ANALISI (Argomenti vari)

Note Title 07/09/2009

SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a_n numeri dati

Somme parziali $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ $\quad S_n \xrightarrow{n\to+\infty} ?$

$$S_n \to \begin{cases} S_n \to \ell \in \mathbb{R} & \text{la serie converge ad } \ell \\ S_n \to +\infty,\ S_n \to -\infty & \text{la serie diverge} \\ S_n \text{ NON HA LIMITE} & \end{cases}$$

Esempio banale 1: $a_n \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S_n = 0 \Rightarrow \sum a_n = 0$

" " 2: $a_n \equiv 1$ " $\Rightarrow S_n = n+1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

" " 3: $a_n \equiv (-1)^n$ " $\Rightarrow S_n = \begin{cases} \nearrow 1 & n \text{ pari} \\ \searrow 0 & n \text{ dispari} \end{cases} \Rightarrow \sum a_n$ INDET.

Condizione necessaria: $\boxed{\sum a_n \text{ converge} \Rightarrow a_n \to 0}$

Dim. $a_n = S_n - S_{n-1}$

$\quad\ \ \downarrow \quad\ \downarrow \quad\ \ \downarrow$

$\quad\ \ 0 \quad\ \ \ell \ - \ \ell$

Achtung! Non vale il viceversa, cioè se $a_n \to 0$, allora $\sum a_n$ può convergere, ma anche NO.

SERIE TELESCOPICHE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (IMO 2002-4)

$$S_n = \overbrace{1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}}^{a_1} + \overbrace{\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}}^{a_2} + \overbrace{\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}}^{a_3} + \dots + \cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

— o —

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} [\log(n+1) - \log n]$$

$$S_n = \log(n+1) - \log 1 \to +\infty$$

SERIE GEOMETRICHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

$$S_n = 1+a+a^2+\dots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \quad \text{se } a \neq 1 \qquad (S_n = n+1 \text{ se } a=1)$$

$$S_n \to \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ +\infty & \text{se } a=1 \\ \frac{1}{1-a} & \text{se } -1<a<1 \\ \text{NON HA LIMITE} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Una serie geometrica converge $\iff |a|<1$.

SERIE ARMONICHE GENERALIZZATE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

(Armonica classica: $a=1$)

$$\boxed{\text{Una serie armonica generalizzata converge} \iff a>1}$$

Esempio truccoso: $n=2$

$$1+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 4}+\dots$$

$$\leq 1+\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots}_{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}}$$

che converge

IMPORTANTE

[Fatto generale: $\boxed{\text{se} \quad 0 \leq}\, a_n \leq b_n$, allora

$$\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty$$

$$\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty \quad]$$

[Fatto generale: se $a_n \geq 0$ sempre, allora
$\sum a_n$ può solo convergere o divergere a $+\infty$]

Esempio $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$ $\qquad$ N.B. $\sin\frac{1}{n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Disug. classica: $\sin x \leq x$ per $x \geq 0$ $\qquad \sin\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ conv.} \Rightarrow \sum \sin\frac{1}{n^2} \text{ conv.}$$

Esempio classico $a=1$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots \geq$$

$$\geq 1+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\dots}_{\frac{1}{2}}$$

Tutti i blocchi hanno somma $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Diverge $\quad S_n \sim \frac{1}{2}\log_2 n$

Si adatta al caso $a=2$?

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\frac{1}{81}+\dots \leq$$

$$\leq 1+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}_{\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{64}+\dots}_{\frac{1}{64}\cdot 8=\frac{1}{8}}\ \underbrace{\qquad}_{\frac{1}{16}}$$

I vari gruppi determinano una serie $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ geometrica convergente.

