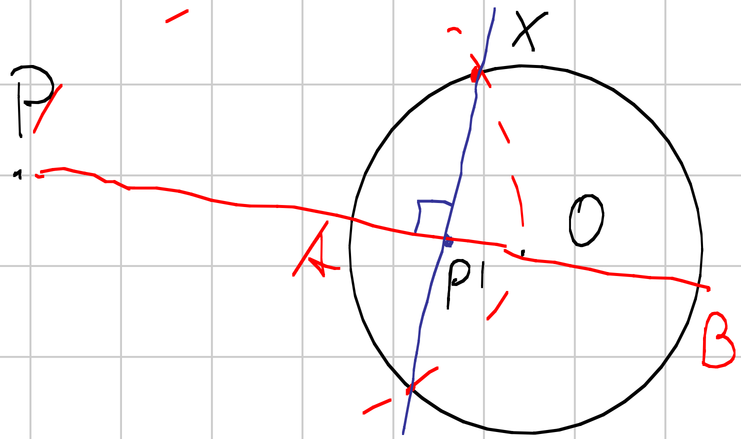
$Q = r \cap AB$

$P \in AB$

Allora $(A, B; P, Q) = -1$

Dim: $P \longrightarrow \infty$
$\mathcal{C} \longrightarrow$ cfr $\Rightarrow$ ovvio. $\square$

Oss: Polare rispetto a una circonferenza?

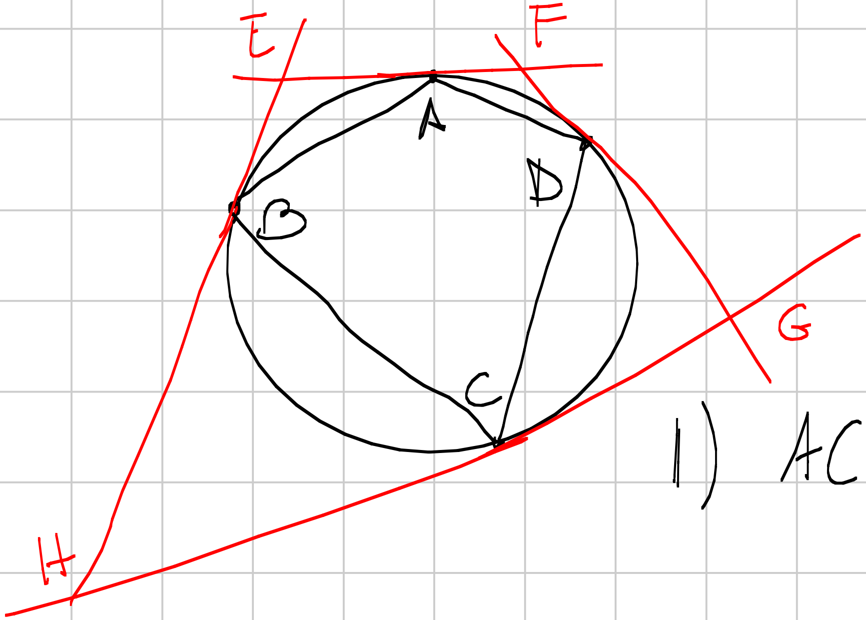


$P' =$ inverso circolare di P

$pol_C(P) =$ perp. a OP per P'!

