ALGEBRA LINEARE - (Sam & Pol)

- Spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p, \mathbb{F}_{p^k}, \dots$)

  $V = \mathbb{K}^n = \{ \underset{\uparrow \text{ vettore}}{(x_1, \dots, x_n)} \mid x_i \in \mathbb{K} \}$

- $v_1, \dots, v_n$ linearmente indipendenti

  se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

<u>Oss</u>: $v_1, \dots, v_n$ dipendenti $\Longleftrightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tutti nulli t.c.

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Longrightarrow$ (wlog $\lambda_1 \neq 0$) $v_1 = \dfrac{-\lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_n v_n}{\lambda_1}$

- Base = ins. di vett. lin. ind. t.c. $\forall w \in V\ \exists! (\mu_1, \dots, \mu_n) : w = \sum_i \mu_i v_i$

  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ↳ coord di w rispetto a $\{v_1, \dots, v_n\}$

  $\Longleftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ ins. massimale di vett. lin. indip.

- $T : V \longrightarrow W$ Trasf. lineare

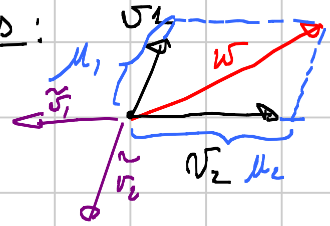
  fissata $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

  e $\{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

$$\begin{cases} T(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m \\ \quad\vdots \qquad = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m \\ T(v_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m \end{cases}$$

↑ determina T

Es:



$$v \longrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \qquad T(v) = w \longrightarrow \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n \qquad T(v) = \sum_i \mu_i T(v_i) = \sum_i^n \mu_i \sum_j^m a_{ji} w_j$

↳ $\nu_j = \sum_i^n a_{ji} \mu_i \qquad j = 1, \dots, m$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

n colonne
m righe

- Cambio di base: • V $\underbrace{\{v_1, \dots, v_n\}}_{=\mathcal{V}}$ e $\underbrace{\{u_1, \dots, u_n\}}_{=\mathcal{U}}$ basi di V

Se so che $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ e che

$$u_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{n1} v_n$$
$$\vdots$$
$$u_n = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \dots + a_{nn} v_n$$

voglio trovare $\mu_1, \dots, \mu_n$ t.c. $v = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{n \times n} \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

A prende le coord rispetto a $\mathcal{U}$ e le manda nelle coord rispetto a $\mathcal{V}$

$\Longrightarrow A^{-1}$ (che esiste!) manda le coord risp. a $\mathcal{V}$ nelle coord risp. a $\mathcal{U}$.

$$\Longrightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

•) $T : V \longrightarrow W$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}_1 \arrow[r, "A"] & \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{V}_2 \arrow[u, bend left, "M"] \arrow[r, dashed, "?"] & \mathcal{W}_2 \arrow[u, bend right, "N"'] \end{tikzcd}$$

basi

Se sappiamo le coord di $\mathcal{V}_2$ risp. a $\mathcal{V}_1$, sappiamo M da $\mathcal{V}_2$ a $\mathcal{V}_1$

$$N^{-1} A M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

•) $T : V \longrightarrow V$

$\mathcal{V}_1 \quad \mathcal{V}_1$
$\mathcal{V}_2 \quad \mathcal{V}_2$

$B = M^{-1} A M \longleftarrow$ coniugio

B, A simili.

Conti A matrice

nucleo di A = $\operatorname{Ker} A = \{ x \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } Ax = 0 \}$

Oss: $\operatorname{Ker} A$ è sp. vett.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Ax = 0$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \\ s \end{pmatrix} \middle| \, t, s \in \mathbb{K} \right\} = \operatorname{Ker} A$$

$$\mathbb{K}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \middle| \, t, s \in \mathbb{K} \right\} \qquad \text{base} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Conto 2)

