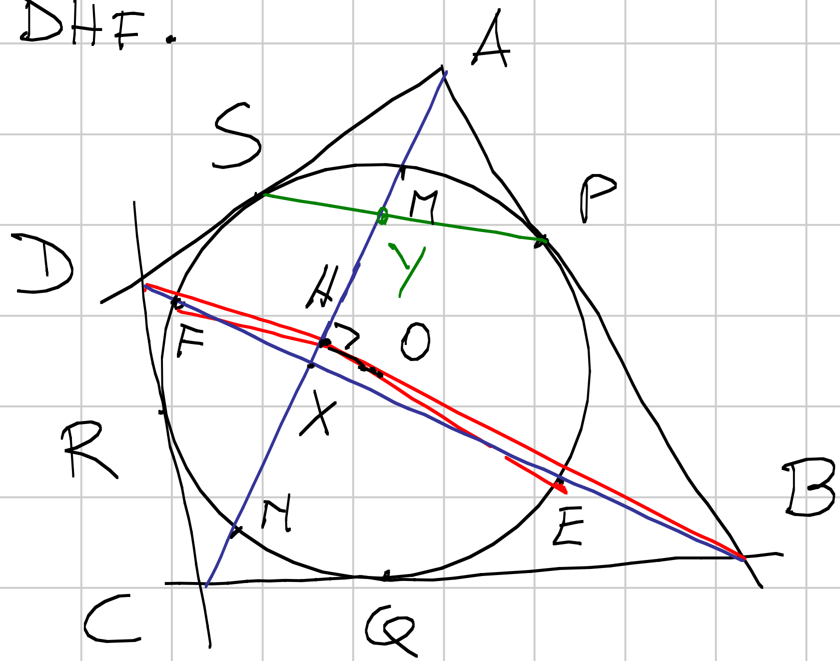
ESERCIZI di GEOMETRIA (G6)

Titolo nota 11/09/2008

Problema 1

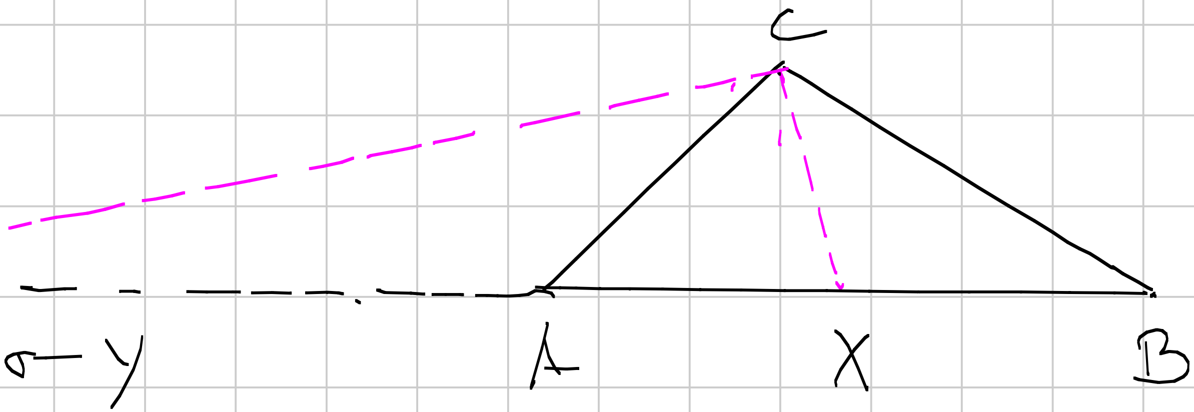
Sia Γ una circonferenza tangente i 4 lati del quadrilatero $ABCD$, sia O il centro di Γ. Siano E, F le intersezioni di BD con Γ e sia H la proiezione di O su AC.
Allora $\widehat{BHE} = \widehat{DHF}$.



Idee: Usare i quadrilateri armonici
x dim. che $F\hat{H}M = E\hat{H}N$ (1)
$\Rightarrow$ basta dim. poi che $D\hat{H}N = B\hat{H}N$.