$$(A,B;P,P') = -1 \qquad \frac{AP'}{P'B} = -\frac{AP}{PB}$$

Quadrilateri inscritti e circoscritti



$E = pol(AB)$

$F = pol(AD)$

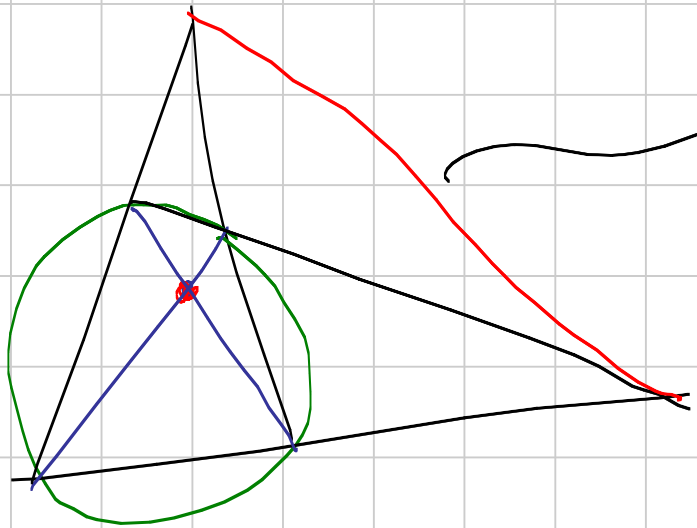
$G = pol(CD)$

$H = pol(BC)$

1) AC, BD, EG, FH concorrono

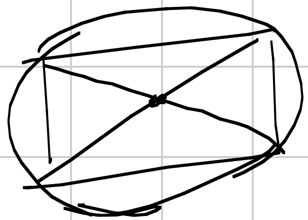
$EG = pol(AB \cap CD)$ $\quad FH = pol(AD \cap BC)$

$EG \cap FH = pol(r)$ dove r passa per $AB \cap CD$ e $AD \cap BC$

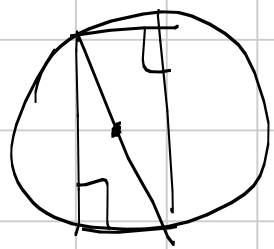


∞

ellisse



in una circ



OK $\Leftarrow$

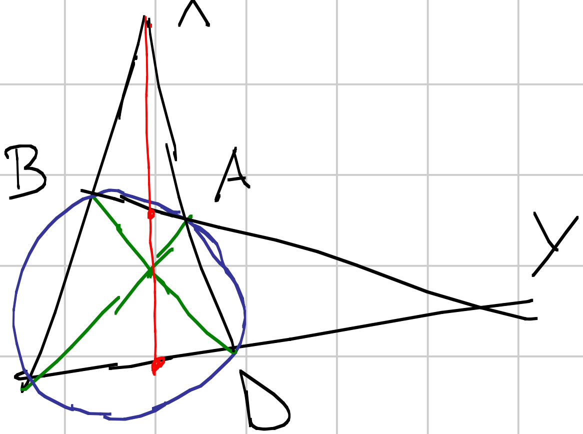
Dim 2 : Brianchon su EFDGHB

EG, FH, DB concorrono.

Brianchon su EAFGCH

EG, AC, FH concorrono. TJ

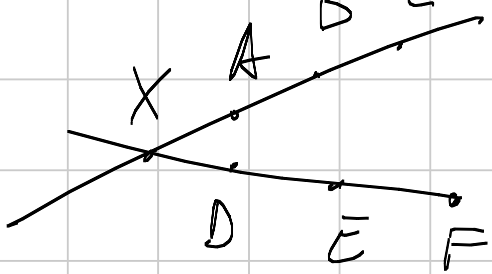
Lemma:



$$\boxed{\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(XY) = AC \cap BD}$$

$\forall \mathcal{C}$ conica per ABCD

Lemma interessante:



se $(X, A; B, C)$
$\parallel$
$(X, D; E, F)$

allora AD, BE, CF concorrono.

III) Coordinate omogenee in un Triangolo

Nel piano $\longrightarrow$ ABC.

<u>A - Coord. baricentriche</u>

$P \longrightarrow \left[[PBC], [PCA], [PAB] \right]$

$$\boxed{[PBC] + [PAC] + [PAB] = [ABC]}$$

$[PAB]$ = area di $\overset{\triangle}{PAB}$ con segno rispetto ad $\overset{\triangle}{ABC}$

$[PAB] > 0$ se C e P stanno dalla stessa parte di AB

$\Rightarrow$ Questa corrispondenza associa al piano la carta $\{x+y+z \neq 0\}$ in $\mathbb{P}^2$

<u>OSS</u>: sono inv. per affinità

B - Coord. trilineari

$$P \longrightarrow [\, d(P,BC),\ d(P,AC),\ d(P,AB) \,]$$

(distanze con segno)

$P \to [x, y, z]$ $\quad BC\,x + AC\,y + AB\,z = 2\,[ABC]$

Questa corrisp. manda il piano nella carta

$\{ax + by + cz \neq 0\}$ $\quad a = BC,\ b = AC,\ c = AB$

Oss: Non è inv. x affinità, solo per similitudini.