CRITERIO DI CONDENSAZIONE DI CAUCHY

Sia a_n una successione
(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $a_n \to 0$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} \text{ converge}$$

— o —

Applicazione: caso in cui $a_n = \frac{1}{n^a}$. Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^a} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2^{1-a}\right]^n$$

L'armonica è diventata una geometrica! Quindi converge

$\iff -1 < 2^{1-a} < 1 \iff a > 1$

— o —

Dim. criterio di condensazione:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+\dots \leq$$ (uso a_n decr. e pos.)

$$\leq \underbrace{a_1}_{a_1\cdot 1}+\underbrace{a_2+a_2}_{a_2\cdot 2}+\underbrace{a_4+a_4+a_4+a_4}_{a_4\cdot 4}+\underbrace{a_8+\dots}_{a_8\cdot 8}$$

Ho così dim. un'implicazione, cioè

$$\sum 2^n\cdot a_{2^n} < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty$$

$$a_1+a_2+a_3+\dots \qquad +a_8+\dots \geq$$

$$\geq a_2+\underbrace{a_2}_{1\cdot a_2}+\underbrace{a_4+a_4}_{2a_4}+\underbrace{a_8+\dots+a_8}_{4a_8}+\underbrace{a_{16}+\dots}_{8a_{16}}$$

$$\sum 2^n\cdot a_{2^n}=+\infty \Rightarrow \sum 2^{n-1}a_{2^n}=+\infty \Rightarrow \sum a_n=+\infty$$

—o—o—

Dim. per induzione della convergenza delle armoniche con $a>1$

$\boxed{a=2}$ Devo dim. che $S_n \leq M \quad \forall n\in\mathbb{N}$

posso fissarlo

Cerco un enunciato + forte:

$$S_n \leq 5-\frac{1}{n}$$ (se ci riesco: ok!)

$\boxed{n=1}$ banale

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$

$$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{(n+1)^2} \underset{\text{ipotesi induttiva}}{\leq} 5-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} \overset{\text{Hope}}{\underset{\text{SI}}{\leq}} 5-\frac{1}{(n+1)}$$

Spero che:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{\underset{\text{SI}}{\leq}} \frac{1}{n}$$

$$\frac{n+1+1}{(n+1)^2} \overset{?}{\underset{\text{SI}}{\leq}} \frac{1}{n} \qquad n^2+2n \overset{?}{\underset{\text{SI}}{\leq}} (n+1)^3$$

Sia ora $a>1$ generico. Punto a dimostrare che

$$S_n \leq M - \frac{A}{n^{a-1}} \qquad ??$$

Passo induttivo: $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^a} \leq M - \frac{A}{n^{a-1}} + \frac{1}{(n+1)^a}$

$$\leq M - \frac{A}{(n+1)^{a-1}}$$

Spero che $\quad \frac{A}{(n+1)^{a-1}} + \frac{1}{(n+1)^a} \overset{?}{\leq} \frac{A}{n^{a-1}}$

$$\frac{A(n+1)+1}{(n+1)^a} \overset{?}{\leq} \frac{A}{n^{a-1}} \quad ; \quad n^a + 2n^{a-1} \overset{?}{\leq} (n+1)^a$$

$$A n^a + A n^{a-1} + n^{a-1} \leq A(n+1)^a$$

Divido per n^a

$$A + \frac{A}{n} + \frac{1}{n} \leq A\left(1+\frac{1}{n}\right)^a$$

[Fatto generale $\quad (1+x)^a \geq 1+ax \qquad x>0$

vale se $a \geq 1$: segue dal fatto che $f(x) = (1+x)^a$ è una funzione convessa

Le funzioni convesse stanno sopra le rette tangenti. La tangente in $x=0$ a $(1+x)^a$ è

$f'(x) = a(1+x)^{a-1} \qquad f'(0) = a$

retta tg: $\quad f(0) + f'(0)\cdot x = 1+ax$]