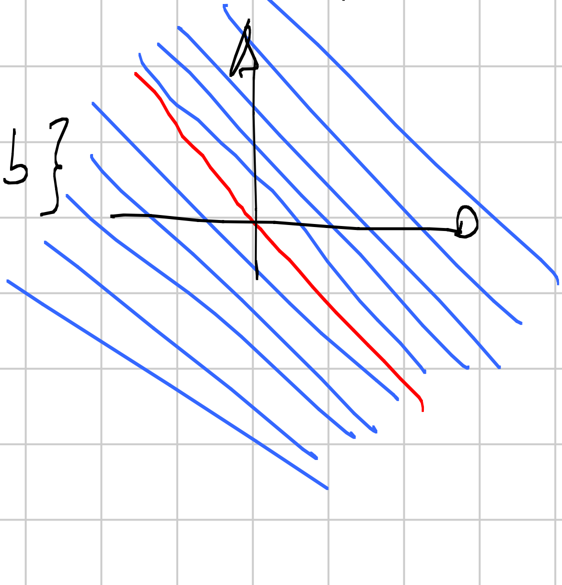
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = -1 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \\ 0 & -6 & -12 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

impossibile

Oss: le sol. di $Ax = b$

$A_{m \times n}$ $\quad = \{ x_0 + y \mid y \in \operatorname{Ker} A, \ Ax_0 = b \}$



$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = n$

Autovalori / Autovettori

$A \quad n \times n$

$$\boxed{Av = \lambda v} \qquad \lambda \in \mathbb{K} \qquad v \neq 0$$

$$(Av - \lambda v) = 0 \qquad (A - \lambda I)v = 0$$

$$v \in \ker(A - \lambda I) \qquad \det(A - \lambda I) = 0 \leftarrow \text{pol. in } \lambda \text{ di deg} = n$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 1) - 1(-\lambda - 1) + 1(1 + \lambda) =$$

pol. caratteristico di A

$$= -\lambda(\lambda^2 - 1) + 2(\lambda + 1) =$$

$$= (\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2) =$$

$$= (\lambda + 1)(-(\lambda + 1)(\lambda - 2)) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

Le sol di $p(\lambda)$ si dicono autovalori $\quad \lambda = -1, 2$

$\lambda = -1 \quad$ m. algebrica $= 2$

$\lambda = 2 \quad$ m. alg $= 1$

$\Downarrow$

$\ker(A + I) \neq \{0\}$

$\ker(A - 2I) \neq \{0\}$

$\dim \ker(A + I) =$ mol. geometrica di -1

$\dim(\ker(A - 2I)) =$ " " di 2

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \ker A + I = \operatorname{Span}\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\} \quad mg = 2$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \ker A - 2I = \operatorname{Span}\left\{ \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} \quad mg = 1$$

nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$

$$\boxed{\begin{aligned} Av_1 &= -v_1 \\ Av_2 &= -v_2 \\ Av_3 &= 2v_3 \end{aligned}}$$

la matrice diventa $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= M^{-1} A M$$

Oss: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B \qquad \det(B - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 0 =$

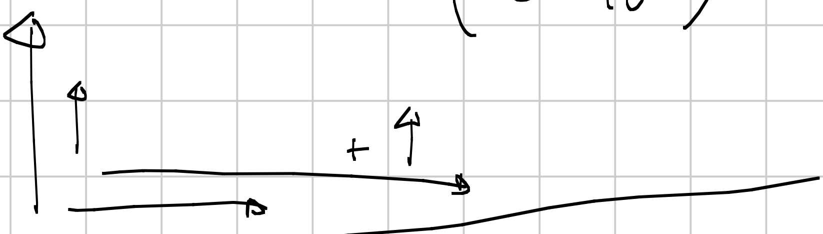
$$= (2-\lambda)^2$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \quad m.\,alg = 2$$

$$\dim(\ker(B - 2I)) = \dim \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ autovettore.

$$\begin{pmatrix} 10^{10} & 1 \\ 0 & 10^{10} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^2 + 1$

non ha sol. reali.

$$\lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Es: # basi di $(\mathbb{F}_p)^k$

$(p^k - 1)(p^k - p)(p^k - p^2) \dots (p^k - p^{k-1}) \leftarrow$ basi ordinate

Oss: $\dfrac{\prod_{j=0}^{k-1} (p^k - p^j)}{k!} \in \mathbb{N}.$

$e_1, e_2, \dots e_n$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1 \text{ nell' } i\text{-esimo posizione}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{nella base canonica}$$

$$I = (e_1 | e_2 | \dots e_n)$$

appl. lineare che non fa niente

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = ee^T$$

$$(a_{ij})^T \to (a_{ji}) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$e^T = (1 \dots 1)$$

