# GEOMETRIA: Alg. Lin. + Coord. baricentriche

Titolo nota 07/09/2009

$\mathbb{K}$ = campo $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_q, \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \ldots)$

$\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$

campo di $q=p^k$ el. con $p$ primo.

**Def**: $V$ si dice SPAZIO VETTORIALE su $\mathbb{K}$ se

1) c'è una SOMMA tra gli el. di $V$

2) c'è un'operazione che associa ad ogni el. di $V$ e ad ogni el di $\mathbb{K}$ un altro el di $V$ (PRODOTTO per SCALARI) in modo distributivo sulla somma

**Es**: o) $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ insieme delle $n$-uple

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$$

$k \in \mathbb{R}$

$k \cdot (x_1, \dots, x_n) = (kx_1, \dots, kx_n)$

•) $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{F}_q^n$, ...)

$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$p$ è primo

<u>Oss</u>: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{C}^n$ sono insiemi <u>infiniti</u>

$$\mathbb{F}_2^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} \simeq \mathbb{F}_4$$

$$(1,1) + (1,0) = (0,1)$$

$\mathbb{F}_p^n$ è un insieme con $p^n$ elementi.

<u>Es</u>: $\mathbb{R}_2[x] = \{$ pol. a coeff. reali di grado $\leq 2 \}$

$p(x) + q(x) = \dots$ $\qquad p, q \in \mathbb{R}_2[x]$

$k \cdot q(x) = kq(x)$ $\qquad k \in \mathbb{R}$

Es: $U = \{$pol. monici a coeff. reali$\}$ non è uno spazio vett!!

non con somme tra pol e prod. di un reale $\times$ un pol.

Trasf. lineari

$f: V \longrightarrow W$ ($V, W$ sp. vett. su $\mathbb{K}$)

si dice $\mathbb{K}$-lineare se $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in V$

$f(kx) = k f(x) \quad \forall x \in V \ \forall k \in \mathbb{K}$.

Es: $f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$

$f(p(x)) = \int p(x)\, dx$ ok

$f(p(x)) = \frac{d}{dx} p(x)$ ok

$f(p(x)) = p(x) \cdot (x-1) \longleftarrow$ ok.

$f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_4[x]$

$f(p(x)) = p(x^2)$ ok.

Es: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \Big(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \dots,$$
$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n\Big)$$

$a_{ij} \in \mathbb{K}$

Def: Due sp. vett. su $\mathbb{K}$ si dicono ISOMORFI (uguali)
se $\exists\, f : V \longrightarrow W$ lineare, bigettiva.

Es: $\mathbb{R}_2[x] \cong \mathbb{R}^3$ ($\cong$ : isomorfo)

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 \longrightarrow (a_2, a_1, a_0)$$ lineare, bigettiva.

Es: $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ $\qquad$ $\mathbb{C}$ considerato come sp. vett. su $\mathbb{R}$

$$(x, y) \longrightarrow x + iy$$

# PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

1) Matrice $m \times n$

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\phantom{a_{11} \quad \cdots\cdots \quad a_{1n}}}^{n} \\ \left(\begin{matrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{matrix}\right) \end{array} \Big\}\, m \qquad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

2) Un vettore di $\mathbb{R}^n$ è una matrice $1 \times n$

3) Un'appl. lin. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è

$$f(x) = A \cdot x \to \text{prod righe} \times \text{colonne}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{vett. } m \text{ comp.}$$

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{1 \times n}{x} = \underset{1 \times m}{(\;)}$$

4) $A \cdot B = C$ $\quad A \ n \times m \quad B \ k \times n \quad C \ k \times m$

L'el. $(i,j)$ in $C$ è il prod. scalare della $i$-esima riga di $A$ per la $j$-esima colonna di $B$

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 13 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Fatto: Le trasf. lineari da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ sono tutte e sole le matrici $n \times m$

Le matrici $n \times m$ si indicano con $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ e formano uno spazio vettoriale.

Es buffo: $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

1 — $M$ è un $\mathbb{R}$-sp. vett.

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ -\lambda b & \lambda a \end{pmatrix} \in M \quad \underline{\text{ok}}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix} \in M \quad \underline{\text{ok}}$$

2 — $A, B \in M$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & ac-bd \end{pmatrix} \in M$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & ac-bd \end{pmatrix} = A \cdot B$$

$\Rightarrow M$ campo?