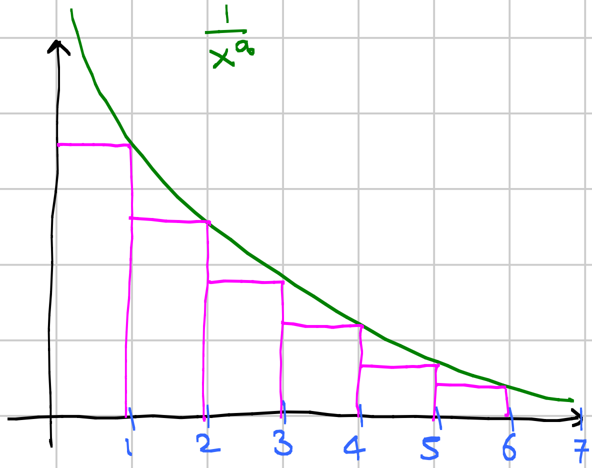
$$A + \frac{A}{n} + \frac{1}{n} \leq A\left(1+\frac{1}{n}\right)^a \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \geq 1 + \frac{a}{n}$$

$$A\left(1+\frac{1}{n}\right)^a \underset{\text{Fatto gen}}{\geq} \left(1+\frac{a}{n}\right)A = \cancel{A} + \frac{aA}{\cancel{n}} \underset{\text{Hope}}{\geq} \cancel{A} + \frac{A}{\cancel{n}} + \frac{1}{\cancel{n}}$$

$$aA \geq A+1 \qquad A \geq \frac{1}{a-1}$$

Basta ora prendere M per soddisfare il caso $n=1$.

— o — o —



Dim. standard

Serie = somma aree rettangoli

$\leq$ area che sta sotto la funzione

$$= \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx$$

posso partire anche da 127

$$= \int_1^{+\infty} x^{-a}\,dx = \left[\frac{1}{1-a}\,x^{1-a}\right]_1^{+\infty}$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{1}{1-a}\,\frac{1}{x^{a-1}}\right]_1^M$$

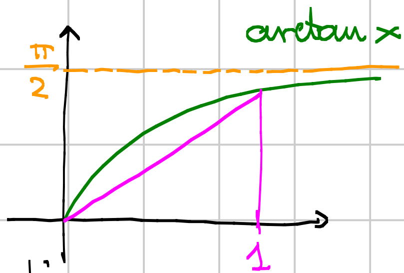
$$= \lim_{M\to+\infty} \boxed{\frac{1}{1-a}\,\frac{1}{M^{a-1}}} - \frac{1}{1-a}$$

$\to 0$ (perché $a>1$)

Quindi l'area sotto la funzione è finita, quindi la serie converge.

— o — o —

Esercizio $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{n} = \ ?$



arctan x è concava $\Rightarrow$ sta sopra le secanti.

Quindi $\arctan x \geq x\cdot\arctan 1$ per ogni $x\in[0,1]$

quindi $\arctan\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}\arctan 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$\sum \arctan\frac{1}{n} \geq \arctan 1 \sum\frac{1}{n} = +\infty$$

Volendo: $\arctan x = x +$ resto piccolo quando $x\to 0$

$\arctan\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ per n grande

FRAZIONI EGIZIE Frazioni del tipo $\frac{1}{m}$ $m \in \mathbb{N}$ $m \geq 1$

Fatto noto: * ogni razionale $\frac{p}{q} > 0$ si scrive come somma di frazioni egizie DISTINTE

* ci sono infiniti modi di scriverlo
* dati k interi positivi distinti $n_1, n_2, \dots, n_k$ con

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k} < \frac{p}{q}$$

posso completare la somma con addendi distinti in modo da arrivare a $\frac{p}{q}$

PASSO BANALE I modi di scrivere una certa frazione sono infiniti

Motivo: $\frac{1}{m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m(m+1)}$

Con questa identità sostituisco la frazione dal denom. + grande con 2 altre frazioni.

IDEA PER FARE UNA DIM. Esempio: $\frac{p}{q} = \frac{3}{2}$

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} \quad \text{Ok.}$$

Provare a scrivere una dimostrazione che l'algoritmo termina !!!
Penso che non sia ovvia

SECONDA IDEA Esamino uno per volta i termini della serie armonica e "se ci stanno li metto"

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \qquad\qquad \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

Anche in questo caso DOVREBBE terminare, ma non è ovvio dimostrarlo

TERZA IDEA Punto a fare scendere il numeratore!!
In un certo senso è induzione sul numeratore

Data $\frac{a}{b}$ cerco $\frac{1}{k}$ in modo tale che $\frac{a}{b} - \frac{1}{k}$ abbia numeratore + piccolo di a e ≥ 0.