Rapporto tra coord. bar. e coord. tri

$[\quad]_B$, $[\quad]_T$ $\qquad [\quad]_B = [\quad]_T \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

Legame tra coord bar. e vettori

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ vertici del triangolo

$$\vec{P} = \lambda \vec{A} + \mu \vec{B} + \nu \vec{C} \qquad \lambda + \mu + \nu = 1$$

$$[PAB] = (\vec{A} - \vec{P}) \wedge (\vec{B} - \vec{P}) =$$

$$= \left((1-\lambda)\vec{A} - \mu \vec{B} - \nu \vec{C} \right) \wedge \left(-\lambda \vec{A} + (1-\mu)\vec{B} - \nu \vec{C} \right) =$$

$$= \Big((1-\lambda)(1-\mu)\vec{A} \wedge \vec{B} - \lambda\mu \vec{A} \wedge \vec{B} + \mu\nu \vec{B} \wedge \vec{C} + \nu(1-\mu)\vec{B} \wedge \vec{C}$$

$$- (1-\lambda)\nu \vec{A} \wedge \vec{C} - \nu\lambda \vec{A} \wedge \vec{C} \Big) =$$

$$= \vec{A} \wedge \vec{B} \left(\quad \nu \quad \right) + \nu \vec{B} \wedge \vec{C} - \nu \vec{A} \wedge \vec{C} = \nu [ABC]$$

$$P \to [\lambda, \mu, \nu]_B$$

Oss Tardiva: le coord così introdotte sono PROPRIO coord. proiettive $\Rightarrow$ valgono le formule per la retta per 2 punti, l'intersez di 2 rette e tutto quello che abbiamo detto sulle coniche.

Calcolo delle coordinate

$[1,0,0]_T = [1,0,0]_B = A$

$[0,1,0]_T = [0,1,0]_B = B$

$[0,0,1]_T = [0,0,1]_B = C$

$[1,1,1]_B =$ baricentro

$[1,1,1]_T =$ incentro

$[0,1,1]_B$ = pt. medio di BC (e cicliche)

$[0,1,1]_T$ = piede della bisett. da A. (e cicliche)

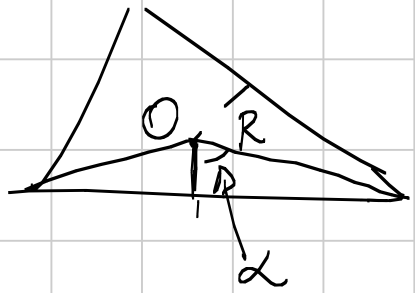
$[0,b,c]_B$ = piede della bisettrice da A (e cicliche)

$[0,c,b]_T$ = pt. medio di BC (e cicliche)

baricentro in trilineari : $\left[\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right]_T = [bc, ac, ab] = [\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma, \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\gamma, \ldots]$

$= \ldots$

Circocentro

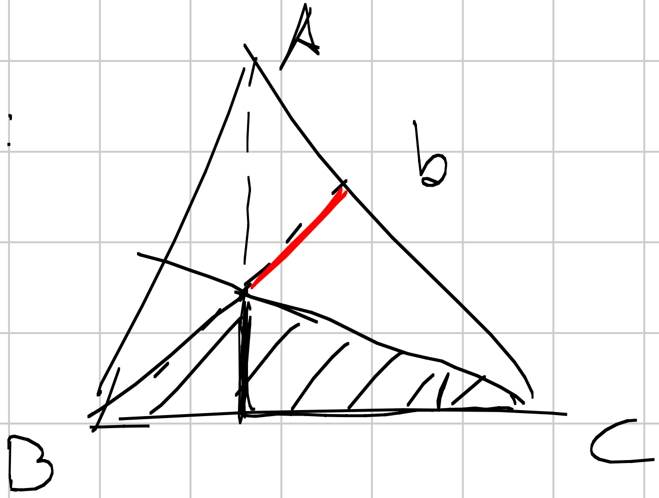


$d(O, BC) = R\cos\alpha$

$[OBC] = \frac{R^2}{2} \operatorname{sen} 2\alpha$

$O: [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]_T \simeq [\operatorname{sen}2\alpha, \operatorname{sen}2\beta, \operatorname{sen}2\gamma]_B$

Ortocentro:



$$b\cos\gamma\cot\beta = b\,\frac{\cos\gamma\cdot\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} =$$

$$= 2R\cos\gamma\cos\beta$$

$$[\cos\gamma\cos\beta,\ \cos\alpha\cos\gamma,\ \cos\alpha\cos\beta]_T$$

$$\left[\frac{a}{\cos\alpha},\ \frac{b}{\cos\beta},\ \frac{c}{\cos\gamma}\right]_B$$