Osservazioni: $K = \text{pol}(AC) \in BD$
$OH \perp AC \Rightarrow \text{pol}(H) \parallel AC$
tg in M $\cap$ tg in N $\in BD$

Cosa hanno a che fare le bisettrici con i birapporti??



$(A, B; X, Y) = -1$

si trovano bisettrici $\forall C$ sulla cfr. di diam XY

$\Rightarrow$ Per mostrare che HX biseca $\widehat{BHD}$ dobbiamo vedere che:

- $(B, D; X, K) = -1$
- $H \in$ cfr. di diam XK $\quad (K \in OH \Rightarrow KH \perp HX)$

Ovviamente $(E, F; X, K) = -1 \Rightarrow XH$ biseca $\widehat{EHF}$.

$(B, D; X, K) = ??$

Fatto noto portato da casa: BD, PS, RQ, OH concorrono in K. (polarità)

$(S, P; Y, K) = -1$ (solito lemma corde-polare)

$\Rightarrow$ proiettando da A su BD

$BD \cap AS = D$ $\quad BD \cap AP = B$ $\quad BD \cap AY = X$

$BD \cap AK = K$.

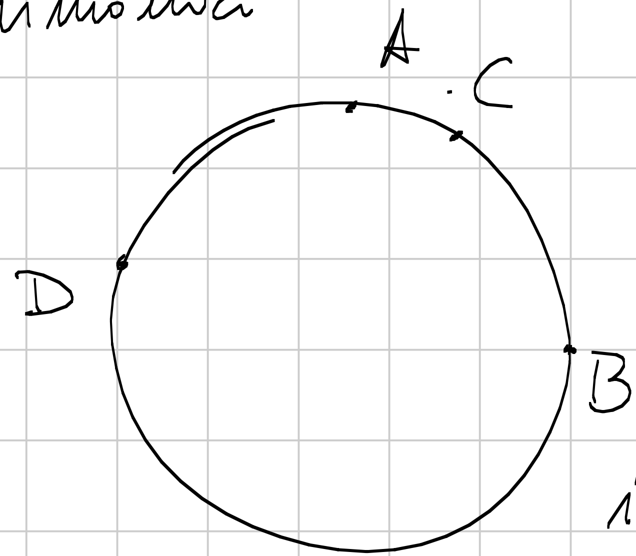
$\Rightarrow (D, B; X, K) = -1$

$\Updownarrow (B, D; X, K) = -1$ $\Rightarrow$ <u>OK</u>.

Divagazione sui quadrilateri armonici

A, B, C, D su Γ conica. $ABCD$ si dice armonico in Γ se $(A,B;C,D)_\Gamma = -1$

- $tg_\Gamma A$, $tg_\Gamma B$, $tg_\Gamma C$, $tg_\Gamma D$ intersecano una qualunque tangente a Γ in 4 punti armonici
- $tg_\Gamma A \cap tg_\Gamma B \in CD$
  ($pol(AB) \in CD$)



$(A,B;C,D)_\Gamma = -1$

$(A,B;C,D)_A = -1$

$(AA;AB;AC,AD) = -1$

interseco con CD

$pol(AB) \in CD \Longleftarrow (CD\cap AA; CD\cap AB; C,D) = -1$

$(CD\cap BB, CD\cap AB; C,D) = -1$

Se Γ è una cfr.

- $AC \cdot BD = BC \cdot AD$

- M pt med di AB, N pt. med. di CD

AB biseca CND, CD bisecq AMB

Birapporto e complesso

$A, B, C, D \longrightarrow a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$$\beta'(a,b,c,d) = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d} \text{ “}=\text{” } (A, B; C, D)$$

se $\beta(a,b,c,d) \in \mathbb{R} \Longrightarrow a,b,c,d$ sono allineati o concicliċi

Problema 2: Γ circonf. ℓ retta che non interseca Γ.