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{k} = \frac{ak-b}{bk}$$ voglio $ak - b < a$, cioè $ak < a+b$

$\boxed{k < 1 + \frac{b}{a}}$.

D'altra parte voglio $ak - b \geq 0$, cioè $ak \geq b$, cioè $\boxed{k \geq \frac{b}{a}}$

Dalle 2 condizioni sembra ragionevole prendere

$$k = \left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil$$ (parte intera superiore)

Dato $\frac{a}{b}$ ho preso $k_1 = \left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil$ e ho resto $\frac{ak-b}{bk}$. Al passo succ. prendo

$$k_2 = \left\lceil \frac{bk_1}{ak_1 - b} \right\rceil$$

Rispetto a prima ho NUM + grande e DEN + piccolo

Devo controllare che $k_2 \neq k_1$. Basta controllare che sia

$$\frac{bk_1}{ak_1 - b} \geq \frac{b}{a} + 1$$

$\cancel{ab}k_1 \geq \cancel{ab}k_1 + a^2k_1 - b^2 - ab$

$b^2 + ab \geq a^2 k_1$, cioè $k_1 \leq \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2$

Quindi tutto ok se $\frac{b}{a} \geq 1$, cioè se $\frac{a}{b} \leq 1$.

Non funziona se $\frac{a}{b} > 1$, perché possono venire $k_1 = k_2 = \ldots = 1$.

Quindi: FASE 1 → utilizzo la seconda idea per avvicinarmi abbastanza in modo da avere resto < 1

FASE 2 → procedo con $\lceil\ \rceil$. Sono sicuro che nella fase 2 non si creano ripetizioni

Devo solo controllare che i denominatori usati in fase 2 siano diversi da quelli usati in fase 1. Per questo basta che k_1 (primo denom. fase 2) sia maggiore del max denom. fase 1.

$k_1 = \lceil \frac{b}{a} \rceil >$ ultimo denom. fase 1. (N.B. $\frac{a}{b}$ = resto al termine della fase 1)

Se io in fase 1 ho messo $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ e mi sono fermato perchè $\frac{1}{n+1}$ non ci stava. Quindi il resto $\frac{a}{b}$ è $< \frac{1}{n+1}$, quindi tutti i denom. che potrò usare d'ora in poi saranno PER FORZA $> (n+1)$

—o—o—

Come allungare un inizio $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k} < \frac{p}{q}$?

$n_1 < n_2 < \dots < n_k$

FASE 1: aggiungo i termini della serie armonica fino a quando ci stanno partendo da $\frac{1}{n_k+1}$

$\frac{1}{n_k+1} + \frac{1}{n_k+2} + \dots + \frac{1}{n_k+R}$ mi fermo quando $\frac{1}{n_k+R+1}$ NON ci sta.

(N.B. poichè la serie armonica diverge, prima o poi mi fermo)

FASE 2: algoritmo con $\lceil\ \rceil$ che di sicuro produce denom $> n_k+R+1$

SUCCESSIONI PER RICORRENZA

$\boxed{x_{n+1} = f(x_n)}$ AUTONOMO, dipendenza dal solo ultimo termine

$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$ " " da 2 termini prec.