Serve: lo 0 che c'è $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

l'id. che c'è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & 1 & & \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$ Identità

l'inverso

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A \cdot B = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

$a, b$ fissati

cerco $c, d$

$$\begin{cases} ac-bd = 1 \\ ad+bc = 0 \end{cases} \qquad c = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad d = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

c'è l'inverso

**Oss:** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

$M = \mathbb{C} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \longleftrightarrow a+ib$

**Oss 2**: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$$ omotetia

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 0\right) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad d\left(g(x,y), 0\right) =$$

$$= \sqrt{x^2\cos^2\theta + y^2\operatorname{sen}^2\theta + x^2\operatorname{sen}^2\theta + y^2\cos^2\theta + \cancel{2xy\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \cancel{-2xy\operatorname{sen}\theta\cos\theta}}$$

$g$ rotazione attorno a $O$ di angolo $\theta$

$$= \sqrt{x^2+y^2}$$

$$g\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta & +\rho\operatorname{sen}\theta \\ -\rho\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

tutte le matr. di M si scrivono così:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\theta = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

## Base di uno sp. vett

Base di $V = \{ v_1, \dots, v_n \}$ t.c.

(i) ogni $v \in V$ si scrive come $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$

(ii) se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ allora $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

**Fatti**: 1) esiste una base

2) due basi hanno lo stesso num. di vettori

3) $\mathbb{K}^n$ ha basi di $n$ vettori

$$\mathbb{R}^n: \quad \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} \right\}}_{n} = \text{base canonica}$$

**Def**: •) $\dim_{\mathbb{R}} V$ = n° di el. di $\overset{n}{\text{una}}$ base di $V$.

•) $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ $\quad \{v_1, \dots, v_n\} = \mathcal{B}$ base di $V$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ coord di $w$ risp. alla base $\mathcal{B}$

**Oss**: Le coord di $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ risp. alla base canonica sono $(x_1, \dots, x_n)$

**Probl.**: Come ottenere le coord. in una base date quelle in un'altra?

$\parallel$

come cambiare base?

Se ho $\{v_1, \dots, v_n\} = \mathcal{B}$ $\{w_1, \dots, w_n\} = \mathcal{C}$ base di $V$

e so che

$$w_1 = a_{11} v_1 + \dots + a_{n1} v_n$$
$$\vdots$$
$$w_n = a_{1n} v_1 + \dots + a_{nn} v_n$$

allora, se $u = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$, ho

che $u = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$ con

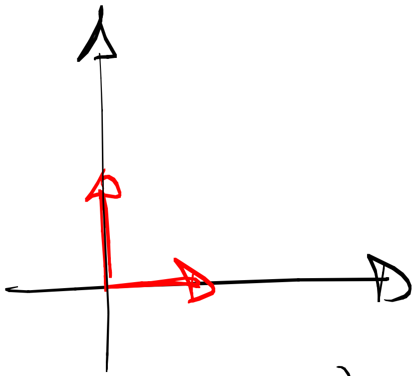
$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

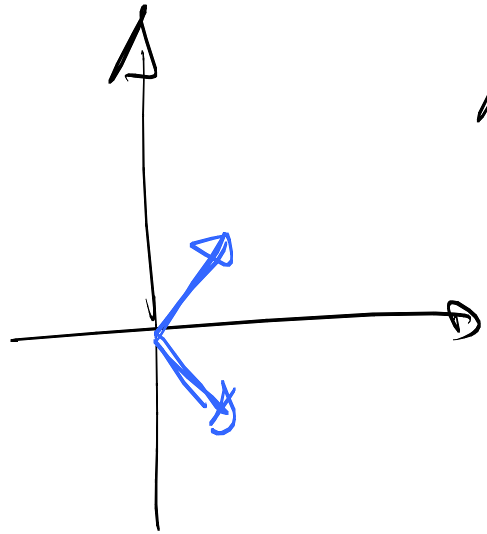
$$y = Ax$$

Se però abbiamo $y$ e vogliamo $x$ allora dobbiamo risolvere il sist. lineare $y = Ax$

$$y = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Es: $\mathbb{R}^2$ $\quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$





$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se $v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix} \Rightarrow v = (a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a-b) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se $w = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = \beta \end{cases} \qquad x = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad y = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$w = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

# Eliminazione di Gauss

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$Ax = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a \text{ riga} - \frac{1}{2} 1^a \text{ riga}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a \text{ riga} - \frac{1}{2} 2^a \text{ riga}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{x_3}{2} \\ 2x_2 - x_3 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{x_3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \lambda\right) \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

<u>Caso</u>: $Ax=b$

1) Trovo una soluzione $(y_1, \dots, y_n)$
2) Trovo $\mathcal{L}\{\text{sol. di } Ax=0\}=L$

La sol. generica è $(y_1, \dots, y_n)$ + sol. del pt. 2)

$$A\cdot\left[\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}\right] = A\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix} = b+0=b$$

<u>Fatto</u>: Se $Ax=0$ ha solo la sol $x_1=\dots=x_n=0$

$\Rightarrow$ $A$ è $n\times n$ e $\exists$ una matrice $A^{-1}$ ($\Rightarrow$ t.c. $AA^{-1}=A^{-1}A=I$)