AB diametro di Γ, $AB \perp \ell$ con B più vicino a ℓ.

C punto su Γ, $C \neq A, B$, $AC \cap \ell = D$.

Sia DE tangente a Γ con $E \in \Gamma$, B dalla stessa parte di AC (non è necessario...). $BE \cap \ell = F$, G ulteriore intersezione di AF con Γ.

Allora il simmetrico di G rispetto ad AB sta su CF.

[Shortlist IMO 2004 / TST Svezia 2005-2

TST Moldavo 2005-1 / TST Taiwan 2005-2]

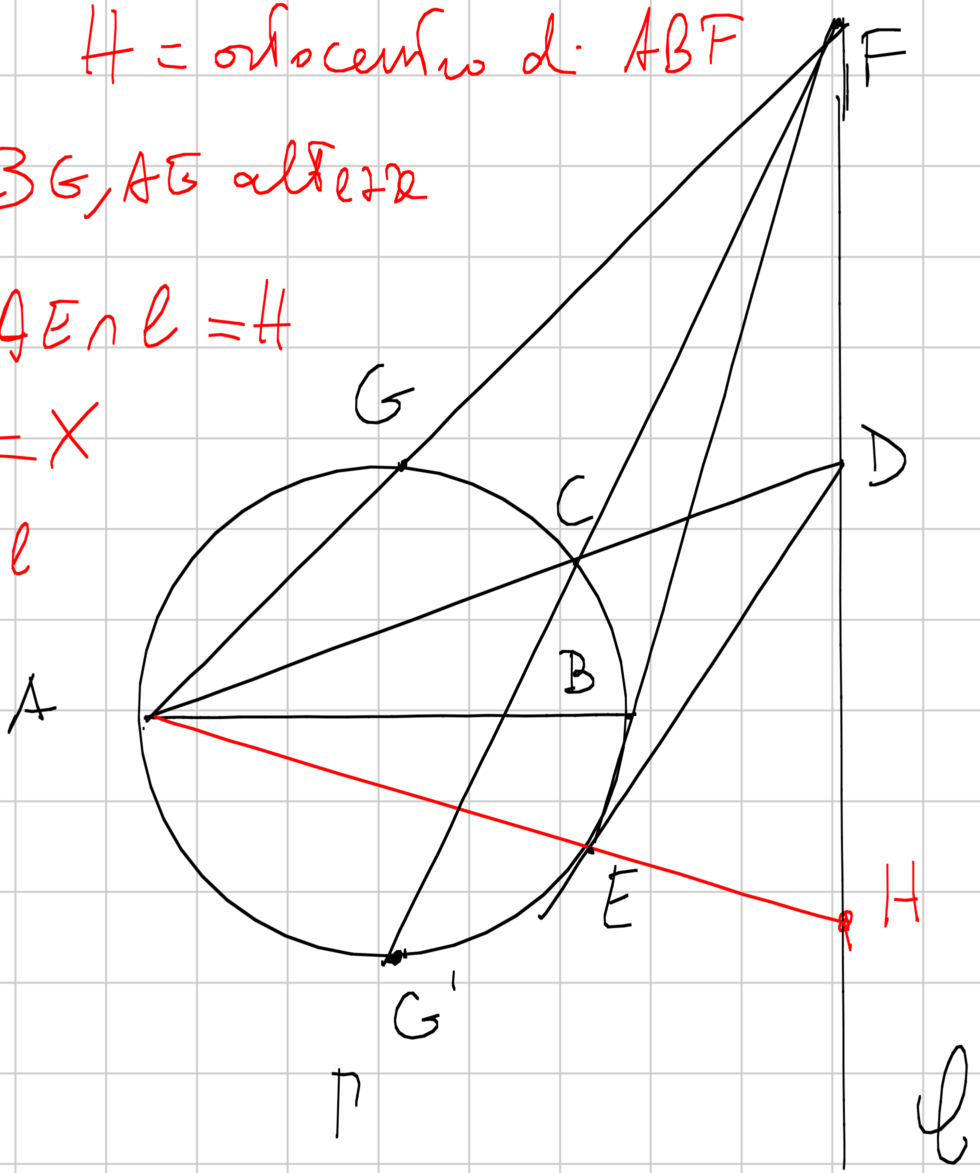
Idea 2: H = ortocentro di $\triangle ABF$

