Induzione e Pigeonhole

Titolo nota 07/09/2008

$P(n)$ proprietà $n \in \mathbb{N}$

Se 1) $P(1)$ è vera (caso base)
2) $P(k) \Longrightarrow$ ("implica") $P(k+1)$
(passo induttivo)

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$

Induzione "forte":

$P(n)$ proprietà $n \in \mathbb{N}$

Se 1) $P(1)$ è vera
2) $P(k)$ è vera per ogni $k \leq \bar{k} \Rightarrow P(\bar{k}+1)$ è vera

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

Principio del minimo intero (naturale):

Qualunque insieme non vuoto di numeri naturali ha un minimo elemento

Principio della discesa infinita:

Se $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{N}$ e $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \dots$

<u>allora</u> da un certo indice N in poi

$$a_N = a_k = a_{k+1} = \dots \quad \text{per ogni } k \geq N$$

Esiste la scomposizione in fattori primi dei naturali

Dim. Sia $\bar{n}$ il minimo naturale che non ha scomposizione.

1) $\bar{n}$ è primo. (assurdo)

2) $\bar{n}$ non è primo $\bar{n} = k \cdot \ell$ $0 < k, \ell \leq \bar{n}$

anzi $k, \ell < \bar{n}$

allora k e ℓ hanno la scomposizione, quindi anche $\bar{n}$ ce l'ha, assurdo.

$\sqrt{2}$ non è razionale.

Dim. se $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $2q^2 = p^2$.

Allora p è pari, ma allora $p = 2p_1$

$2q^2 = 4p_1^2$ $q^2 = 2p_1^2$.

Allora q è pari,

Allora q è pari, ma allora $q = 2q_1$

$$2p_1^2 = 4q_1^2 \qquad p_1^2 = 2q_1^2.$$

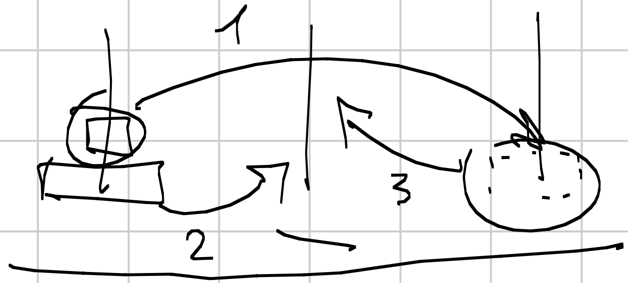
$p, p_1, p_2, \dots p_k \dots$ e $q, q_1, q_2, \dots q_k \dots$

se $p_N = p_{N+1}$ $\quad p_N = 0 \quad 2p_{N+1} = p_N$ assurdo.

Torre di Hanoi

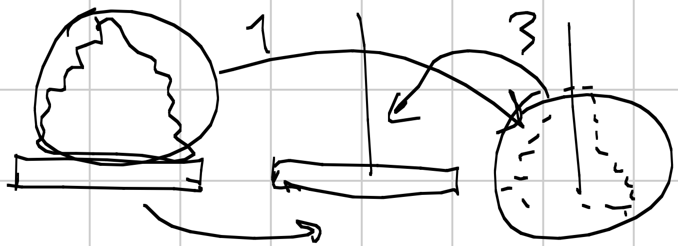
64

M_n = # mosse al minimo per spostare una torre alta n,



$M_1 = 1 \qquad M_2 = 3$

$$M_{n+1} = 2M_n + 1$$



$$\boxed{M_n = 2^n - 1} \qquad P_n$$

1) $M_1 = 2^1 - 1$

2) $M_k = 2^k - 1 \implies M_{k+1} = 2^{k+1} - 1$?

$$M_{k+1} = 2\cdot\left(2^k - 1\right) + 1 = 2^{k+1} - 1 \quad \checkmark$$

per ipotesi, $M_k = 2^k - 1$ è il minimo per spostare la torre $n-1$.

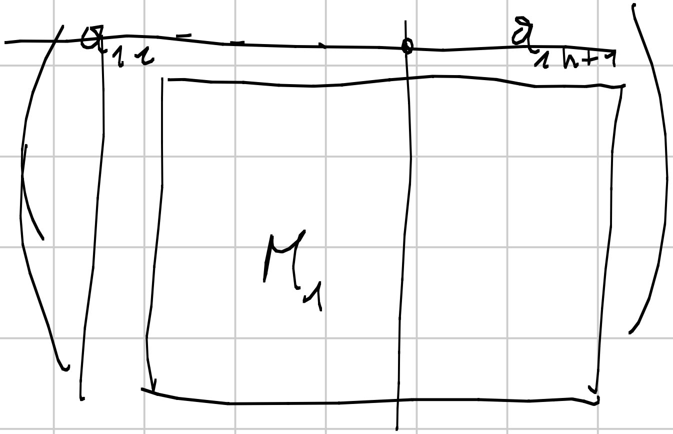
matrice (quadrata) $= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$$

1) det M 1×1 $\det((a)) = a$

2) se so calcolare det M $n \times n$,

M' $(n+1) \times (n+1)$



$$\det M = \sum a_{1i} \cdot \det M_i \cdot (-1)^{i+1}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$a \cdot d + b\,c \cdot (-1)^3 =$

$ad - bc$

determinante di Vandermonde $\quad M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$

$\det M_n$?

$$\det M_1 = 1$$

$$\det M_2 = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda_2 - \lambda_1$$

$$\det M_3 = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$1 \cdot (\lambda_2 \lambda_3^2 - \lambda_2^2 \lambda_3) - (\lambda_1 \lambda_3^2 - \lambda_1^2 \lambda_3) + (\lambda_1 \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2)$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_3)\left(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1^2 + \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)\right) =$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)$$

$$\det M_{n} = \prod_{\substack{i<j \\ i=1\dots n \\ j=1\dots n}} (\lambda_i - \lambda_j) \qquad P_n$$

P_1, anzi P_2 è vera.

$P_n \Rightarrow P_{n+1}$?

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & - & - & 1 \\ & & & \\ \lambda_1^n & - & - & \lambda_{n+1}^n \end{pmatrix}\right) = \quad 1 \cdot \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & - & - & \lambda_{n+1} \\ | & & & | \\ | & & & | \\ \lambda_2^n & - & - & \lambda_{n+1}^n \end{matrix}}$$

$$\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \lambda_{n+1} \\ | & & | \\ | & & | \\ \lambda_2^n & & \lambda_{n+1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \cdot 1 & \lambda_3 & - & - & - \\ \lambda_2 \cdot \lambda_2 & | & & & \\ \vdots & | & & & \\ \lambda_2 \cdot \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^n & & & \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\tilde{M}_1\right) = \lambda_2 \det\begin{pmatrix} 1 & \lambda_3 & \cdots \\ \lambda_2 & \lambda_3^2 & \\ \vdots & \vdots & \\ \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n} & \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdots \lambda_{n+1} \det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & & \lambda_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{n-1} & & \lambda_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdots \lambda_{n+1} \left(\prod_{\substack{i<j \\ i=2\dots n+1 \\ j=2\dots n+1}} (\lambda_i - \lambda_j) \right)$$

$$\sum (-1)^{1+i} \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{a_{1i}} \cdot \det \tilde{M}_i = \prod_{\substack{i<j \\ i,j=1\dots n+1}} (\lambda_i - \lambda_j)$$