Succede se, resa triangolare, non ha 0 nella diagonale

Es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^a \text{ riga} \leftrightarrow 2^a \text{ riga}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a - 1^a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a - 2^a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow x_3 = 0 \xrightarrow{\text{sost.}} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$Ax = b$ ha un'unica sol $\Rightarrow$ $x \rightarrow Ax$ è iniettiva $\Rightarrow \exists A^{-1}$

e se $A$ è $n \times n$ è anche surgettiva

# Determinante

$$\det : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

- $\det(I) = 1$
- $$\det\begin{pmatrix} a_{11}+b_1 & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}+b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e idem sulle righe

- $$\det\left(\left(v_{\sigma(1)} | \cdots | v_{\sigma(n)}\right)\right) = \text{segno}(\sigma) \cdot \det\left(v_1 | \cdots | v_n\right)$$

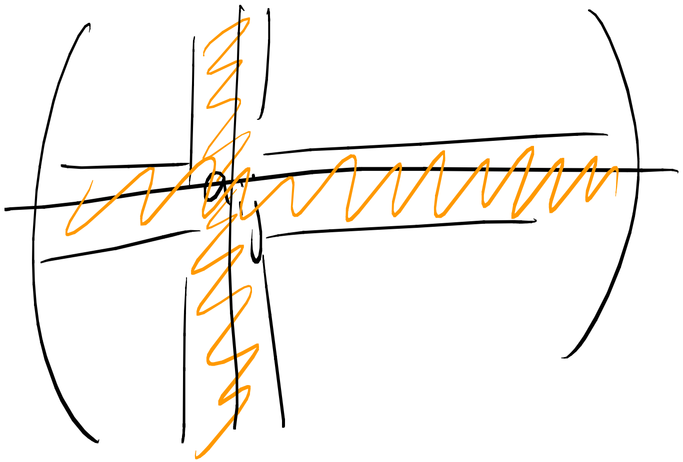
$v_i$ = vettori

idem sulle righe.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{(i,j)} \quad \forall i$$

$A^{(i,j)}$ matrice ottenuta eliminando la $i$-esima riga e la $j$-esima colonna

$A^{(i,j)} =$ 

Es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \overset{i=1}{=} a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} -$$

$$- a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} +$$

$$+ a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} \left( a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} \right) - a_{12} \left( a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} \right) + a_{13} \left( a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \right)$$

Con $i=2$ $\quad - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{22} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{23} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Se $\det A = 0$ allora $x \to Ax$ non è iniettiva

$\Rightarrow$ $Ax=0$ ha più soluzioni.

Se $\boxed{\det A \neq 0}$, la sol. di $Ax=b$ si ottiene così:

$A^{(i)}$ = matrice ottenuta da $A$ mettendo $b$ al posto della $i$-esima colonna

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{\det A^{(1)}}{\boxed{\det A}}, \quad x_2 = \frac{\det A^{(2)}}{\boxed{\det A}}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det A^{(n)}}{\boxed{\det A}}$$

è la sol di $Ax=b$

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \det A = 0(0-1) - 1(0-1) + 1(1-0) = 2$

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A^{(1)} = 2(-1) - 1(-1) + 1 = 0 \qquad x_1 = 0$$

$$\det A^{(2)} = 0 - 2(-1) + 1(0) = 2 \qquad x_2 = 1$$

$$\det A^{(3)} = 0 - 1(0) + 2(1) = 2 \qquad x_3 = 1$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Cambio di base x una appl. lineare</u>

$f : V \longrightarrow V$ e nella base $\{v_1, \dots, v_n\}$

$f$ è ass. alla matrice che ha come colonne le coord di $f(v_1), \dots, f(v_n)$; sia $A$ la matrice

Data la base $\{w_1, \dots, w_n\}$ abbiamo la matrice $M = \begin{pmatrix} \text{coord di } w_1, \dots, w_n \\ \text{risp. a } v_1 \dots v_n \end{pmatrix}$

$f(x) = Ax$ nella base $v_1, \dots, v_n$

se $y$ è nella base $w_1, \dots, w_n$

$f(y) = MAM^{-1}y$

$B = MAM^{-1}$ le sue colonne sono le coord di $f(w_1) \dots f(w_n)$ nella base $w_1, \dots, w_n$

---

__Es:__ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$f(x) = Ax$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f(v) = v$ $v \neq 0$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f(w) = -w$ $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\{v, w\}$ è base $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ $\quad M = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$

$f$ nella base $\{v, w\}$ $\quad M^{-1} A M = B$ —

la $1^a$ col. di $B$ è fatta dalle coord di $f(v)$ in $\{v, w\}$

$$f(v) = v \Rightarrow B = \begin{pmatrix}1 & *\\0 & *\end{pmatrix}$$

la $2^a$ col. di $B$ è fatta dalle coord di $f(w)$ in $\{v, w\}$

$$f(w) = -w \Rightarrow B = \begin{pmatrix}* & 0\\* & -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$ diagonale $\Rightarrow$ bella!