$H \in \ell$, BG, AE altezze

$\Rightarrow BG \cap AE \cap \ell = H$

$AB \cap GE = X$

$\mathrm{pol}(X) = \ell$



G' = simm. di G risp. a AB

Idea: $\ell \to \infty$

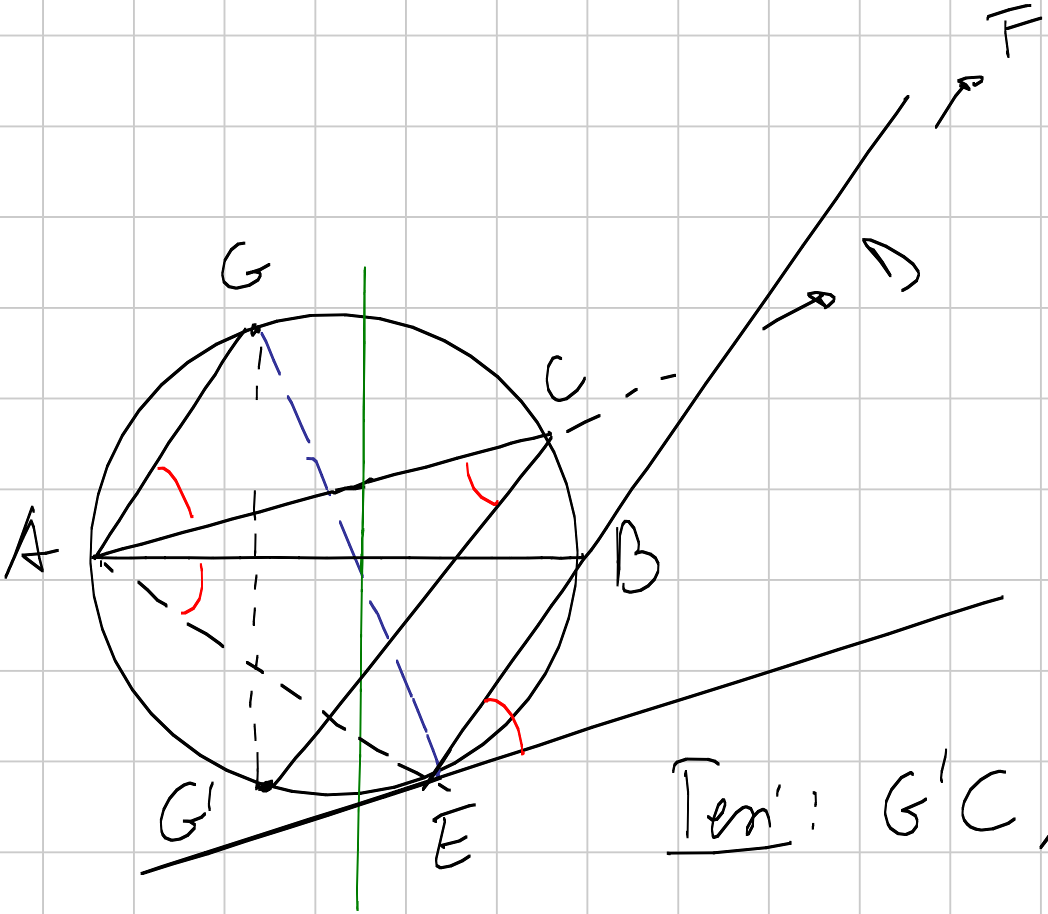
r = attuale retta all'∞

$U = r \cap \ell$

$\boxed{U \to U}$

$D \to V \in r$ $= \ell \to \infty$

cr $\to$ cr.



