# 1 G1 - Esercizi

1. Si determinino tutti i possibili $\theta$ per cui, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha
$$\cos(2^n\,\theta) < 0.$$

2. I lati di un triangolo $ABC$ realizzano
$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2.$$
Si provi che in tale ipotesi $ABC$ è rettangolo.

3. Due angoli acuti $\alpha, \beta$ verificano
$$\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) = \sin(\alpha + \beta).$$
Si provi che $\alpha + \beta$ è retto.

4. Si provi che
$$4R + r = \sum_{cyc} r_a.$$

5. In un triangolo scaleno ed acutangolo $ABC$, sia $H$ l'ortocentro, siano $H_a, H_b, H_c$ i piedi delle altezze e $M_a, M_b, M_c$ i punti medi dei segmenti $HA, HB, HC$ (rispettivamente). Si provi che la superficie del triangolo $M_aM_bM_c$ è superiore a quella del triangolo $H_aH_bH_c$.

6. Siano $A, B, C$ tre numeri reali positivi ed $f$ la funzione $f(A, B, C) = C(A + B + C) + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2$. Si provi che
$$\sum_{cyc} \sqrt{f(A, B, C)} \geq 2 \max\left(\sqrt{f(A, B, C)}, \sqrt{f(B, C, A)}, \sqrt{f(C, A, B)}\right)$$

## 1.1 Soluzioni

1. Per $n = 0$ deve aversi $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, per $n = 1$ deve aversi $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ oppure $\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Proseguendo nel processo di dimezzamento è facile verificare (per induzione) che al passo $n$-esimo l'angolo $\theta$ dev'essere compreso tra due convergenti successivi della serie geometrica $2\pi \sum_{j=0}^{+\infty}(-2)^{-j}$ o della serie geometrica $4\pi \sum_{j=0}^{+\infty}(-2)^{-j}$. Segue che tutte e sole le soluzioni sono $\theta = \pi \pm \frac{\pi}{3}$. E' vero che le soluzioni dell'equazione
$$cos(x) = cos(mx)$$
sono multipli razionali di $\pi$ per ogni intero $m$?

2. Dividendo per $4R^2$ abbiamo $\sum_{cyc} \sin^2(\alpha) = 2$, che possiamo riscrivere come $\sum_{cyc} \cos(2\alpha) = -1$. Invertendo (ossia riparametrizzando) l'identità
$$\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cos(\theta_3) = \frac{1}{4}\left(\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) + \sum_{cyc}\cos(-\theta_1+\theta_2+\theta_3)\right)$$
il problema si trasforma nel provare che $\prod_{cyc}\cos(\alpha) = 0$
implica $ABC$ rettangolo, ovvio. Si ricordi che, sempre per l'iterazione delle formule di Werner/prostaferesi, vale pure
$$\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\sin(\theta_3) = \frac{1}{4}\left(-\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) + \sum_{cyc}\sin(-\theta_1+\theta_2+\theta_3)\right)$$

3. Si deve avere
$$\sin(\alpha)\sin(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\beta) = \sin(\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \sin(\beta)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$
Ma se $\alpha$ e $\beta$ sono angoli acuti lo sono anche i rispettivi angoli complementari, ed il seno è una funzione monotona crescente sugli angoli acuti. Segue che, se $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$, il membro sinistro maggiora strettamente il destro, e il viceversa quando $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Affinchè valga l'identità dev'essere dunque $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

4. Provato preliminarmente che
$$r_a = p\tan\frac{\alpha}{2} = p\,\frac{2bc\sin\alpha}{2bc\,(1+\cos\alpha)} = \frac{4p\Delta}{(b+c-a)(b+c+a)} = \frac{\Delta}{p-a}$$
$$r = \frac{\Delta}{p} \quad R = \frac{abc}{4\Delta}$$
moltiplicando l'intera identità per $\Delta$ ed utilizzando la formula di Erone si ottiene
$$abc = -(p-a)(p-b)(p-c) + \sum_{cyc} p(p-b)(p-c)$$
Notiamo che per $a = 0$ il membro destro vale $p^2(p-b)+p^2(p-c) = ap^2 = 0$; permutando ciclicamente le variabili abbiamo che il membro sinistro divide il destro; ambedue sono però polinomi (omogenei) di terzo grado in $(a, b, c)$ che in $(1, 1, 1)$ valgono 1, dunque coincidono.