Abbiamo cercato le sol. di $f(v) = \lambda v$ per $\lambda \in \mathbb{R}$

i $\lambda$ per cui c'è un $v \neq 0$ che soddisfa si chiamano AUTOVALORI

i $v$ per cui si risolve, fissato $\lambda$, si chiamano AUTOVETTORI (relativi a $\lambda$)

- $V = \mathbb{F}_p^k$ $p$ primo, quante basi ci sono?
- $\lambda$ è autovalore $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I) = 0$ con $A$ matrice di $f$.

  ( $v$ autovett $\Leftrightarrow$ $(A - \lambda I)v = 0$ )
- autovettori rel. ad autoval. diversi sono indip.

# COORDINATE BARICENTRICHE

Dati $A, B, C$ non allineati (un Triangolo), fissata un'origine per i vettori, per ogni punto $P$ del piano si ha

$$\vec{P} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} \quad \text{con} \quad \alpha+\beta+\gamma = 1.$$

$$\text{Area di } \overset{\Delta}{PBC} = \left\| \frac{1}{2}(\vec{B}-\vec{P}) \wedge (\vec{C}-\vec{P}) \right\| =$$

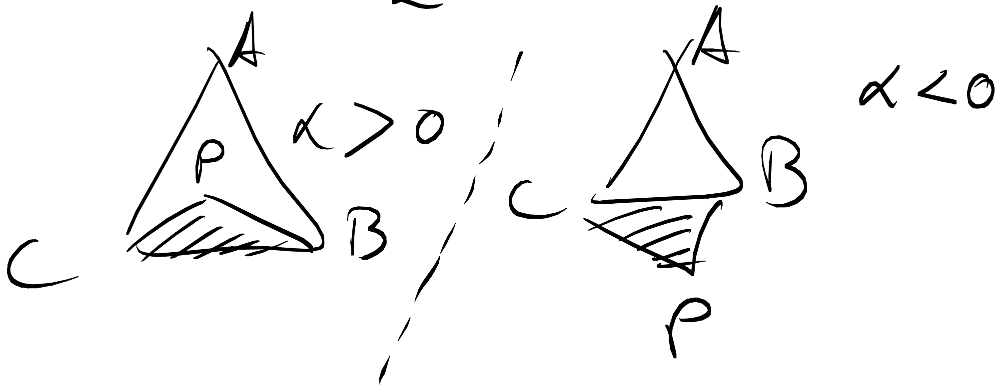
$$= \frac{1}{2}\left\| \left(-\alpha\vec{A} + (\underset{\alpha+\gamma}{\underbrace{1-\beta}})\vec{B} - \gamma\vec{C}\right) \wedge \left(-\alpha\vec{A} - \beta\vec{B} + (\underset{\alpha+\beta}{\underbrace{1-\gamma}})\vec{C}\right) \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\left\| (+\alpha\beta\vec{A}\wedge\vec{B} - (\alpha^2+\alpha\beta)\vec{A}\wedge\vec{C} - (\alpha^2+\alpha\gamma)\vec{B}\wedge\vec{A} + (\alpha^2+(\gamma+\beta)\alpha+\gamma\beta)\vec{B}\wedge\vec{C} + \alpha\gamma\vec{C}\wedge\vec{A} + \gamma\beta\vec{C}\wedge\vec{B}) \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\left\| \vec{A}\wedge\vec{B}(\alpha\beta+\alpha^2+\alpha\gamma) + \vec{B}\wedge\vec{C}(\alpha^2+\alpha\gamma+\alpha\beta+\cancel{\gamma\beta}-\cancel{\gamma\beta}) + \vec{C}\wedge\vec{A}(\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma) \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \vec{A} \wedge \vec{B}\,\alpha + \vec{B} \wedge \vec{C}\,\alpha + \vec{C} \wedge \vec{A}\,\alpha \right\| = \frac{\alpha}{2} \left\| (\vec{B}-\vec{A}) \wedge (\vec{C}-\vec{A}) \right\|$$

$$\alpha = \frac{[PBC]}{[ABC]}$$ aree orientate!