DE tg a Γ

DE // AC

AB diametro.

G' simm di G

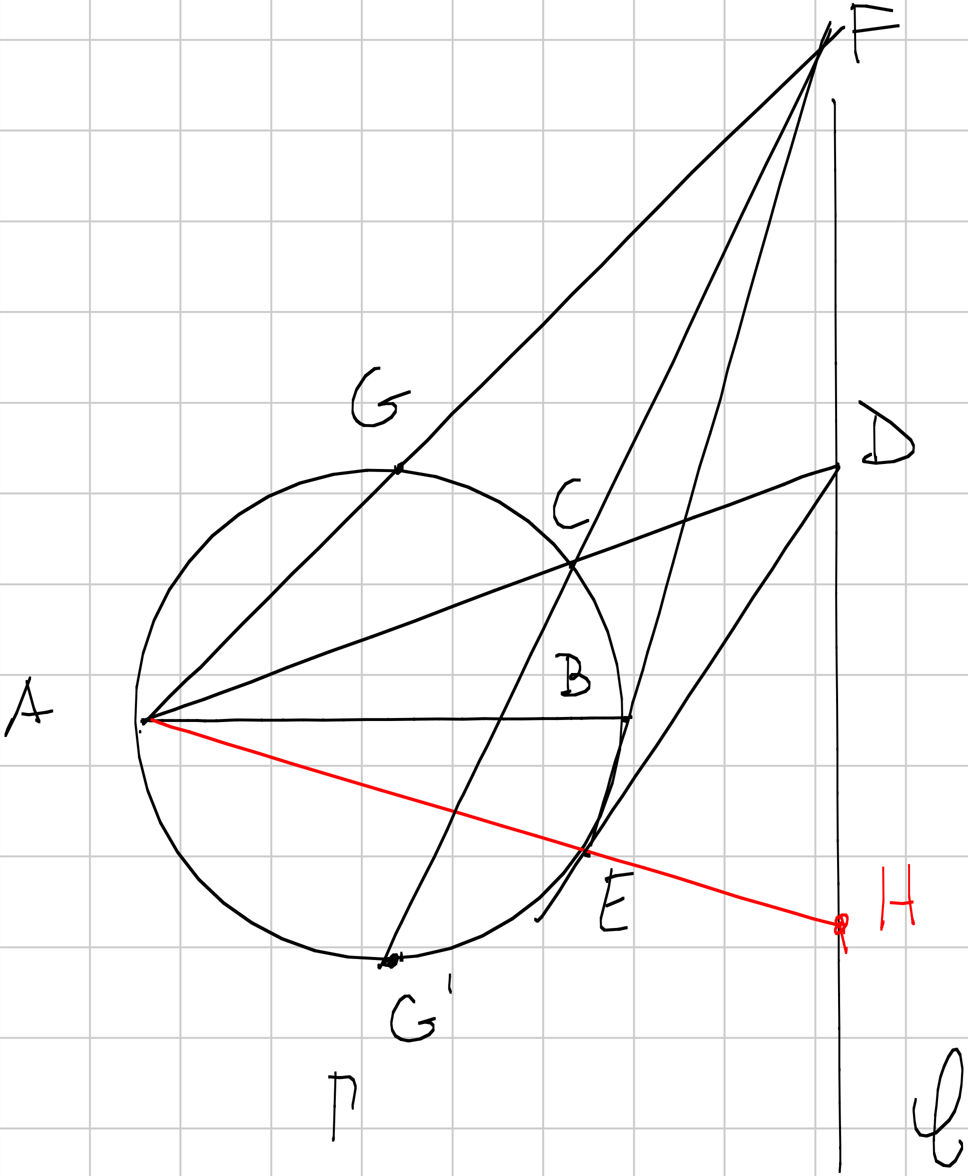
risp a AB

Tesi: G'C // AG // BE

$\widehat{GAC} = \widehat{DEB}$, GE diam ⇒ $\overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{AG'}$

⇒ $\widehat{GAC} = \widehat{DEB} = \widehat{EAB} = \widehat{ACG'}$ fine.