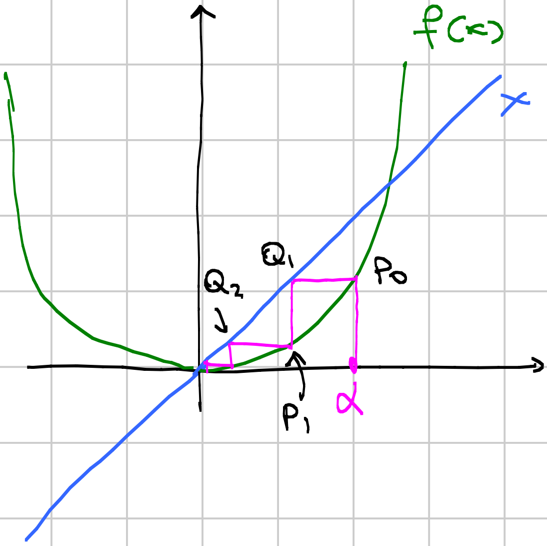
$x_{n+1} = f(x_n, n)$

NON AUTONOMO

STUDIO GRAFICO

Disegno $f(x)$

Disegno x



$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 \\ x_0 = \alpha \end{cases}$$

"Verticale alla funzione, orizz. alla bisettrice"

$P_0 = (\alpha, f(\alpha)) = (x_0, x_1)$

$Q_1 = (x_1, x_1)$ $\quad P_1 = (x_1, f(x_1)) = (x_1, x_2)$

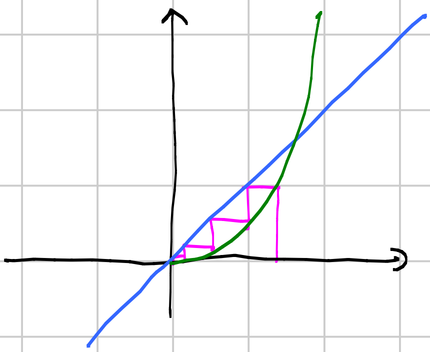
$Q_2 = (x_2, x_2)$ e così via.

In generale: $P_n = (x_n, x_{n+1})$ $\quad Q_n = (x_n, x_n)$

Nel grafico i valori assunti dalla successione sono le coordinate x dei punti costruiti

Esercizio Studio di $x_{n+1} = x_n^3$ $\quad x_0 = \alpha$ al variare di α

* Se $\alpha \in (0,1)$, allora la successione è decrescente e tende a 0.



* Se $\alpha > 1$, allora x_n cresce e tende a $+\infty$

* Se $\alpha = 1$, $x_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$
* Se $\alpha < 0$, allora $x_1 > 0$ e si ricade nel caso precedente.

Dimostrazione rigorosa nel caso $\alpha \in (0,1)$

$\boxed{\text{PIANO}}$ $\boxed{1}$ $0 \leq x_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{2}$ $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{3}$ $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$

$\boxed{4}$ $\ell = 0$

Dim $\boxed{1}$ Banale induzione: vero per $n=0$

Passo induttivo si può fare "applicando $f(x)$"

Ipotesi induttiva: $0 \leq x_n \leq \alpha$. Applico $f(x)$

$$f(0) \leq f(x_n) \leq f(\alpha)$$ (conservo i versi perché f è crescente per $x \geq 0$)

$$0 \leq x_{n+1} \leq \alpha^2 \leq \alpha$$

uso che $\alpha \in (0,1)$

Dim $\boxed{2}$ Strada 1: mediante disequazione

$$x_{n+1} \leq x_n \iff x_n^2 \leq x_n \iff x_n(x_n - 1) \leq 0$$ VERO SE $x_n \in (0,1)$ vero per p.to $\boxed{1}$

Strada 2: per induzione

$\boxed{n=0}$ $\alpha^2 \leq \alpha$ (vero perché $\alpha \in (0,1)$)

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi induttiva: $x_{n+1} \leq x_n$ Applico $f(x)$

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$$

$$x_{n+2} \leq x_{n+1}$$ ← Tesi induttiva

Dim $\boxed{3}$ Fatto generale: se x_n è (debol.) decrescente + limitata inferiormente, allora $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$

Analogo: se x_n è (debol.) crescente + limita superiormente, allora $x_n \to \ell$.