TRUCCHETTI PER TROVARE AUTOVALORI/VETTORI

1)

$$ee^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

"si vedono ad occhio"

$$\left(ee^T\right) e = 3e$$

$$\shortparallel$$

$$e\,\underbrace{\left(e^T e\right)}_{=3} = 3e$$

Se v è ortogonale ad e,

$$\left(e\, e^T\right)v = e\left(e^T v\right) = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ee^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} M^{-1}$$

Modi di controllare se avete fatto tutto giusto:

1) $\det = \prod \lambda_i$

2) $\operatorname{Tr} A = \sum \lambda_i$ [Tr invariante per cambi di base]

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

3) Teorema di Perron-Frobenius

Se $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j$

allora c'è un autovettore ≥ 0

con autovalore ≥ 0 che è

quello (uno di quelli) di modulo massimo

[se il grafo associato è fortemente connesso, unicità e $>$ stretti]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -I + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= M \left(-I + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \right) M^{-1}$$

$$= M \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} M^{-1}$$

$vv^T + k \cdot I$

Matrici companion

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \\ x^3 \\ x^2 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

se x radice del polinomio

$$\lambda^4 = \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta,$$

allora vale

$$\det(A - \lambda I) =$$

MATRICE COMPANION

di $p(\lambda) = \lambda^4 - \alpha\lambda^3 - \dots\dots$

Thm se $p(\lambda) = -\lambda^n + \sum_{k=0}^{n} a_{k-1} \lambda^{k-1}$

ha tutte radici distinte,

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si diagonalizza come

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$[\lambda_i = \text{radici di } p(\lambda)]$

Se λ_i non sono distinti, non si diagonalizza

$$\begin{pmatrix} \lambda 1 & & & \\ & \lambda 1 & & \\ & & \lambda & \\ & & & \\ \end{pmatrix}$$

Se λ ha molteplicità k

compare un blocchetto $k \times k$ $\begin{bmatrix} \lambda 1 & & & \\ & \lambda 1 & & \\ & & \lambda 1 & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$

A che serve?

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} + \gamma a_{n-2}$$

$$v_n := \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$

Posso vederla come una applicazione lineare da $v_n \longmapsto v_{n+1}$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$

← companion del polinomio magico della ricorrenza

$$v_{n+100} = A^{100} v_n$$

Se $A = MDM^{-1}$

$$A^2 = M D \cancel{M^{-1} M} D M^{-1} = M D^2 M^{-1}$$

$$A^{100} = M \underset{\substack{\parallel \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}}}{D^{100}} M^{-1}$$

$$A^{100} v_n = M \begin{pmatrix} \lambda_1^{100} & & \\ & \lambda_2^{100} & \\ & & \lambda_3^{100} \end{pmatrix} M^{-1} v =$$

$$= \begin{pmatrix} \square \lambda_1^{100} + \square \lambda_2^{100} + \square \lambda_3^{100} \\ \square \lambda_1^{100} + \square \lambda_2^{100} + \square \lambda_3^{100} \\ \square \quad - - \quad - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+100} \\ a_{n+99} \\ a_{n+98} \end{pmatrix}$$

Cosa succede se ho radici multiple?
Devo capire come sono fatte le potenze di:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

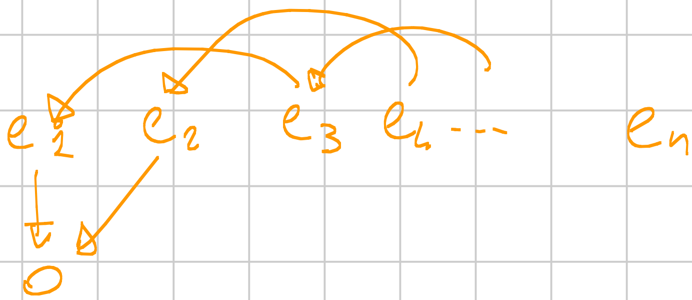
$$\parallel$$

$$\lambda I + J$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} e_1 \arrow[d] & e_2 \arrow[l] & e_3 \arrow[l] & \dots \arrow[l] & e_n \arrow[l] \\ 0 \end{tikzcd}$$

Cosa fa J^2?