↳ angoli



H ortoc. di ABF

dove ℓ, AE, BG altezze

$\Rightarrow \ell = \mathrm{pol}(X)$

$X = GE \cap AB$

t_g in $G \cap t_g$ in $E \in \ell \Rightarrow GD$ tg.

$\Rightarrow GECA$ armonico

$\Rightarrow$ proiettando da F

$ABYG$ $\qquad Y = CF \cap \Gamma$

AB biseca $Y\hat{O}G$

$\Rightarrow Y = G'.$

<u>Solo Pascal</u>!! Pascal su $AAEBBG$

$\Rightarrow AE \cap BG \in \ell.$

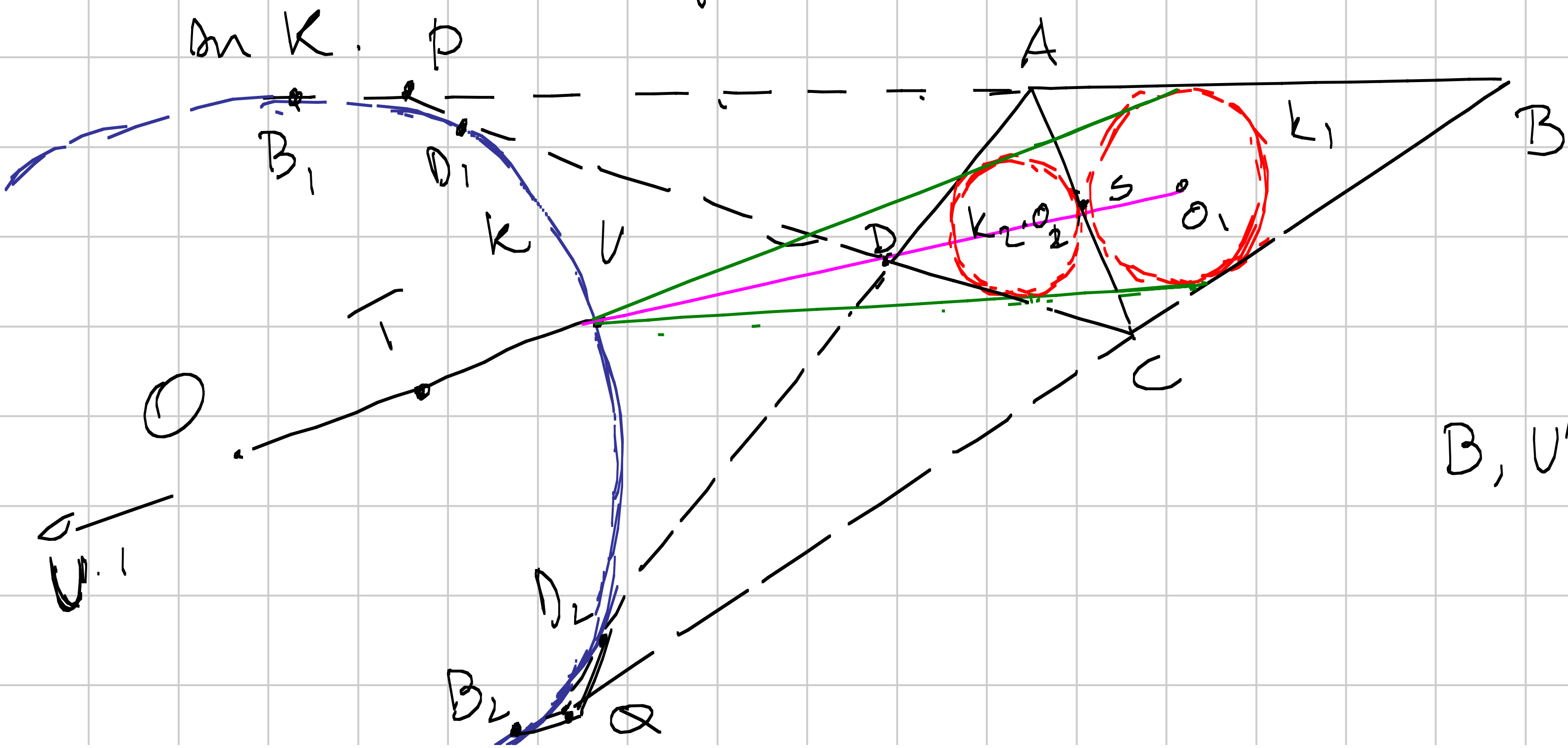
Pascal su $EAABGG' \Rightarrow AB \cap EG' \in \ell.$