Incentro in baricentriche: $[a, b, c]_B$

Eq della circ. circoscritta

Passa per $[1,0,0]$ $[0,1,0]$ $[0,0,1]$

$\Rightarrow$ ha eq. $\{\alpha yz + \beta xz + \gamma xy = 0\}$

Trilineari: $\{ayz + bxz + cxy = 0\}$

deve passare x le intersez. asse n bisettrice

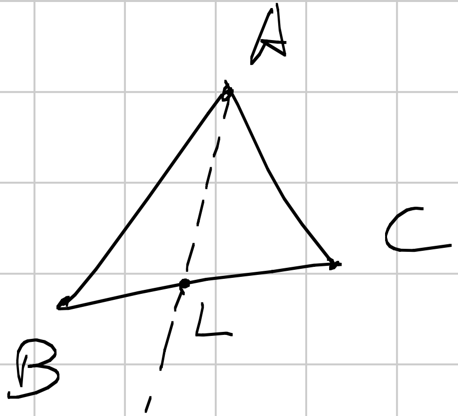
baricentriche: $[x, y, z]_B \to \left[\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right]_T$

$$a\frac{y}{b}\frac{z}{c} + b\frac{x}{a}\frac{z}{c} + c\frac{x}{a}\frac{y}{b} = 0$$

$$\Rightarrow \{a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0\}$$

Provate a trovare l'eq. della cfr. inscritta.

Coniugazione isogonale e isotomica



F : rette per $A \to$ rette per A

$AB \longrightarrow AC$

$AC \longrightarrow AB$

$AL \longrightarrow AL$

$AB : \{z=0\}_T \quad AL : \{y=z\}_T$

$AC : \{y=0\}_T$

$AB \rightsquigarrow [1,0]$

$AC \rightsquigarrow [0,1]$

$AL \rightsquigarrow [1,-1]$

$\{ay+bz=0\}_T$

$\hookrightarrow [a,b] \xrightarrow{F} [b,a]$

$F : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \{by+az=0\}_T$

$P = [p, q, r]_T$

$AP : \{ ry - qz = 0 \}_T$

$BP : \{ rx - pz = 0 \}_T$

$CP : \{ qx - py = 0 \}_T$

$\{ qy - rz = 0 \}_T$

$\{ px - rz = 0 \}_T$

$\{ px - qy = 0 \}_T$

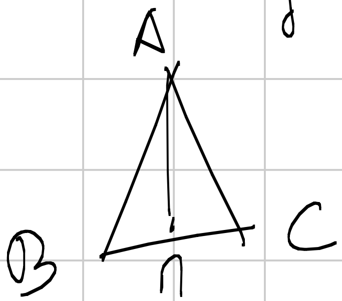
P': coniugato isogonale di P

$[qr, pr, pq]_T = \left[\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r} \right]_T$

$[p, q, r]_B \to \left[\frac{p}{a}, \frac{q}{b}, \frac{r}{c} \right]_T \xrightarrow{\text{con. isog.}} \left[\frac{a}{p}, \frac{b}{q}, \frac{c}{r} \right]_T$

$\left[\frac{a^2}{p}, \frac{b^2}{q}, \frac{c^2}{r} \right]_B \leftarrow$ coniug. isog. in coord. baricentriche

Coniug. isotomico



F : $AB \to AC$
$AC \to AB$
$AM \to AM$

$AM : \{y = z\}_B$

in bar. è uguale al c. isog. in Tril

$P : [p, q, r]_B$

P' coniug. isot. di P : $\left[\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}\right]_B$

Se $P : [p, q, r]_T \to [ap, bq, cr]_B \xrightarrow{\text{c. isot.}} \left[\frac{1}{ap}, \frac{1}{bq}, \frac{1}{cr}\right]_B$

$\to \left[\frac{1}{a^2 p}, \frac{1}{b^2 q}, \frac{1}{c^2 r}\right]_T$

Coniugato isogonale

$$[p, q, r]_T \longrightarrow \left[\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}\right]_T$$

$$[p, q, r]_B \longrightarrow \left[\frac{a^2}{p}, \frac{b^2}{q}, \frac{c^2}{r}\right]_B$$

Coniug. isotomico

$$[p, q, r]_B \longrightarrow \left[\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}\right]_B$$

$$[p, q, r]_T \longrightarrow \left[\frac{1}{a^2 p}, \frac{1}{b^2 q}, \frac{1}{c^2 r}\right]_T$$

<u>Es</u>: studiare la trasf. : $P \longrightarrow$ coniug isot. del coniug. isog. di P