5. Dato che $M_aM_bM_c$ è omotetico ad $ABC$ (secondo una dilatazione di centro $H$ e rapporto 2) il punto della questione è fornire la dovuta maggiorazione per la superficie del triangolo ortico $H_aH_bH_c$. Per il teorema di Feuerbach la circonferenza circoscritta a quest'ultimo ha raggio $R/2$; per la similitudine tra $AH_bH_c$ e $ABC$ il lato $H_aH_b$ ha lunghezza pari a $c\cos\gamma$ (vedi Appendice); quello che dobbiamo provare è dunque

$$\prod_{cyc}\cos(\alpha) < \frac{1}{8}$$

Tramite le formule di Werner/prostaferesi e quelle di duplicazione del coseno possiamo riscrivere

$$\sum_{cyc}\sin^2(\alpha) < \frac{9}{4}$$

ossia

$$9R^2 > (a^2+b^2+c^2)$$

D'altro canto, in un sistema di riferimento centrato in $O$ si ha

$$\|H\|^2 = \|A+B+C\|^2 = \sum_{cyc}\|A\|^2 + \sum_{cyc} 2\,A\circ B$$

$$\|H\|^2 = 3R^2 - \sum_{cyc}\left(\|B-C\|^2 - \|B\|^2 - \|C\|^2\right)$$

$$\|H\|^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$$

E il problema diviene: provare che in un triangolo scaleno il circocentro è distinto dall'ortocentro, ovvio. Incidentalmente, il problema è analogo a provare la disuguaglianza di Eulero $R \geq 2r$, attraverso il calcolo della superficie del triangolo degli excentri. Invertendo le relazioni per i lati del triangolo ortico si ha, in generale

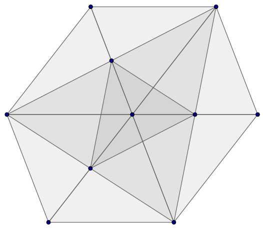
$$[I_aI_bI_c] = \frac{ab\cos(\gamma/2)}{2\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)} = 8R^2\prod_{cyc}\cos\frac{\alpha}{2} = 2R^2\sum_{cyc}\sin\alpha = 2pR$$

Dato che $[ABC] = pr$, l'esercizio mostra che $R \geq 2r$, con l'uguaglianza verificata solo quando $H \equiv O$, ossia solo quando $ABC$ è equilatero.

6. Effettuando le sostituzioni $a = B+C, b = A+C, c = A+B$, si ha che $(a,b,c)$ sono i lati di un triangolo, e la tesi si trasforma nella disuguaglianza triangolare tra le quantità

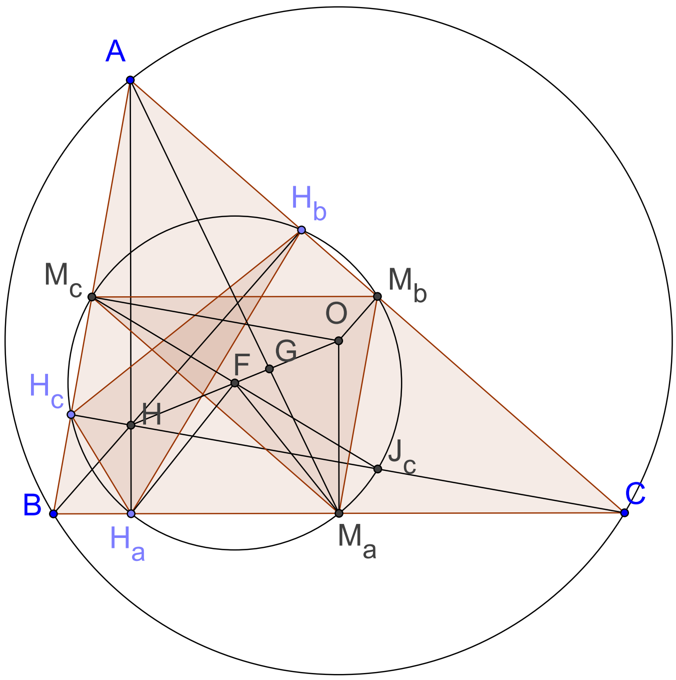
$$l_c = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2} \quad \text{(e cicliche)}$$

Il problema chiede dunque di provare che le mediane di un triangolo formano un triangolo, e la soluzione è interamente racchiusa nella figura a seguire:



Da quest'ultima è semplice provare, per giunta, che la superficie del triangolo delle mediane è $\frac{3}{4}$ della superficie del triangolo di partenza!

## 1.2 Appendice




Dalla configurazione in figura scaturiscono una gran quantità di fatti interessanti e degni di essere ricordati:

1. Il quadrilatero $BH_cHH_a$ è ciclico, come pure il quadrilatero $AH_cH_aC$. Dal teorema della secante segue $BC \cdot BH_a = BA \cdot BH_c$, $CH \cdot CH_c = BC \cdot (BC - BH_a)$, $CH_aH_b \sim CAB$, $H_aH_b = c\cos C$, le altezze sono bisettrici per il triangolo ortico, $ABC$ è triangolo degli excentri di $H_aH_bH_c$;