Pascal su $CG'EEBA \Rightarrow CG' \cap EB,\ \underset{\underset{\ell}{\Uparrow}}{G'E \cap AB},\ \underset{\underset{\ell}{\Uparrow}}{EE \cap AC}$ all.

$\Rightarrow CG' \cap EB \in \ell \Rightarrow G' \in CF.$

Imo 2008 - 6

ABCD quadrilatero convesso, $BA \neq BC$. Siano k_1, k_2 le cfr. inscritte in ABC e ADC. Supponiamo che esista k cfr. tangente ad AB oltre A e a BC oltre C, tangente anche a AD e CD.
Allora le tangenti comuni esterne di k_1 e k_2 si incontrano su K.



K, K_1, AC

$B, U', k_2 \cap AC$

-) l'int. delle tg. est. è il centro esterno di simil. di k_1 e k_2

-) Teo di Monge $\Rightarrow$ centro int. di sim. tra k_1 e k_2 è su BD.

$\Rightarrow$ S = centro int. di sim. tra k_1 e k_2 = $BD \cap AC$.

-) PQ, B_1D_2, B_2D_1 concorrono su BD in T

-) c. int. di sim. e c. est di sim. dividono armonicamente il seg. tra i centri delle cfr.

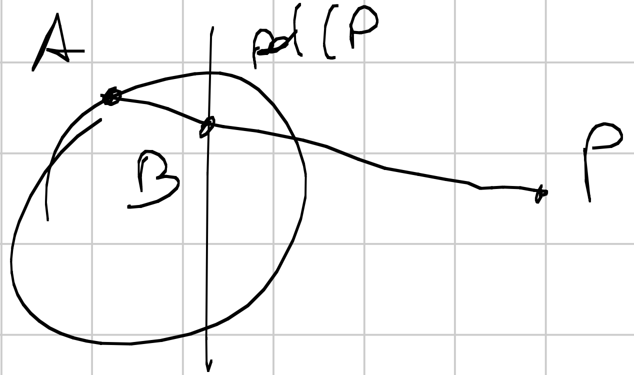
-) QB, QA, QS, QP armonici (lemma corde – polare) intersecando con BD.

-) OB, OD, OS, OT armonica

$OT \cap O_1O_2 = U$ centro est. di sim. tra K_1 e K_2.

Dobbiamo dim che $U \in K$

<u>OSS</u>:



$\exists! \, C$ t.c. $(A, C; B, P) = -1$

e tale C sta sulla cfr.

U' int. di OT con la cfr K (di modo che U', O, T siano in quest'ordine)

- <u>Monge degenere</u>: 1) $B, U', K_1 \cap AC$ sono all.

2) $D, U', K_2 \cap AC$ sono all.

$AC \cap OT = R$ 3) B, B'', U all. $B'' =$ simm di $K_2 \cap AC$ in K_1
4) $U, K_2 \cap AC, B''$ all. $\qquad \overset{\shortparallel}{B'}$

$B, K_2 \cap AC, B'', U$ all
$\qquad \underset{\shortparallel}{} D'$

BB', BS, BD', BR armonici. (proiez. di O_1, O_2, S, U su AC)

$\Downarrow$ proiettando su OT

$(T, R, U, U') = -1 \Rightarrow U \in K.$