Dim $\boxed{4}$ Sappiamo già che $x_n \to \ell$

$$x_{n+1} = x_n^2$$

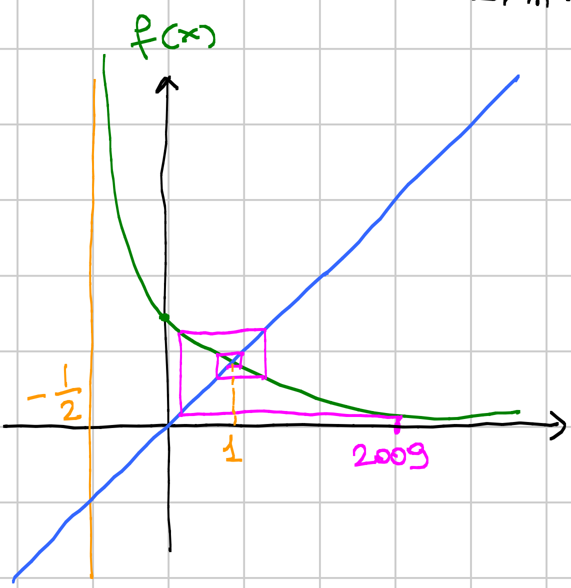
$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\ell = \ell^2$$

$\ell = 0$ → Unica possibilità

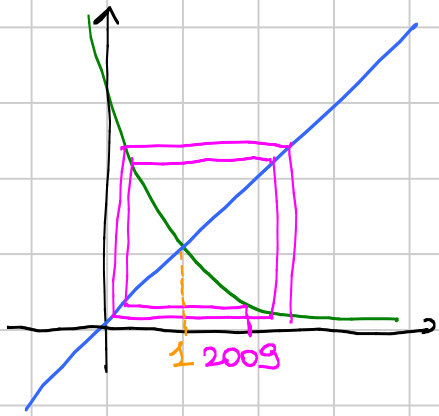
$\ell = 1$ → NO, perché non compatibile con punto $\boxed{1}$.

Esempio 2 $\quad x_{n+1} = \frac{3}{2x_n+1} \qquad x_0 = 2009 \qquad f(x) = \frac{3}{2x+1}$



"Spiralegg. entrante"

Andamento spiraleggiante. Ma il disegno è giusto?



"Spiraleggiamento uscente"

2 tecniche: DUE SOTTOSUCCESSIONI

DISTANZA DAL LIMITE

Due sottosuccessioni $\quad x_{2n}$ è decrescente

x_{2n+1} è crescente

$1 \le x_{2n+2} \le x_{2n} \qquad x_{2n+1} \le x_{2n+3} \le 1$

Dim Applico $f(x)$!!! A mano dimostro che

$1 \le x_2 \le x_0$ $\quad$ Applico $f(x)$ e inverto i versi

$f(1) \ge f(x_2) \ge f(x_0)$

$\overset{\shortparallel}{1} \ge x_3 \ge \overset{\shortparallel}{x_1}$ $\quad$ Applico $f(x)$! (N.B.: è evidente che $x_n \ge 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, quindi sono in una zona in cui $f(x)$ è decrescente).

$f(1) \le f(x_3) \le f(x_1)$

$\overset{\shortparallel}{1} \le \overset{\shortparallel}{x_4} \le \overset{\shortparallel}{x_2}$

Distanza dal limite: studio $y_n = |x_n - 1|$

Idea: y_n è decrescente. Supponiamo per semplicità $x_0 = 2$

$$y_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = \left| \frac{3}{2x_n+1} - 1 \right| = \frac{|3 - 2x_n - 1|}{2x_n+1} = \frac{|2 - 2x_n|}{2x_n+1}$$

$$= \frac{2|1-x_n|}{2x_n+1} = \frac{2}{2x_n+1} y_n \overset{?}{\le} y_n$$

vera se $x_n \ge \frac{1}{2}$

D'altra parte $x_n \geq x_1 = \frac{3}{2x_0+1} = \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$

Quindi è vero che y_n è decrescente.