Allo stesso modo

$$\beta = \frac{[APC]}{[ABC]} \qquad \gamma = \frac{[ABP]}{[ABC]}$$

La terna $(\alpha, \beta, \gamma)$ si dice terna delle coord. baricentriche assolute di $P$ (assolute: $\alpha+\beta+\gamma = 1$)

In generale $(u : v : w)$ coord. baricentriche se

$$\vec{P} = \frac{u\vec{A} + v\vec{B} + w\vec{C}}{u+v+w}, \quad u+v+w \neq 0.$$

**Oss**: Se $P_i = x_i A + y_i B + z_i C \qquad i = 1,2,3 \qquad x_i + y_i + z_i = 1$

allora $$[P_1 P_2 P_3] = \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \cdot [ABC]$$

**Un po' di punti**

$a, b, c$ lati

$p$ perimetro

$A, B, C$ angoli

Baricentro: $G = (1:1:1) \rightsquigarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

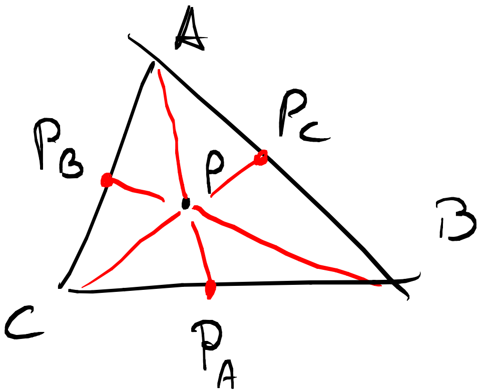
Incentro: $I = (a:b:c) \longrightarrow \left(\frac{a}{p}, \frac{b}{p}, \frac{c}{p}\right)$

Circocentro: $O = (\sin A \cos A : \sin B \cos B : \sin C \cos C) =$

$$= \left(a^2(b^2+c^2-a^2) : b^2(a^2+c^2-b^2) : c^2(a^2+b^2-c^2)\right) =$$

$$= (\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C)$$

**Tracce di un punto $P$ sui lati**




$P_A, P_B, P_C$ piedi delle ceviane

= Tracce di $P$ sui lati

$$\underbrace{\frac{[ABP_A]}{[ABC]} = \frac{[ABP]}{[ABP]+[APC]}}_{\text{dim teo di CEVA}} \Rightarrow$$

$P = (x : y : z)$

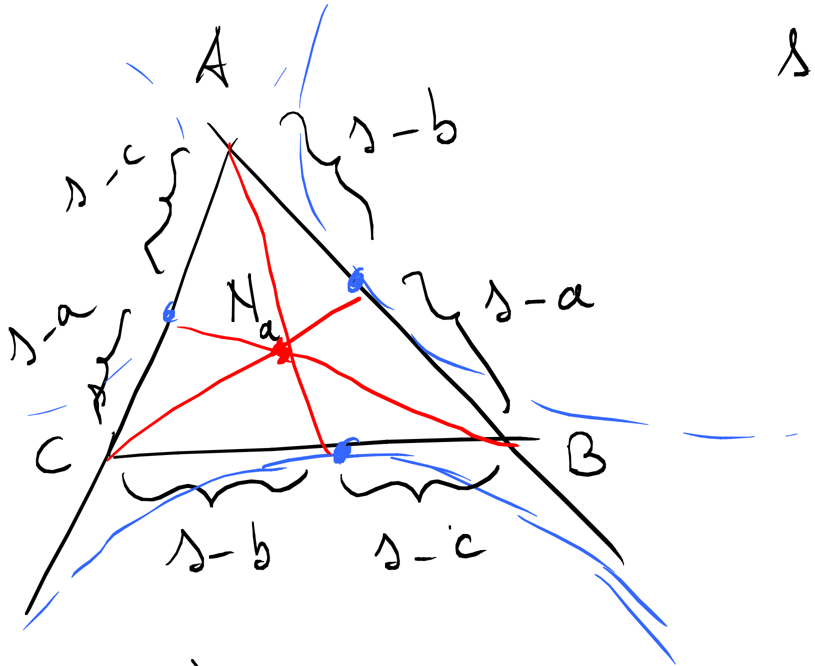
$P_A = (0 : y : z)$

$P_B = (x : 0 : z)$

$P_C = (x : y : 0)$

teo di CEVA

Es: Punto di NAGEL




$$s = \frac{p}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

$$N_a = (s-a : s-b : s-c)$$

Oss: $sN_a = (s-a)A + (s-b)B + (s-c)C =$

$= s(A+B+C) - (aA + bB + cC) =$

$= 3sG - 2sI = s(3G - 2I) \Rightarrow G, I, N_a$ sono allineati e $\frac{I N_a}{N_a G} = \frac{-2}{3}$

Es: $H = ? = (\tan A : \tan B : \tan C) = \left( \frac{1}{b^2+c^2-a^2} : \frac{1}{c^2+a^2-b^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2} \right)$

centro Feuerbach

$N = \left( a\cos(B-C) : b\cos(C-A) : c\cos(A-B) \right)$

Calcolati tramite la retta di Eulero.