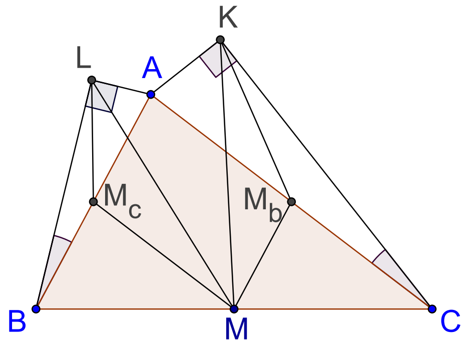
2. $BH_a + H_aC = BC$ implica $c\cos B + b\cos C = a$ da cui la formula di addizione per il seno;

3. Il circocentro di $ABC$ è ortocentro per il suo triangolo mediale, segue che gli assi di $M_aM_bM_c$ si intersecano nel punto medio $F$ del segmento $OH$. D'altro canto $ABC$ e il suo triangolo mediale hanno il medesimo baricentro: segue che $G$ deve giacere su $OH$ dividendolo in modo che risulti $\frac{OH}{OG} = 3$;

4. $H_aHOM_a$ è un trapezio rettangolo, dunque $FH_a = FM_a$. Per questa ragione il triangolo mediale e quello ortico hanno la medesima circonferenza circoscritta, di raggio pari a $\frac{R}{2}$;

5. $CH$ ha lunghezza doppia rispetto ad $OM_c$, segue che, detto $J_c$ il punto medio di $HC$, si ha $HJ_c$ parallelo e congruente a $OM$, $HM_cOJ_c$ parallelogramma e $J_c$ antipodale ad $M_c$ nella circonferenza circoscritta al triangolo mediale.

### 1.2.1 Lemma di Edriv-Gabriel-Jack

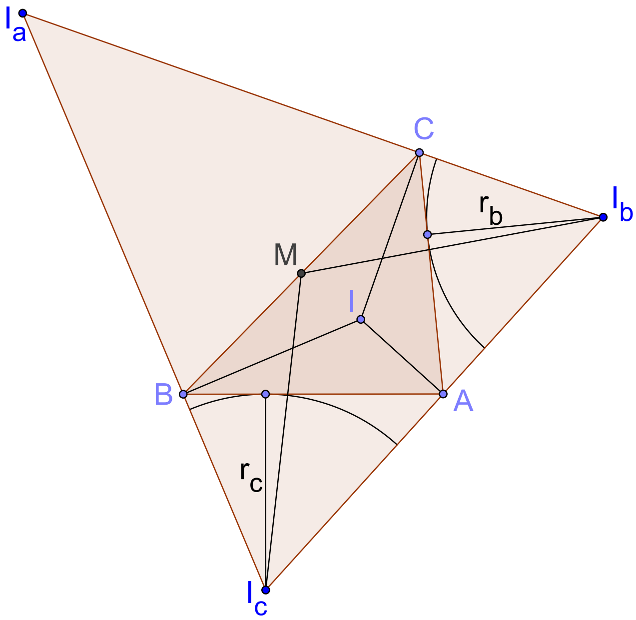



Nella configurazione in figura, dove $\widehat{LBA} = \widehat{KCA} = \theta$ ed $M$ è il punto medio di $BC$, si ha $LM = KM$. Preso infatti un sistema di riferimento centrato in $A$, si ha $M = M_b + M_c$, $L = e^{2i\theta}(A - M_c) + M_c$, $K = e^{-2i\theta}(A - M_b) + M_b$,
ma chiaramente

$$\|L - M\| = \|e^{2i\theta}M_c + M_b\| = \|e^{-2i\theta}M_b + M_c\| = \|K - M\|$$

In alternativa, si consideri che $LM_c = AM_c = MM_b$, $KM_b = AM_b = MM_c$, $\widehat{MM_cA} = \widehat{KM_bM}$, per cui i triangoli $LM_cM$ e $KM_bM$ risultano congruenti.

### 1.2.2 Lemma dell'asse radicale




Data la configurazione in figura, vogliamo provare che l'asse radicale delle circonferenze ex-inscritte $\Gamma_b$ e $\Gamma_c$ passa per il punto medio di $BC$. In generale, se una retta tange due circonferenze in due punti $U$ e $V$ (rispettivamente), l'asse radicale delle due circonferenze passa per il punto medio di $UV$; nel nostro caso è sufficiente scrivere le lunghezze dei segmenti di Soddy per venire rapidamente a capo del problema. Volendoci complicare la vita, proviamo che $\text{pow}(M, \Gamma_b) = \text{pow}(M, \Gamma_c)$ applicando il teorema del coseno e quello della secante-tangente:

$$\text{pow}(M, \Gamma_c) = MI_c^2 - r_c^2 = \frac{a^2}{4} + (BI_c^2 - r_c^2) - a \cdot BI_c \cdot \cos\left(\frac{\pi + \beta}{2}\right)$$

$$BI_c^2 - r_c^2 = \left(\frac{b + c - a}{2}\right)^2 \qquad BI_c \sin\frac{\beta}{2} = \frac{b + c - a}{2} = CI_b \sin\frac{\gamma}{2}$$