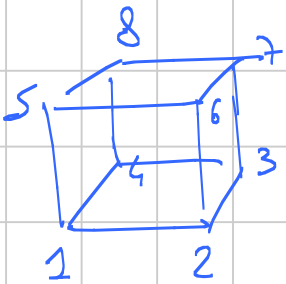


$$J^K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \text{ diagonale di uni} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} K-1 \text{ diagonali di zeri} \end{matrix}$$

$(\text{se } K \geq n,\ J^K = 0)$

Da questo, con poca fatica

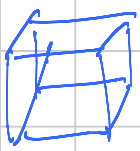
$$(\lambda I + J)^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ & & \ddots & n\lambda^{n-1} \\ & & & \lambda^n \end{pmatrix}$$



$p_i^{(n)}$ = probabilità di essere nel vertice i al tempo n

$$\begin{pmatrix} p_1^{(n+1)} \\ p_2^{(n+1)} \\ \vdots \\ p_8^{(n+1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \\ \vdots \\ p_8^{(n)} \end{pmatrix}$$

posso "soltanto" calcolare gli autovalori di questa 8×8



$$\left(\begin{array}{cc|c}
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & I_2 & \\
I_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \smash{I_{4\times 4}} \\
\hline
 & & \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & I_2 \\ \hline I_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \\
\multicolumn{2}{c|}{I_{4\times 4}} &
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} Q & \\ \hline & Q \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M & I \\ \hline I & M \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} Q^{-1} & \\ \hline & Q^{-1} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{matrix} & I \\ \hline I & \begin{matrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{matrix} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} d_1 & 1 \\ 1 & d_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} d_2 & 1 \\ 1 & d_2 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} d_3 & 1 \\ 1 & d_3 \end{matrix}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

ha autovalori
$d_1 - 1$
$d_1 + 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & I_2 & \\ I_2 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & I_{4\times 4} \\ \hline & & \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & I_2 \\ \hline I_2 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{array} \\ I_{4\times 4} & & \end{array}\right)$$

$1, -1$

$\pm 1 \ \pm 1$

$\pm 1 \ \pm 1 \ \pm 1$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

LA ti dice facile chi sono gli esponenti se devo risolvere la ricorrenza, meglio o meno =)

17 camaleonti blu, 17 rossi, 17 gialli

$R \ G \longrightarrow 2B \qquad n_1$

$B \ G \longrightarrow 2R \qquad n_2$

$B \ R \longrightarrow 2G \qquad n_3$

$$(\alpha \ \beta \ \gamma) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta R \\ \Delta G \end{pmatrix}$$

Invariante: $\alpha \Delta B + \beta \Delta R + \gamma \Delta G = 0$

TRASPOSTA

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Quando questa matrice ha 2 vettori (indipendenti) nel Ker?

Questa matrice ha 2 vettori nel Ker per $p = 3$

<u>Thm</u> se M ha (almeno) 1 vettore nel Ker, $\det M = 0$

se M ha 2 vettori nel Ker, <u>ogni sottomatrice</u> $n-1 \times n-1$ di M ha $\det = 0$

se M ha 3 vettori nel Ker ogni sottomatrice $n-2 \times n-2$ ha $\det = 0$ (e così via)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

le sottomatrici 2×2 hanno $\det = 3$

$\Rightarrow$ deve andare in $\mathbb{F}_3$ per avere un altro invariante

Spesso questi invarianti si ottengono facile da autovettori / autovalori:

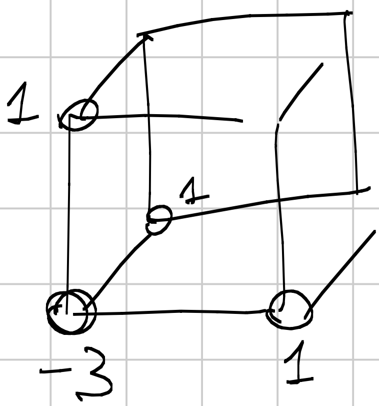
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 0$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 3$$

$$v = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad \lambda = 3$$

PRE - IMO

formiche



Questo si risolve con
QUESTO +
QUELLO CHE ABBIAMO FATTO PRIMA

PROBLEMA TRUCCOSO

Ho k sottoinsiemi di $1 \dots n$
tali che

$|A_i| = \text{dispari} \qquad |A_i \cap A_j| = \text{pari} \quad i \neq j$

Quanto vale il massimo k?