Es: Incentro del triangolo mediale. (punto di Spieker) $= S_p$

Nel rif. del tri med. $S_p = (a' : b' : c')$ $a', b', c'$ lati del tri mediale

I vertici del tri med nel rif di ABC

sono $\left(0 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2} : 0 : \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 0\right)$

$\Rightarrow$ considero $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

t.c. $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$

$f$ porta le coord risp. al Tri med nelle coord risp. a $ABC$

$f$ = cambio di base

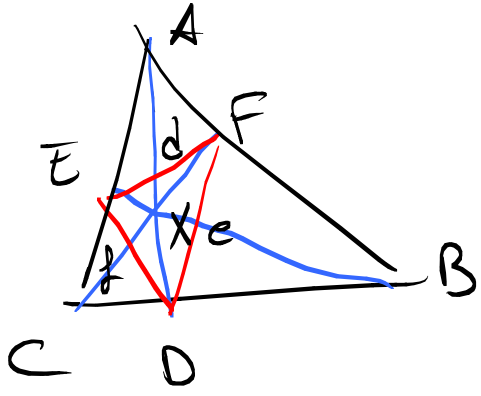
$$f \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ le coord di $S_p$ risp. a $ABC$

sono $f\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix} = \left(\frac{b'+c'}{2} : \frac{a'+c'}{2} : \frac{a'+b'}{2}\right)$

$a' = \frac{a}{2} \quad b' = \frac{b}{2} \quad c' = \frac{c}{2} \Rightarrow (b+c : a+c : a+b) = S_p$

Es: l'incentro del Tri ortico è ortocentro di ABC.




+) Tri ortico

$$(0 : \tan B : \tan C)\ \frac{1}{\tan B + \tan C}$$ lati

$$(\tan A : 0 : \tan C)\ \frac{1}{\tan A + \tan C}$$ d, e, f

$$(\tan A : \tan B : 0)\ \frac{1}{\tan A + \tan B}$$

$$\Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\tan A}{\tan A + \tan C} & \frac{\tan A}{\tan A + \tan B} \\ \frac{\tan B}{\tan B + \tan C} & 0 & \frac{\tan B}{\tan A + \tan B} \\ \frac{\tan C}{\tan B + \tan C} & \frac{\tan C}{\tan A + \tan C} & 0 \end{pmatrix}$$ nel rif DEF

$$X = (d : e : f)$$

nel rif di ABC è

$$X = \left( \tan A \left( \frac{e}{\tan A + \tan C} + \frac{f}{\tan A + \tan B} \right) : \ldots : \ldots \right) = M \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

$$(d : e : f) = (a\cos A : b\cos B : c\cos C)$$ ← non sono coordinate

$$\frac{\operatorname{sen} B \cos B}{\tan A + \tan C} + \frac{\operatorname{sen} C \cos C}{\tan A + \tan B} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} B \cos B}{\dfrac{\operatorname{sen} A \cos C + \cos A \operatorname{sen} C}{\cos A \cos C}} + \frac{\operatorname{sen} C \cos C}{\dfrac{\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B}} =$$

$$= \frac{\cancel{\operatorname{sen}} B \cos A \cos B \cos C}{\cancel{\sin (A+C)}} + \frac{\cancel{\operatorname{sen}} C \cos A \cos B \cos C}{\cancel{\operatorname{sen}(A+B)}} = \text{simm. in } A, B, C$$

$$\Rightarrow \quad X = (\tan A : \tan B : \tan C) \qquad \underline{\text{OR}}$$

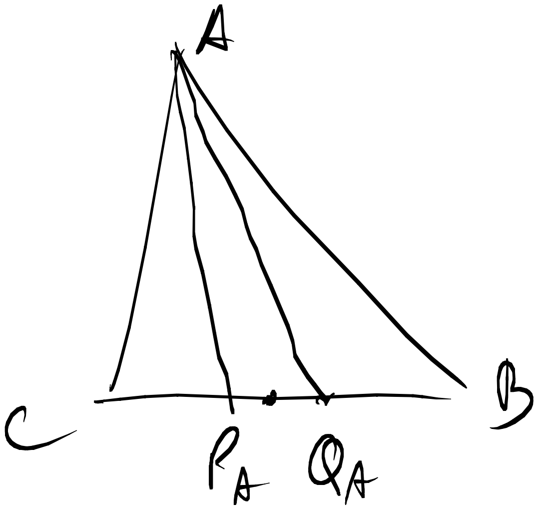
## Altri punti

**Excentri:**
$$(-a : b : c)$$
$$(a : -b : c)$$
$$(a : b : -c)$$

**Gergonne:** $\left(\frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c}\right)$

## Coniugato ISOTOMICO

Se $P$ ha tracce $P_A, P_B, P_C$, definisco
$Q_A$ simm di $P_A$ risp. al pt medio di $BC$ e così via.
Allora (ceva) $AQ_A, BQ_B, CQ_C$ concorrono in $Q$
e $Q$ si dice coniugato ISOTOMICO di $P$