Di più $y_{n+1} = \frac{2}{2x_n+1} y_n \leq \frac{2}{2\cdot\frac{3}{5}+1} y_n = \frac{10}{11} y_n$

cioè $y_{n+1} \leq \frac{10}{11} y_n$ da cui $y_n \leq \left(\frac{10}{11}\right)^n y_0$, da cui $y_n \to 0$,

— o — o —

$\boxed{\text{IMO 19... — 6}}$ $x_{n+1} = x_n^2 + \boxed{\frac{1}{n}}$ $x_1 = \alpha$ libero

Domanda: esistono dei valori di α per cui $x_n \to 1$??

$\boxed{\text{Oss. 1}}$ A cosa può tendere x_n? A $+\infty$, oppure a $l \in \mathbb{R}$

Se $a_n \to l \in \mathbb{R}$, allora

$$\begin{array}{ccccc} x_{n+1} & = & x_n^2 & + & \frac{1}{n+10} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ l & = & l^2 & + & 0 \end{array} \Rightarrow l = 0, 1$$

$\boxed{\text{SE}}$ a_n tende a qualcosa, allora qualcosa $\in \{0, 1, +\infty\}$

$\boxed{\text{Oss. 2}}$ Se prendo $\alpha = 1$, allora $x_n \to +\infty$.

$\boxed{\text{PIANO STANDARD}}$

$\boxed{1}$ $x_n \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (banale induzione)

$\boxed{2}$ $x_{n+1} > x_n$ " (banale disequaz.)

$\boxed{3}$ $x_n \to l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (segue da $\boxed{2}$)

$\boxed{4}$ $l = +\infty$ (se fosse $l \in \mathbb{R}$, allora $l \in \{0,1\}$ incompatibile con $\boxed{1}$)

$\boxed{\text{Oss. 3}}$ Se per un certo α ho che $x_n \to +\infty$, allora per ogni $\alpha' > \alpha$ x_n tende a maggior ragione a $+\infty$.

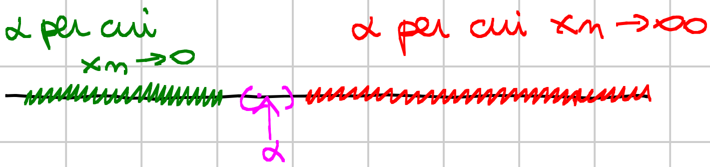
$\boxed{\text{Oss. 4}}$ Esistono valori di α per cui tende a 0 ? SI

Provo a inventare una stima $\quad x_n \leq \frac{2}{n}$

Passo induttivo:

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{n+10} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi} \\ \text{induttiva}}}{\leq} \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n+10} \overset{\substack{\text{Hope} \\ \downarrow}}{\leq} \frac{2}{n+1} \qquad \text{Molto realistica}$$

$\boxed{\text{Oss. 5}}$ Se per un certo α si ha $x_n \to 0$, allora si ha per tutti gli $\alpha' < \alpha$.



Idea: "in mezzo" c'è un α per cui $|$ a 1.

$\boxed{\text{Oss. 6}}$ C'è un α in mezzo (proprietà dei numeri reali).
Cosa succede a partire da questo α?

Può essere ROSSO? NO! Se fosse rosso, la successione prima o poi supererebbe 2. Ma allora per valori di α vicini (più piccoli) la successione supera 2, ma allora esistono dei rossi più piccoli di α $\to$ assurdo

Può essere VERDE? NO. C'è una fascia di VERDI vicino a 0

Se inizia a decrescere, cioè se

$x_{n+1} < x_n$ per un qualche n, allora da lì in poi decresce !!!!

Ipotesi $\quad x_{n+1} < x_n \implies x_{n+1}^2 < x_n^2 \implies x_{n+1}^2 + \frac{1}{n+1} < x_n^2 + \frac{1}{n}$

Se per un certo α tende a zero, allora vuol dire che esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $x_{n+1} < x_n$. Ma allora per α vicini succede la stessa cosa!! Quindi l'α che sta in mezzo non può essere VERDE.