Dim. che $k \leq n$

Dim. Considera questa matrice:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & A_1 & A_2 & \cdots & A_k \\
\hline
1 & 1 & 0 & & \\
2 & 0 & 1 & & \\
\vdots & 0 & 0 & & \\
 & 1 & 1 & & \\
 & 0 & 0 & & \\
 & 0 & \vdots & & \\
n & \vdots & & &
\end{array} = A
$$

Come si riscrive l'ipotesi?

$$\underset{k\times n}{A^T}\,\underset{n\times k}{A} = I_k \qquad (\text{in } \mathbb{F}_2)$$

perché l'entrata i,j di A^TA è il prodotto scalare fra A_i e A_j

Supponiamo per assurdo $k > n$

LHS

$\operatorname{Ker} \underset{k\times n}{A^T}\,\underset{n\times k}{A}$ = non banale

perché riesco a trovare un vettore ortogonale alle n righe di A

RHS

I ha Ker banale

$\Rightarrow$ assurdo

BMOS2

$|A_i|$ non multiplo di 30

$|A_i \cap A_j|$ ~~non~~ multiplo di 30

allora $\quad 2k - \left\lfloor \frac{k}{30} \right\rfloor \leq 3n$

Si fa considerando i "pezzi" non nulli in $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$

---

n lampadine in cerchio

Potete "togglare" k lampadine consecutive.

Quante sono le configurazioni raggiungibili?

$\mathbb{F}_2 \qquad n$ mosse

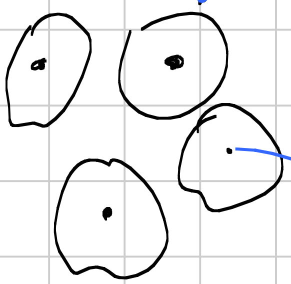
quante volte faccio mossa k — stato finale

$$\underset{A}{\underset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} 1 & & & & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & 1 & & \\ & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \quad (\text{in } \mathbb{F}_2)$$

Quante configurazioni raggiungibili?

È come dire: trovo gli inverienti, perché

$$\dim \operatorname{Ker} + \dim \operatorname{Im} = n$$



se $u \in \operatorname{Ker}$, $f(v+u) = f(v)$

LA fi dice subito che Im, Ker sono dei 2^k

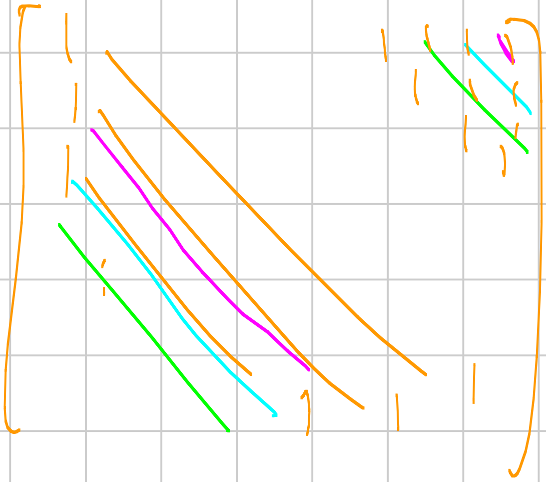
Risolvere (trovare dim Ker A)