$[ABP_A] = [AQ_AC]$

$\Rightarrow$ Se $P = (x:y:z)$

$P_A = (0:y:z)$

$Q_A = (0:z:y)$

Simulmente $Q_B = (z:0:x)$ $\quad Q_C = (y:x:0)$

$$\Rightarrow Q = \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right)$$

Coniugato ISOGONALE : $(x:y:z) = P \rightsquigarrow P' = \left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z}\right)$

Oss : $(x:y:z)$ coord bari di $P \rightsquigarrow \left[\frac{x}{a} : \frac{y}{b} : \frac{z}{c}\right]$ coord trilin. di $P$

# Formule di Conway

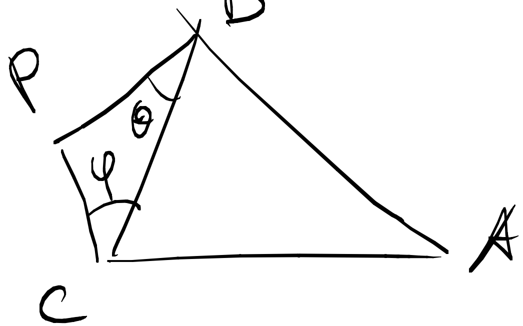
$$S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} \qquad S_B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2} \qquad S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

$$S_\theta = S \cdot \cot\theta \qquad S = [ABC]$$

- $S_B + S_C = a^2$ e cicliche
- $S_A S_B + S_B S_C + S_A S_C = S^2$

$$H = \left(\frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C}\right)$$

$$O = \left(a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C\right)$$




$$\Rightarrow P = \left(-a^2 : S_C + S_\varphi : S_B + S_\theta\right)$$

$\hat{CBP}$ e $\hat{CBA}$ hanno dir. orient. $\Rightarrow \theta > 0$

" stessa " $\Rightarrow \theta < 0$

idem per $\varphi$

Retta : $\{ px + qy + rz = 0 \}$

retta per $P = (x_1 : y_1 : z_1)$ e $Q = (x_2 : y_2 : z_2)$

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$$

Date $\begin{cases} px + qy + rz = 0 \\ tx + uy + vz = 0 \end{cases}$ $\quad \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ t & u & v \end{pmatrix} =$

$= i\,(\alpha) + j\,(\beta) + k\,(\gamma)$

$\alpha = \det \begin{pmatrix} q & r \\ u & v \end{pmatrix}$ $\quad \gamma = \det \begin{pmatrix} p & q \\ t & u \end{pmatrix}$ $\quad (\alpha : \beta : \gamma)$ è l'intersezione

$\beta = -\det \begin{pmatrix} p & r \\ t & v \end{pmatrix}$

# Rette parallele

retta per $P = (u : v : w)$

parallela a $px + qy + rz = 0$

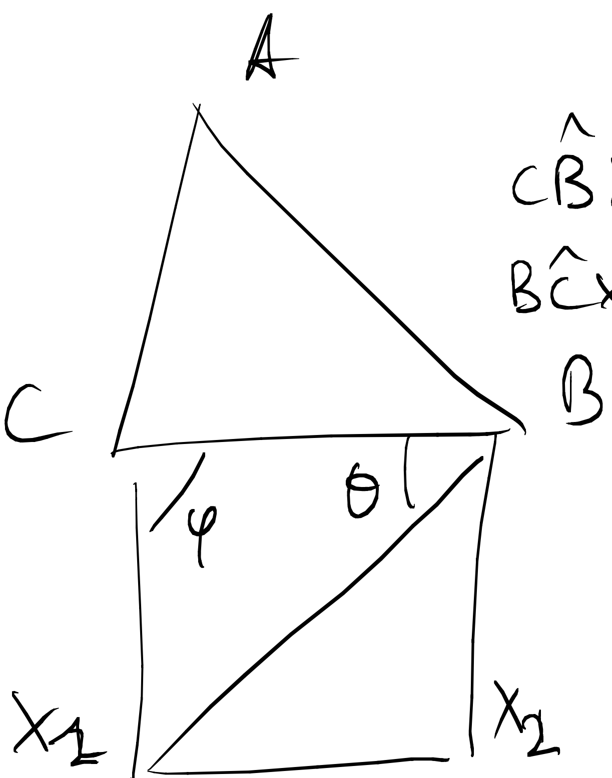
è $\det \begin{vmatrix} q-r & r-p & p-q \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

Fa sì che intersecando con $px+qy+rz$ si ottenga un punto $(\alpha : \beta : \gamma)$ con $\alpha+\beta+\gamma=0$

