Induzione e Pigeonhole 2

Titolo nota 07/09/2008

Teorema fondamentale dell'algebra: (1)

Ogni polinomio $p(x)$ a coefficienti in $\mathbb{C}$ si può fattorizzare in termini lineari

$$p(x) = q_1(x) \cdot q_2(x) \cdots q_n(x) \qquad n = \deg p$$

$$q_i(x) = a_i x + b_i \qquad a_i, b_i \in \mathbb{C}$$

Teorema - - - - - - - (2)

Ogni polinomio $p(x)$ a coefficienti in $\mathbb{C}$ ha una radice (in $\mathbb{C}$)

1) $n=1$ ok

2) Se è vero (1) per i polinomi di grado n, e è vero (2) $p(x)$ ha una radice λ_1

$$p(x) = (x-\lambda_1)\, p_1(x) \qquad \deg p_1 = n-1$$

ma allora p_1 si fattorizza in fattori lineari, quindi anche p

---

Principio dei cassetti:

1) se devo mettere $n+1$ oggetti in n posti, almeno un posto riceve almeno 2 oggetti.

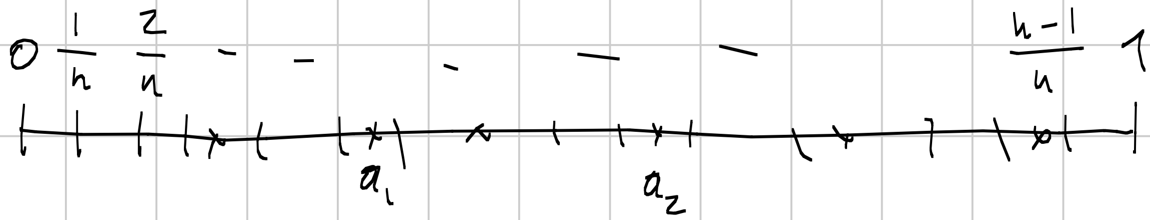
2) se devo mettere $kn+1$ oggetti in n posti, almeno un posto riceve almeno $k+1$ oggetti.

Sia α un numero reale non razionale.

Allora per ogni n esiste un numero razionale $\frac{m}{n'}$ tale che $\left|\alpha - \frac{m}{n'}\right| < \frac{1}{n}$. $\quad n' \leq n$

<u>Dim.</u> $\quad 0, 1\cdot\alpha, 2\cdot\alpha, 3\cdot\alpha, \dots, n\cdot\alpha$.

$$i\cdot\alpha = [i\cdot\alpha] + a_i \qquad 0 \leq a_i < 1$$



Gli a_i sono $n+1$, ma ci sono n intervalli.

Quindi esiste un intervallo $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$

in cui trovo a_ℓ e a_s

cioè $\quad \ell\alpha = n_\ell + a_\ell \quad$ e $\quad s\alpha = n_s + a_s \quad$ e

$$|a_\ell - a_s| < \frac{1}{n} \qquad (s-\ell)\alpha = n_\ell - n_s + a_\ell - a_s, \text{ cioè}$$

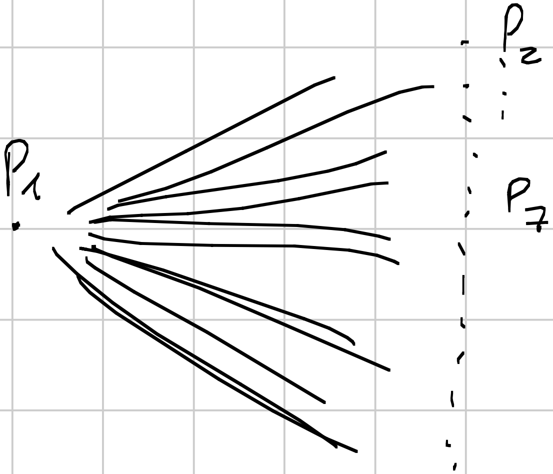
$$\alpha = \frac{n_\ell - n_s}{s-\ell} + \frac{a_\ell - a_s}{s-\ell}$$

razionale

$$\left|\alpha - \frac{n_\ell - n_s}{s-\ell}\right| < |a_\ell - a_s| < \frac{1}{n}$$

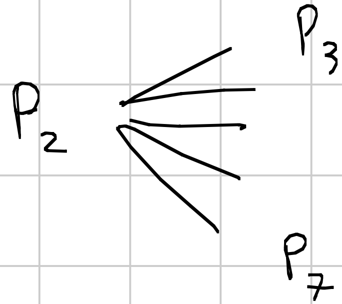
Siano dati <u>17</u> punti e 3 colori con cui colorare i segmenti che uniscono i punti.
Dimostrare che esiste un triangolo monocromatico.

<u>Dim.</u>



16 lati $\qquad 16 = 3 \cdot 5 + 1$

$\Longrightarrow$ esistono (almeno) 6 lati di uno stesso colore B

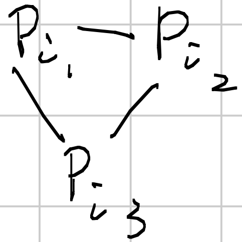


se uno dei lati è B, ✓

se no, ho solo G, R

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

quindi ci sono tre lati dello stesso colore (e sia R)



se un lato è R ✓

se no sono tutti e tre G ✓

$\boxed{\text{IMO 1985}}$