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_n \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$(Z^n = I)$$

$$Z^2 = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z^3 = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & & 1 & 0 \\ 0 & & \ddots & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = $$

$$= I + Z + Z^2 + Z^3 \cdots + Z^{k-1}$$

Z = companion di $x^n - 1$

Caso facile: ha tutte radici distinte n dispari

Caso difficile: non ha radici distinte n pari

Se n dispari

$$Z = M \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \xi & & \\ & & \xi^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \xi^{n-1} \end{pmatrix} M^{-1}$$

$$x^{2^p d} - 1 \equiv (x^d - 1)^{2^p}$$

$$A = M\left(I + Z + \cdots + Z^{k-1}\right) M^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} p(1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\xi^{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$p = 1 + x + \cdots + x^{k-1} = \frac{1 - x^k}{1 - x}$$

dim Ker A

$\Updownarrow$

quanti zeri ci sono in

$\Updownarrow$

quante radici n-esime di 1 sono anche radici k-esime? $\quad \mathrm{mcd}(n,k)$

Occhio! 1 va considerato a parte

0 sulla diag $\begin{cases} \mathrm{mcd}(n,k) - 1 \text{ radici } n\text{-esime} \\ +1 \text{ se } 1 \text{ è radice di } 1+x+\dots+x^{k-1} \\ \qquad \text{cioè se } k \text{ pari} \end{cases}$

---

n pari: $\quad x^{d \cdot p^a} - 1 = (x^d - 1)^{p^a}$

$$Z \sim \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{matrix}}_{p^a \times p^a} & & \\ & \underbrace{\begin{matrix} s & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & s \end{matrix}}_{p^a \times p^a} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

and so on

$p(Z)$ con $p(x) = 1 + x + \dots + x^{k-1}$

che se $k = 2^b \cdot c$ è

$$\frac{x^{2^b \cdot c} - 1}{x - 1} = \frac{(x^c - 1)^{2^b}}{x - 1} = (x-1)^{2^b - 1} \cdot \text{ cosa che non si annulla in } 1$$

Idea 1)

Idea 2)

$$p\left[\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) & \frac{p''}{2}(\lambda) & \frac{p'''}{3!}(\lambda)\\ & \ddots & \ddots & \frac{p''}{2}(\lambda) \\ & & \ddots & p'(\lambda)\\ & & & p(\lambda)\end{bmatrix}$$

Dovreste calcolare il Ker J

Dipende solo dal primo non-zero tra

$$\frac{p^{(h)}}{h!}(\lambda)$$

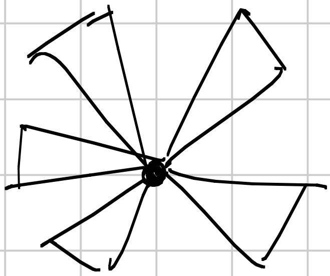
[TANTI AUGURI]

"Proofs from the book"

G grafo tale che

$\forall\ i \neq j \quad \exists!$ adiacente a i e j

allora



Sol: 1) tutti i vertici hanno lo stesso grado K (se non c'è un amico di tutti)

[COMBINATORIA]

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 1 & 1 & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrice di adiacenza

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{non coll} \\ 1 & \text{coll} \end{cases}$$

(A simmetrica)

grado di 1

"vicini" di i e j

$$A^2 = \begin{bmatrix} k & 1 & & 1 \\ & \ddots & & \\ 1 & & \ddots & \\ & & & k \end{bmatrix}$$

$$A^2 = (k-1) I + ee^T$$

$$\begin{bmatrix} n+k-1 & & & & \\ & k-1 & & & \\ & & k-1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & k-1 \end{bmatrix}$$

$Ae = ke$

perché tutti i vertici hanno lo stesso grado

$\Downarrow$

$A^2 e = k^2 e$

INFO NON BANALE I: $n+k-1 = k^2$

INFO II:

$$A \sim \begin{bmatrix} k & & & \\ & \pm\sqrt{k-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm\sqrt{k-1} \end{bmatrix}$$

occhio che $\left[\begin{bmatrix} \sqrt{k-1} & 1 \\ & \sqrt{k-1} \end{bmatrix} \right]$

r con segno +, s con segno →

$$\operatorname{Tr} A = \boxed{(r-s)\sqrt{k-1} + k} = 0$$

$k-1$ quadrato perfetto $\Rightarrow$ $\sqrt{k-1} = h$

$$(r-s)h = h^2 + 2h + 1$$

IMPOSSIBILE se $h \neq 1$

$\Rightarrow$ unico caso $k = 2$

e i grafi fatti così si analizzano in fretta (k = grado comune dei vertici)