$\Rightarrow$ non un vero punto

---

$BCX_1X_2$ quadrato



$C\hat{B}X_1 = \frac{\pi}{4}$

$B\hat{C}X_1 = \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = (-a^2 : S_C : S_B + S) \\ X_2 = (-a^2 : S_C + S : S_B) \end{array}\right\} \text{Conway}$$

retta per $X_1X_2$ $\quad (S_C+S_B+S)x + a^2y + a^2z = 0$

$a^2(x+y+z) + Sx = 0$

Se faccio $Y_1Y_2$ r.c

$CAY_1Y_2$ quadrato $\quad Y_1Y_2 : \; b^2(x+y+z)+Sy=0$

e $Z_1Z_2$ r.c. $ABZ_1Z_2$ quadrato $\quad Z_1Z_2 : \; c^2(x+y+z)+Sz=0$

$$X = Y_1Y_2 \cap Z_1Z_2 = (-(b^2+c^2+S) : b^2 : c^2)$$

$$Y = Z_1Z_2 \cap X_1X_2 = (a^2 : -(c^2+a^2+S) : c^2)$$

$$Z = X_1X_2 \cap Y_1Y_2 = (a^2 : b^2 : -(a^2+b^2+S))$$

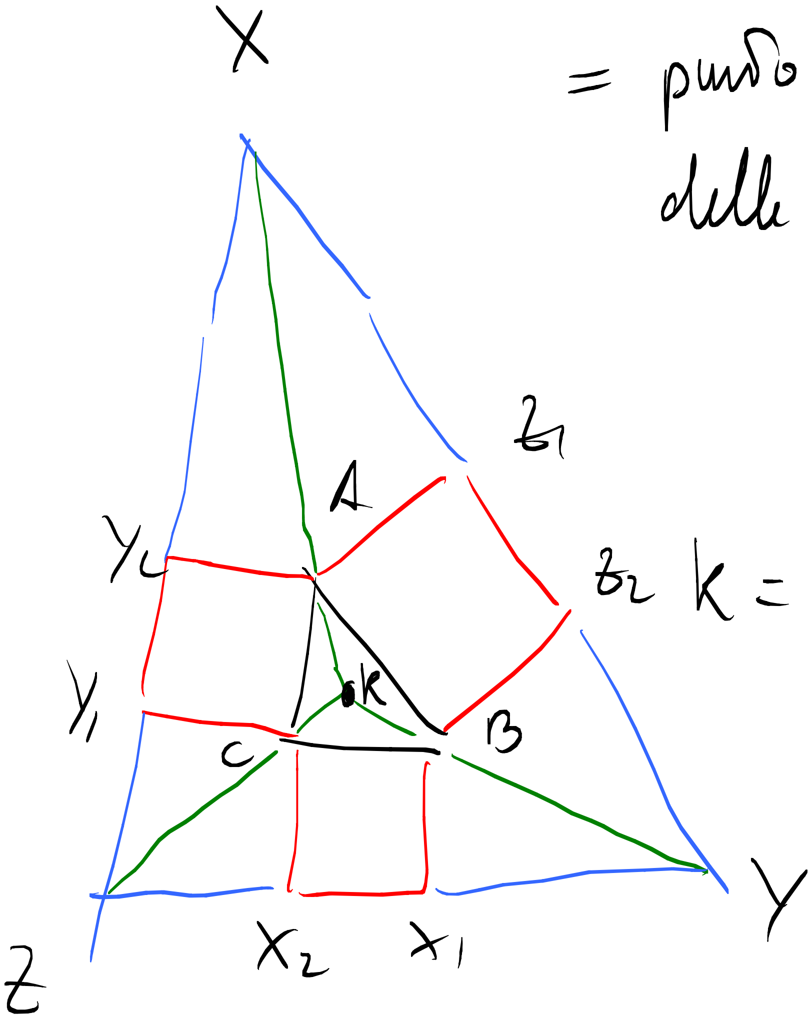
$$X - (a^2:b^2:c^2) = (-(a^2+b^2+c^2+S) : 0 : 0)$$

$$Y - (a^2:b^2:c^2) = (0 : -(a^2+b^2+c^2+S) : 0)$$

$$Z - (a^2:b^2:c^2) = (0 : 0 : -(a^2+b^2+c^2+S))$$

$X, Y, Z$ si ottengono da $A, B, C$ tramite un'omotetia di centro $(a^2 : b^2 : c^2)$ = coniug. isog. di $G$ =

= punto di Lemoine = intersez. delle simmediane




$K$ = pt. di Lemoine

Es conto: $P \longrightarrow D, E, F$ proiez. sui lati

$$P = (u : v : w)$$
$$D = (0 : S_C u + a^2 v : S_B u + a^2 w)$$
$$E = (S_C v + b^2 u : 0 : S_A v + b^2 w)$$
$$F = (S_B w + c^2 u : S_A w + c^2 v : 0)$$

Es furbo: Trovare le perp. alla retta $px + qy + rz = 0$

Es plus: 1) il coniug. isog. di un punto sulla cf. circoscritta non esiste, ovvero sta sulla retta $x + y + z = 0$.

2) ogni circonf. si ottiene da quella circoscritta tramite omot.